



# UNIVERSIDAD VERACRUZANA

INSTITUTO DE INGENIERIA

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



ESPECTROS DE RESPUESTA

## TESIS

para obtener el grado de:

Maestría en Ingeniería de Estructuras

PRESENTA

Francisco Williams Linera

H. Veracruz, Ver.

1991

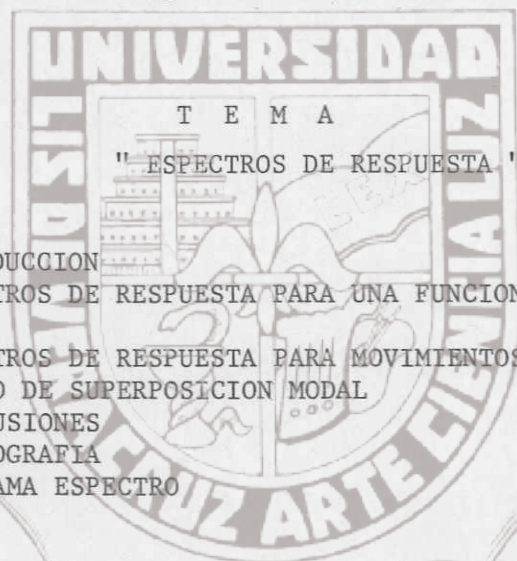


UNIVERSIDAD VERACRUZANA  
INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., Julio 30 de 1990  
SI310/90

Al Candidato al Grado señor: ING. FRANCISCO WILLIAMS LINERA  
P R E S E N T E

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Secretaría propuso el Dr. Bonifacio C.A. Peña Pardo, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería en el área de Ingeniería de Estructuras.



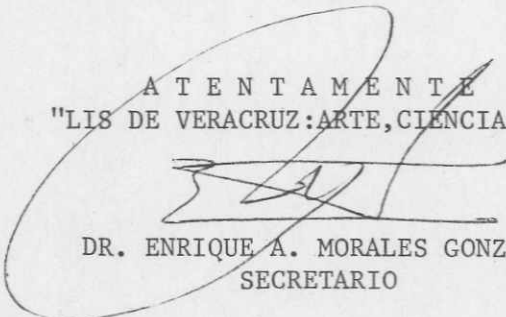
T E M A

" ESPECTROS DE RESPUESTA "

- I.- INTRODUCCION
- II.- ESPECTROS DE RESPUESTA PARA UNA FUNCION CARGA APLICADA EN LA MASA
- III.- ESPECTROS DE RESPUESTA PARA MOVIMIENTOS DE LOS APOYOS
- IV.- METODO DE SUPERPOSICION MODAL
- V.- CONCLUSIONES
- BIBLIOGRAFIA
- PROGRAMA ESPECTRO

Sin otro particular, me es grato reiterarle la seguridad de mi más atenta y distinguida consideración.

A T E N T A M E N T E  
"LIS DE VERACRUZ:ARTE, CIENCIA, LUZ"

  
DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ  
SECRETARIO

ccp.- Interesado  
ccp.- archivo  
ccp.- minutarario  
ERM/rsm\*

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis, Dr. Bonifacio C.A. Peña Pardo por todo su apoyo, aportaciones y comentarios que contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

Al Dr. Alfonso García Reynoso y al M. en I. José Arturo Hernández Ruiz por sus sugerencias durante la revisión de este trabajo.

ESPECTROS DE RESPUESTA

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



CONTENIDO

	HOJA
I .- INTRODUCCION.....	1
II .- ESPECTROS DE RESPUESTA PARA UNA FUNCION CARGA APLICADA EN LA MASA .....	2
III.- ESPECTROS DE RESPUESTA PARA MOVIMIENTOS DE LOS APOYOS .....	11
IV .- METODO DE SUPERPOSICION MODAL.....	20
V .- CONCLUSIONES .....	26
BIBLIOGRAFIA.....	27
PROGRAMA ESPECTRO.....	77

## I .- INTRODUCCION:

Los espectros de respuesta son gráficas que representan la máxima respuesta (desplazamiento, velocidad, aceleración o cualquier otra cantidad de interés) a una determinada función fuerza transitoria o no periódica, para diferentes sistemas de un grado de libertad. La abscisa del espectro es la frecuencia natural (o periodo) del sistema y la ordenada es la máxima respuesta.

Básicamente podemos diferenciar dos tipos de espectros de respuesta:

a).- Cuando la función fuerza se aplica en la masa del sistema de un grado de libertad:

Este tipo de fuerzas, pueden ser, los efectos causados por una explosión, viento, impacto, etc.; y dependiendo de la forma de la función fuerza se puede construir un espectro de respuesta general o uno específicamente para cada tipo de función fuerza.

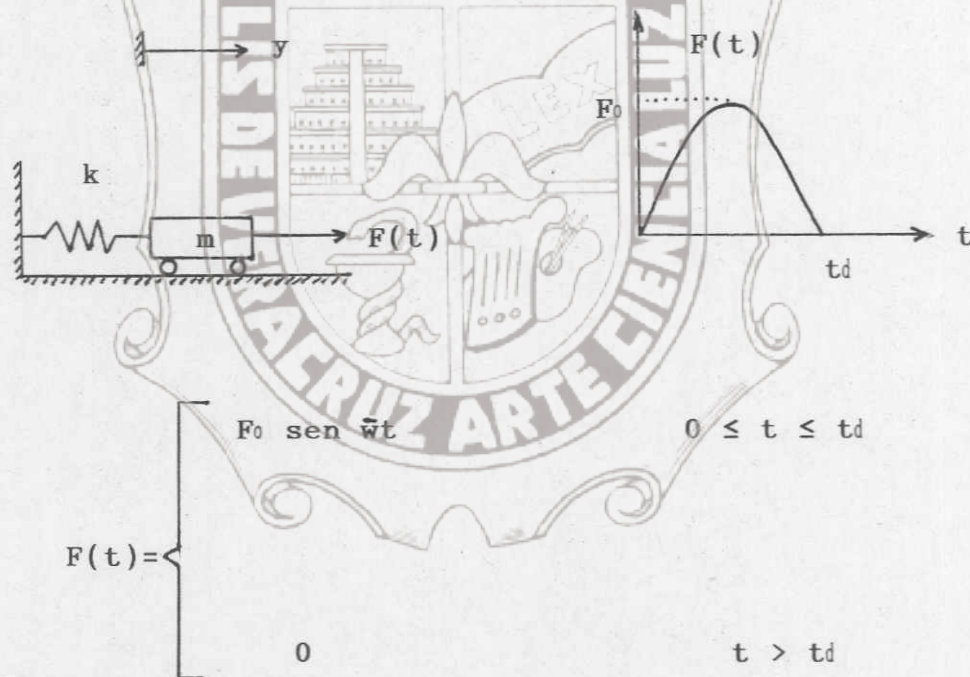
b).- Cuando hay movimientos de los apoyos del sistema de un grado de libertad:

Este tipo de movimientos, pueden ser, los originados por un sismo, las vibraciones causadas en el piso por algún equipo, vehículo, etc.. En estos casos es necesario, generalmente, construir un espectro de respuesta para cada tipo de movimiento.

II .- ESPECTROS DE RESPUESTA PARA UNA FUNCION CARGA APLICADA EN LA

MASA:

Para ilustrar la construcción de un espectro de respuesta, consideremos un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento sujeto a una excitación de pulso senoidal. Se asume que el sistema inicialmente está en reposo.



Siendo  $\bar{\omega}$  la frecuencia angular de la función fuerza igual a:

$$\bar{\omega} = \pi/t_d$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

Aplicando la Segunda Ley de Newton obtenemos la ecuación diferencial de movimiento para el sistema anterior:

$$m\ddot{y} + ky = F(t) \quad [1]$$

donde:

$m$  = elemento masa, representa la masa y las características inerciales del sistema.

$k$  = constante de resorte.

$F(t)$  = fuerza excitadora, representa las fuerzas externas actuando en el sistema.

$y$  = desplazamiento del sistema.

$\ddot{y}$  = aceleración del sistema.

La solución de la ecuación [1] se puede determinar de manera general empleando la integral de Duhamel:

$$y(t) = \frac{1}{m w} \int_0^t F(\tau) \operatorname{sen} w (t - \tau) d\tau \quad [2]$$

donde  $w$  = frecuencia natural del sistema

pero dada la simplicidad de la función  $F(t)$ , la respuesta se puede obtener analíticamente mediante integración de la ecuación diferencial lineal, dicha respuesta es la suma algebraica de la solución complementaria  $y_c$  y la solución particular  $y_p$ .

$$y = y_c + y_p \quad [3]$$

Proyecto de Digitalización de Tesis  
Responsable M.B. Alberto Pedro Lorandi Medina

Colaboradores: Estanislao Ferman García  
M.B. Enrique Rodríguez Magaña

Sustituyendo  $F(t)$  para el intervalo  $0 \leq t \leq t_d$  la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{y} + ky = F_0 \text{ sen } \bar{\omega}t \quad [4]$$

y su solución complementaria es de la forma:

$$y_c = A \cos \bar{\omega}t + B \text{ sen } \bar{\omega}t \quad [5]$$

siendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la frecuencia natural del sistema en rad/seg.

Si  $\omega \neq \bar{\omega}$  la solución particular de [4] es:

$$y_p = D \text{ sen } \bar{\omega}t \quad [6]$$

donde D es una constante por determinar.

sustituyendo  $y_p$ ,  $\dot{y}_p$  y  $\ddot{y}_p$  en [4] obtenemos que:

$$D = \frac{F_0}{k - m\bar{\omega}^2} \quad [7]$$

la respuesta para el intervalo  $0 \leq t \leq t_d$  es:

$$y = A \cos \bar{\omega}t + B \text{ sen } \bar{\omega}t + \frac{F_0 \text{ sen } \bar{\omega}t}{k - m\bar{\omega}^2} \quad [8]$$

aplicando las condiciones iniciales de reposo:

$$y(0) = 0$$


$$\dot{y}(0) = 0$$



la respuesta es igual a :

$$y = \frac{F_0/k}{1 - (\bar{w}/w)^2} (\text{sen } \bar{w}t - \bar{w}/w \text{ sen } wt) \quad [9]$$

introduciendo la siguiente notación en la ecuación [9] :



$$y_{st} = \frac{F_0}{k} \quad \text{Desplazamiento estático}$$

$$\bar{w} = \frac{\pi}{t_d}$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

donde  $T =$  período natural de vibración del sistema.

$$y = \frac{y_{st}}{1 - (T/2t_d)^2} (\text{sen } \pi t/t_d - T/2t_d \text{ sen } 2\pi t/T) \quad [10]$$

para  $0 \leq t \leq t_d$

Después del tiempo  $t_d$  la fuerza excitadora es nula y el sistema se encuentra en vibración libre, entonces la respuesta para  $t > t_d$  tiene la forma:

$$y = A \cos wt + B \text{ sen } wt$$

Las constantes de integración se determinan con los valores de desplazamiento y velocidad calculados en el tiempo  $t = t_d$  en [9]. La expresión final para la respuesta está dada por:

$$y = \frac{(T/t_d) y_{st}}{(T/2t_d)^2 - 1} \cos \pi t_d/T \sin 2\pi (t/T - t_d/2T) \quad [11]$$

para  $t \geq t_d$

La respuesta en términos de  $y/y_{st}$  como una función de la relación del tiempo de duración de la carga con el período natural del sistema ( $t_d/T$ ) y el tiempo expresado como  $t/T$  es igual a:

$$\frac{y}{y_{st}} = \frac{1}{1 - (T/2t_d)^2} (\sin \pi t/t_d - T/2t_d \sin 2\pi t/T) \quad [10a]$$

para  $0 \leq t \leq t_d$

$$\frac{y}{y_{st}} = \frac{T/t_d}{(T/2t_d)^2 - 1} \cos \pi t_d/T \sin 2\pi (t/T - t_d/2T) \quad [11a]$$

para  $t \geq t_d$

De aquí que para cualquier valor fijo de los parámetros ( $t_d/T$ ) se pueden obtener las máximas respuestas maximizando las ecuaciones [10a] y [11a]. La gráfica de estos valores máximos como una función de  $t_d/T$  es el espectro de respuestas para una excitación de pulso senoidal y se representa como se muestra en la figura No 1. El cociente  $(y/y_{st})_{max}$  corresponde al máximo factor dinámico de carga  $(DLF)_{max}$ , el cual se define como el máximo desplazamiento  $y_{din}$  alcanzado por el sistema dividido por el desplazamiento estático  $y_{st} = F_0/k$ , donde

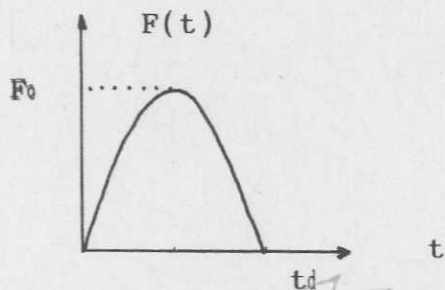
$F_0$  se toma como el máximo valor de la fuerza en cualquier tiempo dentro del intervalo de duración .

$$DLF = \frac{y_{din}}{y_{st}}$$

Debido a la simplicidad de la fuerza fué posible en este caso obtener una solución analítica y graficar el espectro de respuesta en términos de relaciones adimensionales, haciendo válida esta gráfica para cualquier fuerza impulsiva descrita por la mitad de un ciclo senoidal.

Generalmente la gráfica de la función fuerza  $F(t)$  no puede ser representada fácilmente por medio de una función matemática que nos permita obtener una gráfica general del espectro de respuesta. En estos casos para poder construir un espectro de respuesta se puede emplear la integral de Duhamel, la cual se resuelve mediante algunos métodos numéricos ( ver por ejemplo el programa DUHAMEL, 5 ), de esta forma se obtienen las respuestas de un sistema de un grado de libertad en el rango de frecuencias o períodos que se deseen.

Utilizando el programa ESPECTRO se construyen los espectros de respuesta para la siguiente excitación de pulso senoidal:



$$F_0 = 120\,000.0 \text{ lbs.}$$

$$t_d = 0.16 \text{ seg.}$$

$$F(t) = F_0 \text{ sen } \bar{\omega}t$$

Los espectros de respuesta son mostrados en las fig. No. 2 a la No. 6; y en la tabla No. 1 la comparación de algunos Factores Dinámicos de Carga (DLF) obtenidos de la gráfica de la fig. No. 1 (5) con los calculados mediante la solución numérica de la integral de Duhamel.

T A B L A No. 1

Frecuencia	Período	$t_d/T$	Fig. No 1	Programa
			DLF	ESPECTRO
5.0 hertz	0.2000 seg	0.8	DLF	DLF
20.0 hertz	0.0500 seg	3.2	1.70	1.768
80.0 hertz	0.0125 seg	12.8	1.20	1.175
			1.05	1.037

Las gráficas de desplazamientos, velocidades, aceleraciones y reacciones en los apoyos (en valor absoluto) que describen el comportamiento de los sistemas de un grado de libertad indicados en la tabla No. 1, son mostradas en las fig. No 7 a la

No. 19, para los diferentes valores de las frecuencias. Se puede apreciar que a partir de 0.16 seg. que corresponde al tiempo de duración de la fuerza, el sistema de un grado de libertad se encuentra en vibración libre. Para calcular las respuestas de estos sistemas se utilizó el programa DUHAMEL (5).

El poder disponer de espectros como el de la figura No. 1 es de gran utilidad en aspectos de diseño ya que con solo contar con la frecuencia del sistema de un grado de libertad y el valor de la fuerza  $F_0$ , podemos calcular una fuerza estática equivalente a la dinámica con solo multiplicar a  $F_0$  por su DLF correspondiente y de esta manera encontrar la máxima respuesta dinámica a partir de la solución estática.

Dependiendo de la forma de la función fuerza se pueden construir diferentes espectros de respuesta (ver fig. No. 20).

Ejemplo:

Consideremos una estructura que puede ser modelada como un sistema de un grado de libertad, la cual está sujeta a la excitación de pulso senoidal en estudio y sus propiedades son las siguientes:

$$k = 1\ 579\ 144.0 \text{ lb/pulg}$$

$$m = 100.0 \text{ lb-seg}^2/\text{pulg}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} = 20 \text{ hertz}$$

De la fig. No.6 obtenemos que  $DLF = 1.18$  y como:

$$y_{st} = \frac{F_0}{k} = 0.076 \text{ pulg}$$

$$DLF = \frac{y_{din}}{y_{st}} = 1.18$$

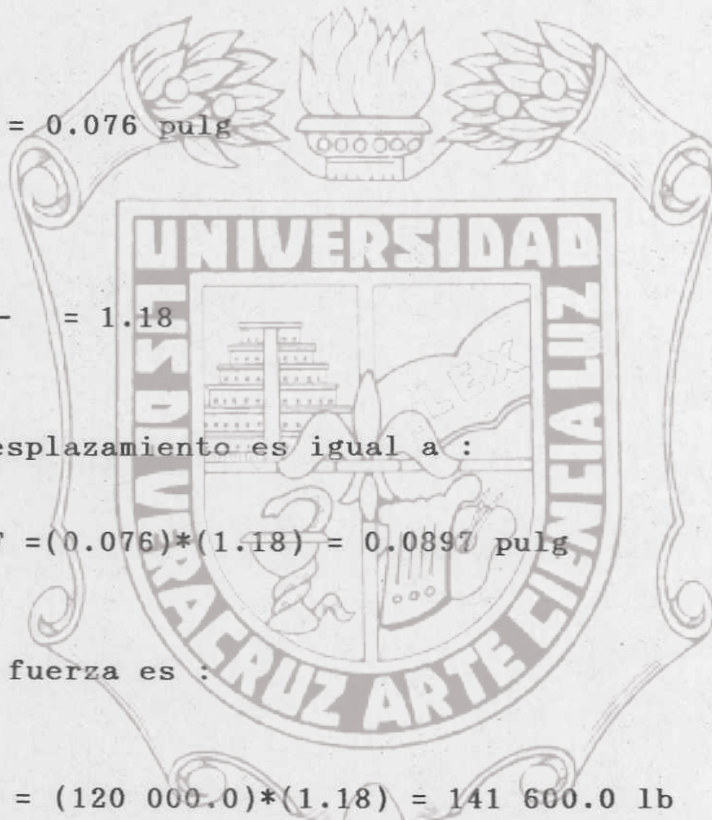
El máximo desplazamiento es igual a :

$$y_{din} = y_{st} DLF = (0.076) * (1.18) = 0.0897 \text{ pulg}$$

Y la máxima fuerza es :

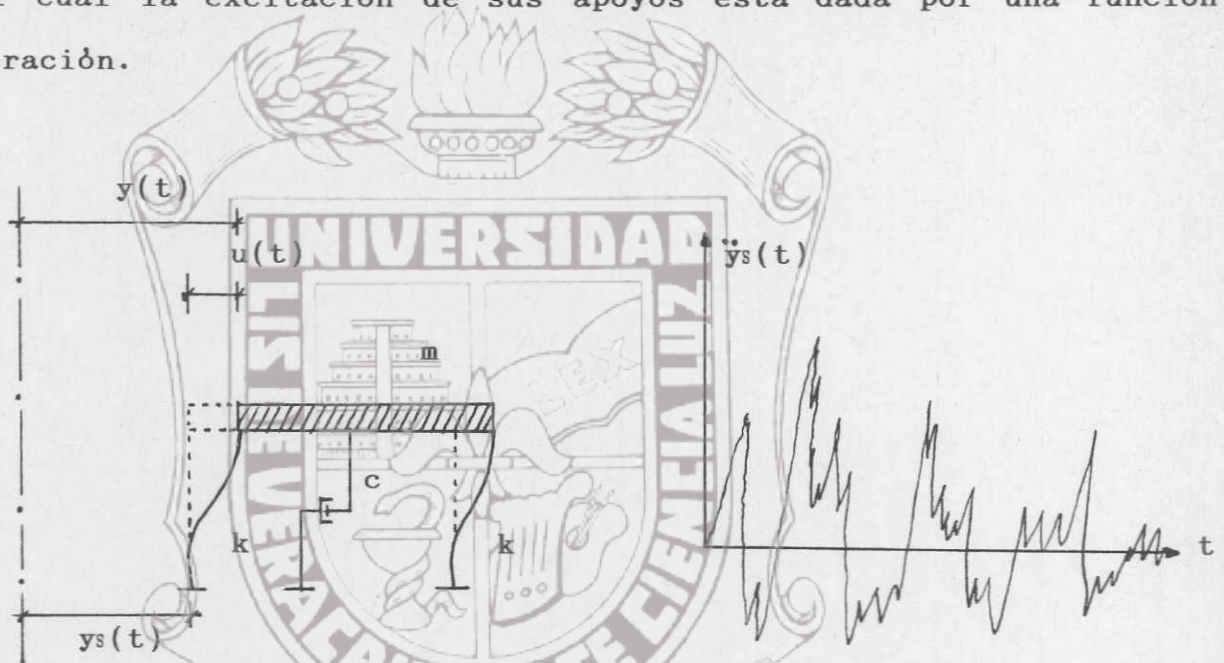
$$F_{max} = F_0 DLF = (120\ 000.0) * (1.18) = 141\ 600.0 \text{ lb}$$

Los valores anteriores pueden ser calculados utilizando las fig. No. 2 y 5 respectivamente.



## III .- ESPECTROS DE RESPUESTA PARA MOVIMIENTOS DE LOS APOYOS:

Consideremos un sistema de un grado de libertad en el cual la excitación de sus apoyos está dada por una función aceleración.



Aplicando la Segunda Ley de Newton obtenemos la ecuación diferencial de movimiento para el sistema anterior:

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s) = 0 \quad [12]$$

sustituyendo:

$$w = \sqrt{k/m}$$

$$\zeta = c/c_{cr}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2mw$$

donde:

$m$  = masa, representa la masa y las características inerciales del sistema.

$k$  = rigidez del resorte.

$y_s$  = desplazamiento de los apoyos.

$\dot{y}_s$  = velocidad de los apoyos.

$\ddot{y}_s$  = aceleración de los apoyos.

$y$  = desplazamiento del sistema.

$\dot{y}$  = velocidad del sistema.

$\ddot{y}$  = aceleración del sistema.

$w$  = frecuencia natural del sistema en rad/seg.

$c$  = coeficiente de amortiguamiento.

$c_{cr}$  = amortiguamiento crítico, es el valor del coeficiente de amortiguamiento para el cual el movimiento deja de ser oscilatorio.

$\xi$  = relación de amortiguamientos.

obtenemos:

$$\ddot{y} + 2 \xi w \dot{y} + w^2 y = w^2 y_s(t) + 2 \xi w \dot{y}_s(t) \quad [13]$$

La ecuación [13] es la ecuación diferencial de movimiento para un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento, en términos de su movimiento absoluto. Una formulación más útil de este problema es expresarlo en términos del



movimiento relativo de la masa con respecto al movimiento de los apoyos. El desplazamiento relativo  $u$  está determinado por :

$$u = y - y_s \quad [14]$$

sustituyendo la ecuación [14] en la [13] obtenemos :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y}_s(t) \quad [15]$$

El término  $-m\ddot{y}_s(t)$  se puede considerar como una fuerza aplicada  $F(t)$ . Es decir, la estructura responde a una aceleración del terreno  $\ddot{y}_s$  exactamente igual a como lo haría ante una fuerza externa  $F(t)$  cuyo valor es igual al producto de la masa por la aceleración del terreno. El signo negativo indica que la fuerza tiene dirección opuesta a la aceleración del terreno. En la práctica esto no tiene importancia ya que se supone que la aceleración del terreno provocada por un sismo puede actuar en cualquier dirección.

La ecuación [15] se puede expresar como :

$$\ddot{u} + 2\zeta w \dot{u} + w^2 u = -\ddot{y}_s(t) \quad [16]$$

Esta formulación de la ecuación de movimiento en función del movimiento relativo entre la masa y su apoyo es particularmente importante cuando en el diseño la deformación o esfuerzo en el "elemento resorte" son requeridas. El movimiento en el

apoyo es generalmente especificado por medio de una función aceleración (por ejemplo el registro del acelerograma de un sismo ).

La solución de la ecuación [16] puede ser obtenida utilizando la integral de Duhamel.

$$u(t) = - \frac{1}{w_D} \int_0^t \ddot{y}_s(\tau) e^{-\xi w_D (t-\tau)} \text{sen } w_D (t - \tau) d\tau \quad [17]$$

Es posible encontrar la solución de esta integral utilizando métodos numéricos, como el programa DUHAMEL (5), el cual nos proporciona el máximo desplazamiento relativo  $u_{max}$  que emplearemos en la construcción de los espectros de respuesta.

Consideremos la ecuación [12] y sustituyamos:

$$u = y - y_s \quad \dot{u} = \dot{y} - \dot{y}_s$$

quedando para sistemas amortiguados:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad [18]$$

y para sistemas no amortiguados:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad [19]$$

Podemos observar en la ecuación [19] que la aceleración absoluta es para cualquier valor de t proporcional al desplazamiento relativo, es decir:

$$\ddot{y} = - \frac{k}{m} u \quad [20]$$

Si definimos a:

$$S_a = \ddot{y}_{\max}$$

y

$$S_d = u_{\max}$$

[21]

Para valores máximos, el espectro de aceleraciones es proporcional al espectro de desplazamientos y la ecuación [20] la podemos expresar como:

$$S_a = -\omega^2 S_d$$

[22]

Cuando el amortiguamiento es considerado en el sistema y tomando en cuenta que el máximo desplazamiento relativo ocurre cuando la velocidad relativa es igual a cero ( $u=0$ ), podemos también a partir de la ecuación [22] obtener la relación entre el espectro de aceleraciones y el espectro de desplazamientos. Esta relación es por coincidencia la misma para el movimiento armónico simple. La velocidad ficticia asociada con el aparente movimiento armónico simple es llamada seudovelocidad y por conveniencia su valor  $S_v$  máximo es definido como el espectro de velocidad, esto es:

$$S_v = \omega S_d = \frac{S_a}{\omega}$$

[23]

De la Segunda Ley de Newton y considerando la aceleración  $S_a$  podemos calcular la fuerza de inercia que actúa en cada sistema de un grado de libertad de la siguiente manera :

$$F = m S_a \quad [24]$$

$$F = \frac{W}{g} S_a \quad [25]$$

donde:

$W$  = peso del sistema.

$g$  = aceleración de la gravedad.

si hacemos:

$$C = \frac{S_a}{g} \quad [26]$$

y lo sustituimos en la ecuación [25] obtenemos:

$$F = W C \quad [27]$$

Dividiendo la aceleración  $S_a$  entre la aceleración de la gravedad obtenemos la aceleración  $a$  que van a estar sujetos los sistemas de un grado de libertad como una fracción de la aceleración de la gravedad, este cociente se conoce como coeficiente sísmico  $C$  y es adimensional . Por lo tanto la fuerza cortante que actúa en la base de una estructura cuando está sujeta a un sismo se calcula como:

$$V = W C$$

[28]

donde :

V = fuerza cortante en la base

C = coeficiente sísmico

Empleando el acelerograma ( ver fig. No. 21 ) del sismo de El Centro, California de 1940 y el programa ESPECTRO se construyen los ESPECTROS DE RESPUESTA para la relación de amortiguamiento de 0%, 5% y 10%, en un rango de frecuencias de 0 a 100 hertz (ver fig. No. 23 a fig. No. 35).

La construcción de estos espectros consiste en excitar los apoyos de cada sistema de un grado de libertad comprendidos en las frecuencias en estudio y encontrar para cada uno de ellos el máximo desplazamiento relativo  $u_{max}$  (ver fig. No. 22), el cual emplearemos en la ecuación [22] para obtener la máxima aceleración absoluta de cada sistema de un grado de libertad.

Ejemplo:

Consideremos una estructura de un grado de libertad sujeta a las aceleraciones del sismo de El Centro de 1940, con las siguientes propiedades :

$$W = 38\ 600.0 \text{ lb}$$

$$k = 1\ 579\ 144.0 \text{ lb/pulg}$$

$$m = 100.0 \text{ lb-seg}^2/\text{pulg}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} = 20 \text{ hertz}$$

La fuerza cortante en la base y el desplazamiento relativo entre la masa y su apoyo se podrán calcular de la siguiente manera:

a).- Aplicando la integral de Duhamel (el comportamiento de este sistema se muestra de la fig. No 36 a fig. No 48):

Relación de Amortiguamiento = 0 %

Desplazamiento = 0.014 pulg

Cortante en la base = 22 472.56 lb

Relación de Amortiguamiento = 5 %

Desplazamiento = 0.0073 pulg

Cortante en la base = 11 522.88 lb

Relación de Amortiguamiento = 10 %

Desplazamiento = 0.0075 pulg

Cortante en la base = 11 899.44 lb

b).- Calculando la frecuencia del sistema y empleando los espectros que se muestran en las fig. No. 26 , 30 y 34:

Relación de Amortiguamiento = 0 %

Coefficiente sísmico = 0.59

Cortante en la base = C\*W = 22 744.0 lb

Desplazamiento = V/k = 0.0144 pulg

Relación de Amortiguamiento = 5 %

Coefficiente sísmico = 0.30

Cortante en la base =  $C*W = 11\ 580.0$  lb

Desplazamiento =  $V/k = 0.0073$  pulg

Relación de Amortiguamiento = 10 %

Coefficiente sísmico = 0.31

Cortante en la base =  $C*W = 11\ 966.0$  lb

Desplazamiento =  $V/k = 0.0076$  pulg

Con este ejemplo podemos apreciar la utilidad de los espectros de respuesta, ya que, calculando la frecuencia del sistema, se obtiene el coeficiente sísmico, el cual, al multiplicarlo por el peso del sistema de un grado de libertad, nos da la fuerza cortante en la base; de otra manera se tendría que resolver la ecuación de movimiento para cada sistema de un grado de libertad .

IV.-METODO DE SUPERPOSICION MODAL:

Para evaluar la respuesta dinámica de un sistema lineal de varios grados de libertad, se utiliza el método de Superposición Modal, el cual consiste de los siguientes pasos:

## 1).- Ecuaciones de Movimiento:

Para este tipo de sistemas las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas como:

$$[M] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{F(t)\} \quad [29]$$

donde:

$\{\ddot{y}\}$  = vector de aceleraciones,  $n \times 1$

$\{\dot{y}\}$  = vector de velocidades,  $n \times 1$

$\{y\}$  = vector de desplazamientos,  $n \times 1$

$[M]$  = matriz de masas del sistema,  $n \times n$

$[C]$  = matriz de amortiguamiento del sistema,  $n \times n$

$[K]$  = matriz de rigidez del sistema,  $n \times n$

$\{F(t)\}$  = vector de excitaciones dinámicas externas,  $n \times 1$

$n$  = número de grados de libertad.



## 2).- Análisis de Frecuencias y Forma de los Modos:

La configuración de un sistema de n-grados de libertad, tiene n-formas diferentes. A estas formas se les denomina modos de vibración, a cada uno de estos modos le corresponde una frecuencia angular  $\omega_n$  y un vector de desplazamientos  $\{a\}$ .

Para vibraciones libres no amortiguadas, la ecuación matricial [29] puede ser reducida a la ecuación característica:

$$[ [K] - \omega^2 [M] ] \{a\} = \{0\} \quad [30]$$

que corresponde a un sistema de n-ecuaciones lineales algebraicas homogéneas con n-vectores de desplazamientos desconocidos  $\{a\}$  y n-parámetros desconocidos  $\omega^2$ , con los cuales determinaremos la matriz de forma modal  $[\Phi]$  y el vector de frecuencias  $\{\omega^2\}$ .

## 3).- Fuerza y Masa Modal:

Con el vector de forma modal  $\{\phi_n\}$ , la masa y fuerza modal puede ser calculada para cada modo de la siguiente manera:

$$M_n = \{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\} \quad [31]$$

$$F_n(t) = \{\phi_n\}^T F(t) \quad [32]$$

## 4).- Desacoplamiento de las Ecuaciones de Movimiento:

Consiste en transformar el sistema de ecuaciones acopladas a un sistema de ecuaciones independientes o desacopladas, en las cuales, cada ecuación diferencial contiene solamente una incógnita en función del tiempo.

## 4.1).- Vibraciones Forzadas:

Se realiza introduciendo la siguiente transformación de coordenadas en la ecuación [29]:

$$\{y\} = [\Phi] \{z\} \quad [33]$$

Con lo cual, las ecuaciones de movimiento para cada modo pueden escribirse como:

$$\ddot{z}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \frac{F_n(t)}{M_n} \quad [34]$$

## 4.2).- Movimiento de los apoyos:

En este caso el segundo término de la ecuación [29] es igual a cero y expresando los desplazamientos de cada grado de libertad en desplazamientos relativos al movimiento de los apoyos:

$$u_n = y_n - y_s \quad [35]$$

Las ecuaciones de equilibrio serán:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = [M] \{-\ddot{y}_s\} \quad [36]$$

desacoplando las ecuaciones anteriores, se pueden expresar como :

$$\ddot{z}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \Gamma_n \ddot{y}_s \quad [37]$$

donde  $\Gamma_n$  se conoce como coeficiente de participación modal y se define como :

$$\Gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^m M_i a_{in}}{\sum_{i=1}^m M_i a_{in}^2} \quad [38]$$

donde:

$M_i$  = masa del grado de libertad  $i$ .

$m$  = número de grados de libertad.

$a_{in}$  = desplazamiento de la masa  $i$  en el modo de vibración  $n$ .

introduciendo el siguiente cambio de variable en la ecuación [37] :

$$Z_n = \Gamma_n g_n \quad [39]$$

se puede expresar como:

$$\ddot{g}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{g}_n + \omega_n^2 g_n = \ddot{y}_s \quad [40]$$

5).-Respuesta Modal:

El resultado del inciso 4) es un grupo de  $n$  ecuaciones de movimiento, una para cada modo de vibración. Estas ecuaciones de sistemas de un grado de libertad pueden ser

resueltas por cualquier método apropiado, dependiendo del tipo de carga. La expresión de la respuesta general es dada por la integral de Duhamel para cada modo como:

5.1).- Vibraciones Forzadas:

$$Z_n(t) = - \frac{1}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t F_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_{Dn} (t-\tau)} \text{sen } \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \quad [41]$$

5.2).- Movimiento en los apoyos:

$$g_n(t) = - \frac{1}{\omega_{Dn}} \int_0^t \ddot{y}_s(\tau) e^{-\xi_n \omega_{Dn} (t-\tau)} \text{sen } \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \quad [42]$$

6).- Respuesta de los sistemas de varios grados de libertad:

Cuando la respuesta para cada modo ha sido determinada los desplazamientos son determinados con las siguientes expresiones :

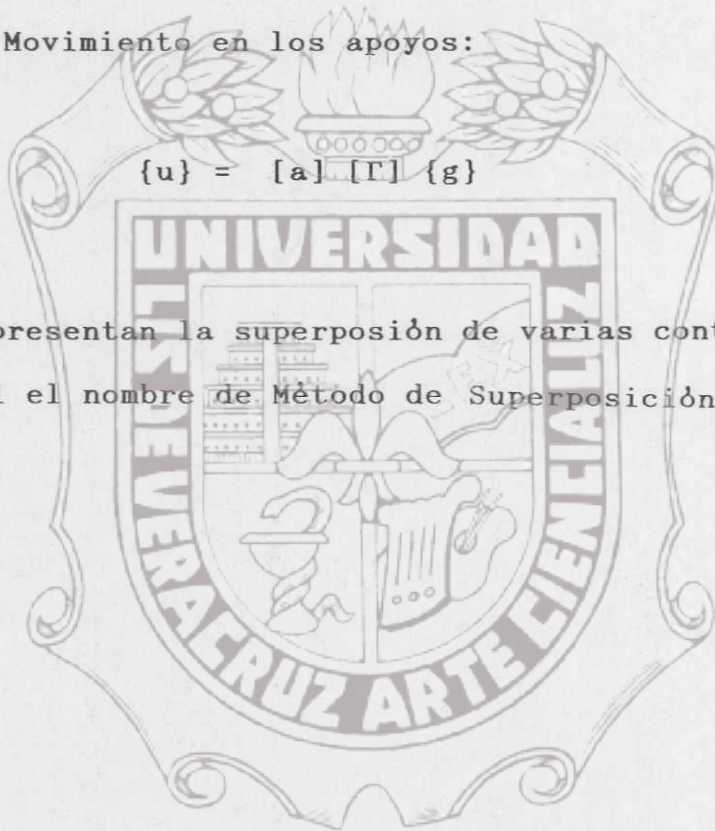
6.1).- Vibraciones Forzadas:

$$\{y\} = [a] \{z\} \quad [43]$$

6.2).- Movimiento en los apoyos:

$$\{u\} = [a] [\Gamma] \{g\} \quad [44]$$

que representan la superposición de varias contribuciones modales, de aquí el nombre de Método de Superposición Modal



V.-CONCLUSIONES:

Los espectros de respuesta nos permiten conocer el efecto que produce una fuerza  $F(t)$  en los diferentes sistemas de un grado de libertad y son de gran utilidad, ya que el análisis dinámico de un sistema con  $n$ -grados de libertad puede ser transformado a un problema de resolver  $n$ -sistemas en los cuales cada uno es un sistema de un grado de libertad. Es decir, los modos normales de vibración podrán ser usados para transformar el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en un grupo de ecuaciones diferenciales desacopladas en las cuales cada ecuación contiene solamente una variable dependiente; este método se conoce como el Método de Superposición Modal, el cual extiende la utilidad de los espectros de respuesta para sistemas de un grado de libertad a la solución de sistemas de cualquier número de grados de libertad.

**BIBLIOGRAFIA:**

- 1.- Biggs, John M.  
"Introduction to Structural Dynamics"  
Primera Edición  
Mc. Graw-Hill, 1964
- 2.- Clough, Ray W.  
Penzien, Joseph  
"Dynamics of Structures"  
Primera Edición  
Mc. Graw-Hill, 1982
- 3.- Craig, Roy R.  
"Structural Dynamics. An Introduction to Computer Methods"  
Primera Edición  
John Wiley & Sons. Inc., 1981
- 4.- Fundación ICA A.C.  
"Experiencias Derivadas de los Sismos de Septiembre de 1985"  
Primera Edición  
Editorial Limusa, 1988
- 5.- Paz, Mario  
"Structural Dynamics. Theory and Computation"  
Segunda Edición  
Van Nostrand Reinhold Company, 1985
- 6.- Peña Pardo, Bonifacio C.A.  
"Apuntes del Curso de Dinámica Estructural"  
Instituto de Ingeniería U.V., 1987
- 7.- Thomson, William T.  
"Teoría de Vibraciones"  
Segunda Edición  
Prentice Hall, 1983

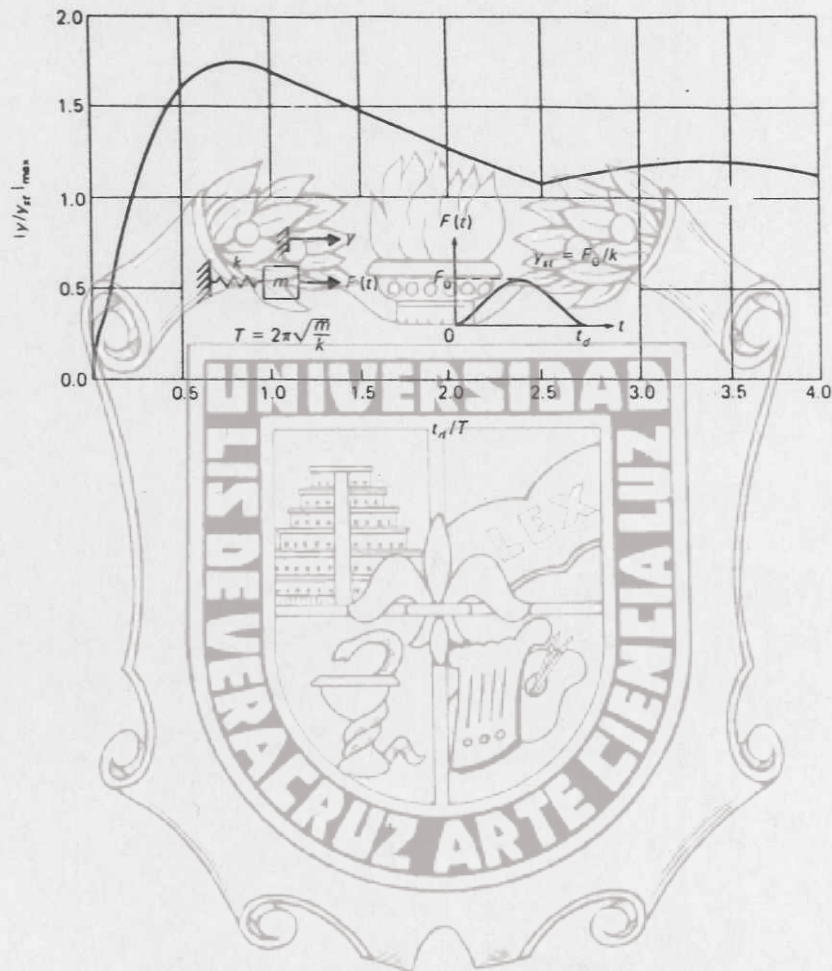


FIGURA No. 1  
ESPECTRO DE RESPUESTA PARA FUERZA SENOIDAL  
( 5 )



ESPECTRO DE RESPUESTA

$$F(t) = 120000 * \text{sen}(\omega * t)$$

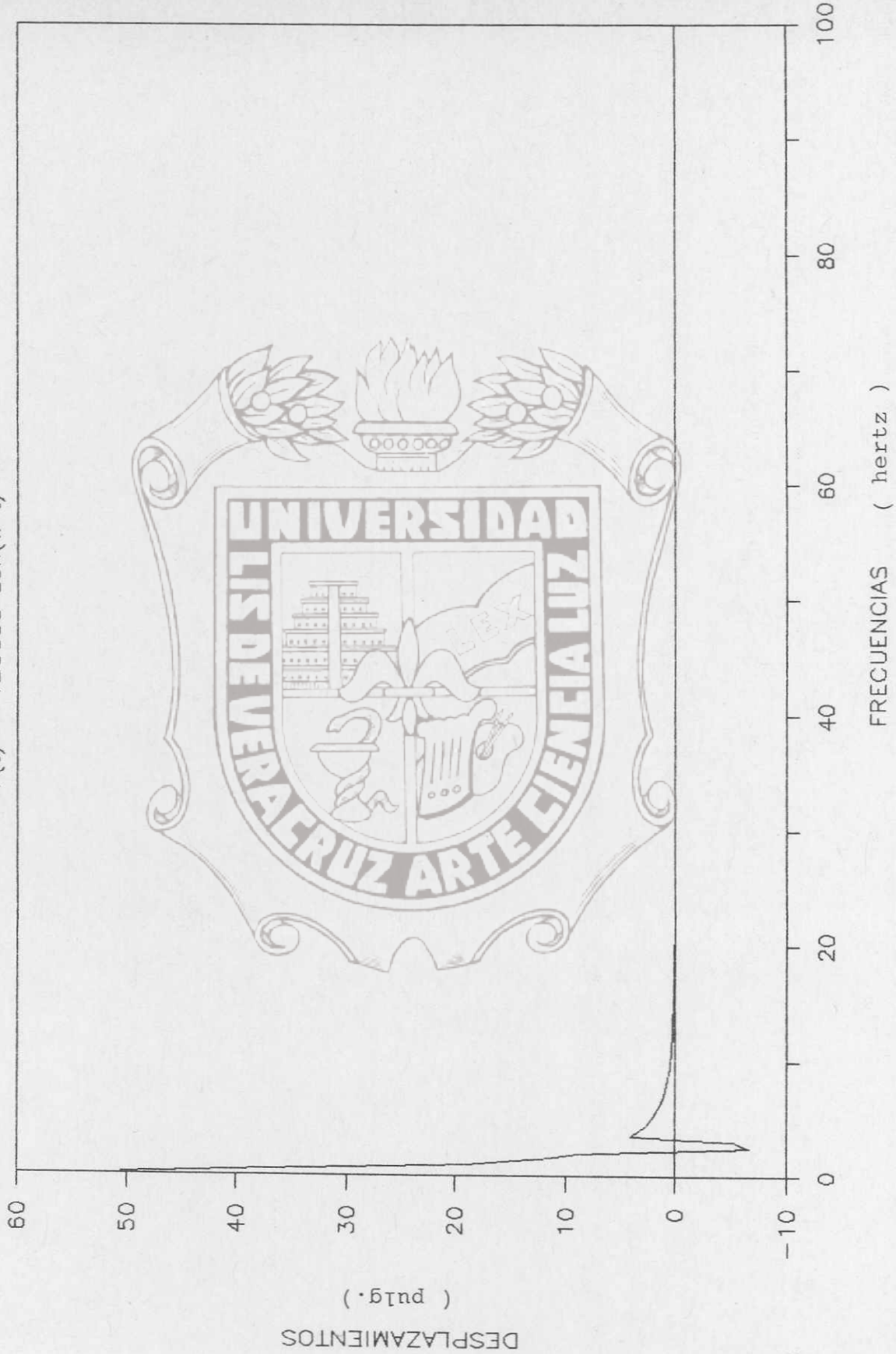


FIGURA No. 2

ESPECTRO DE RESPUESTA

$$F(t) = 120000 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t)$$

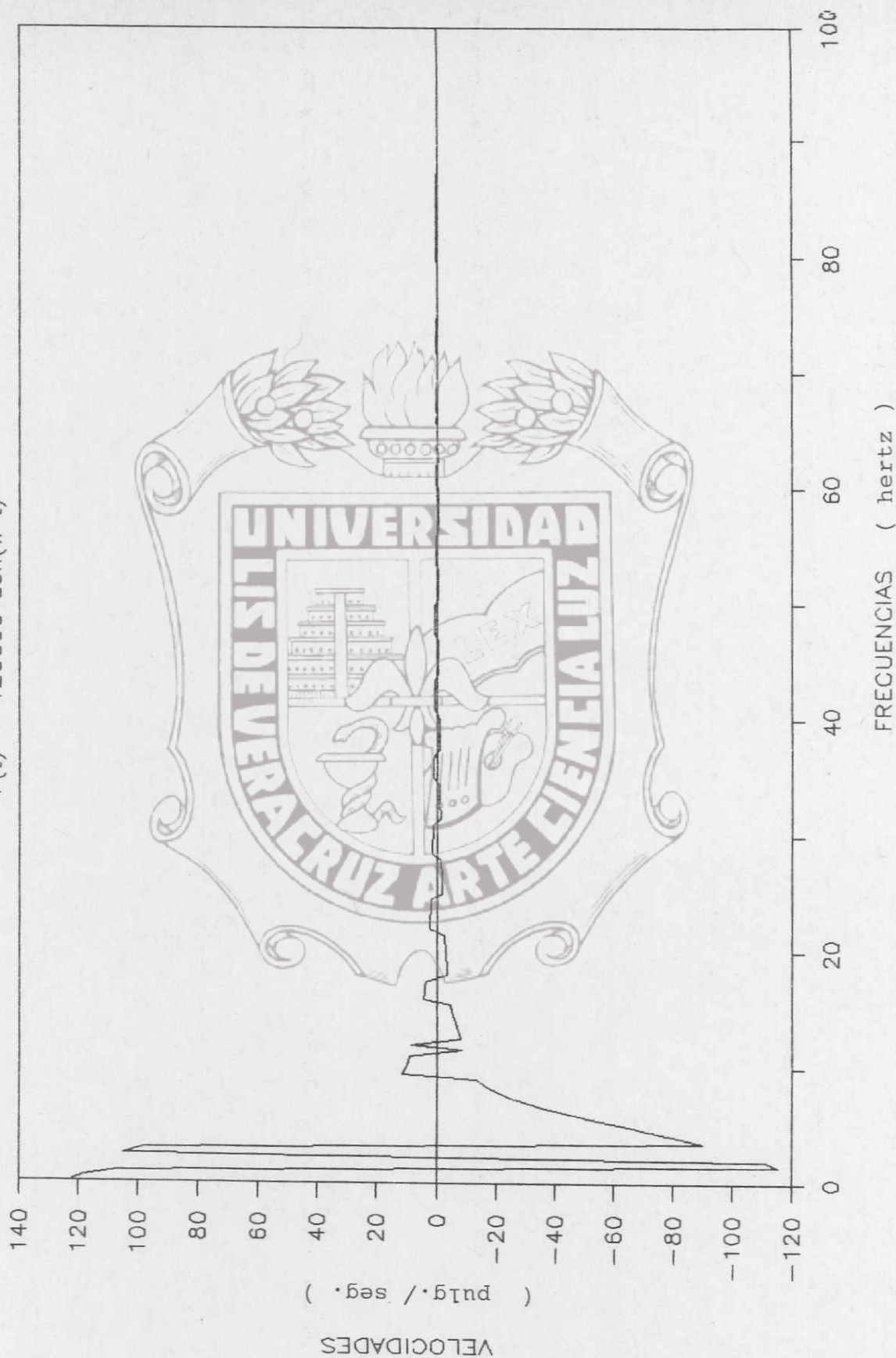


FIGURA No. 3

ESPECTRO DE RESPUESTA

$$F(t) = 120000 * \text{sen}(\bar{\omega} * t)$$

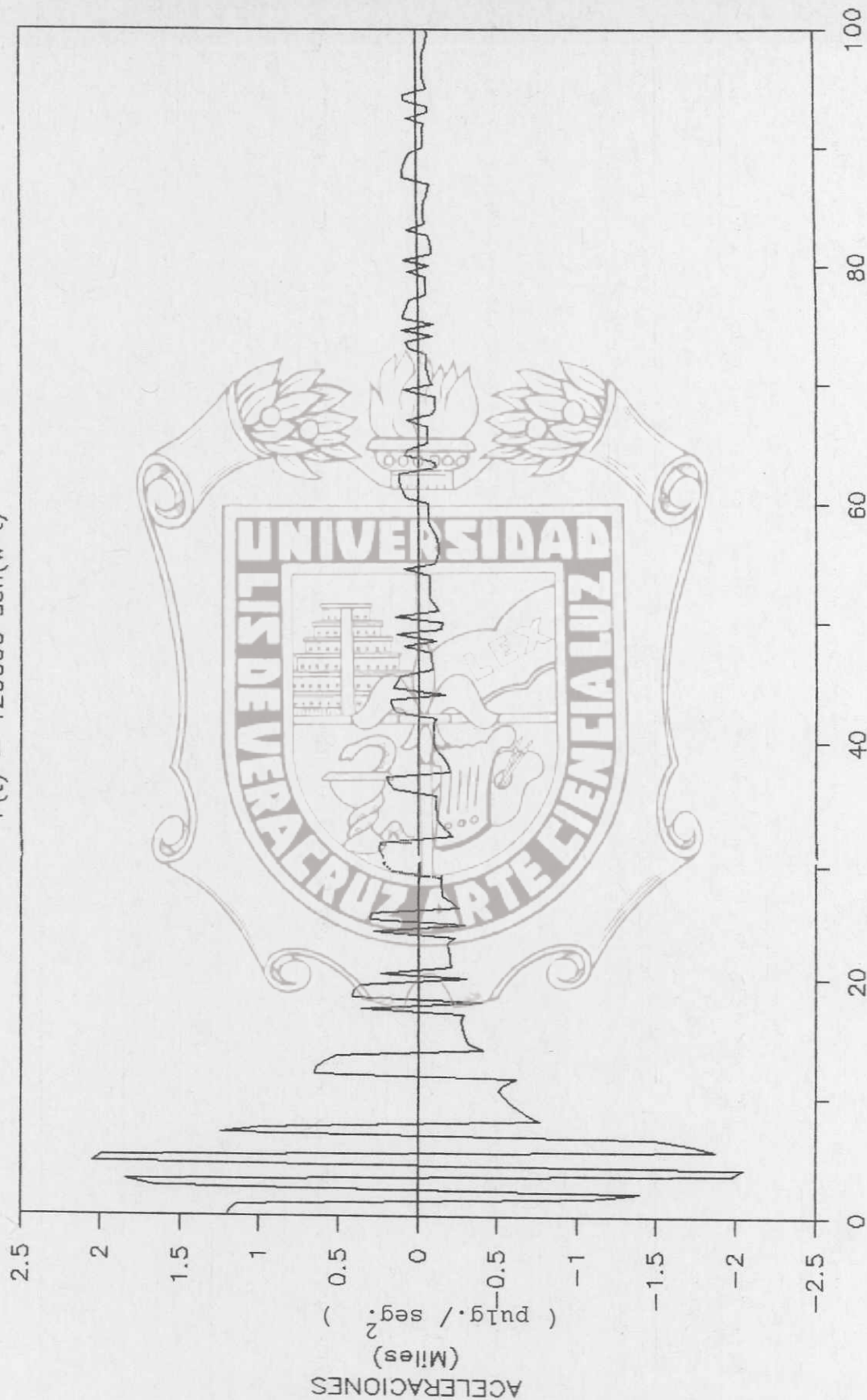
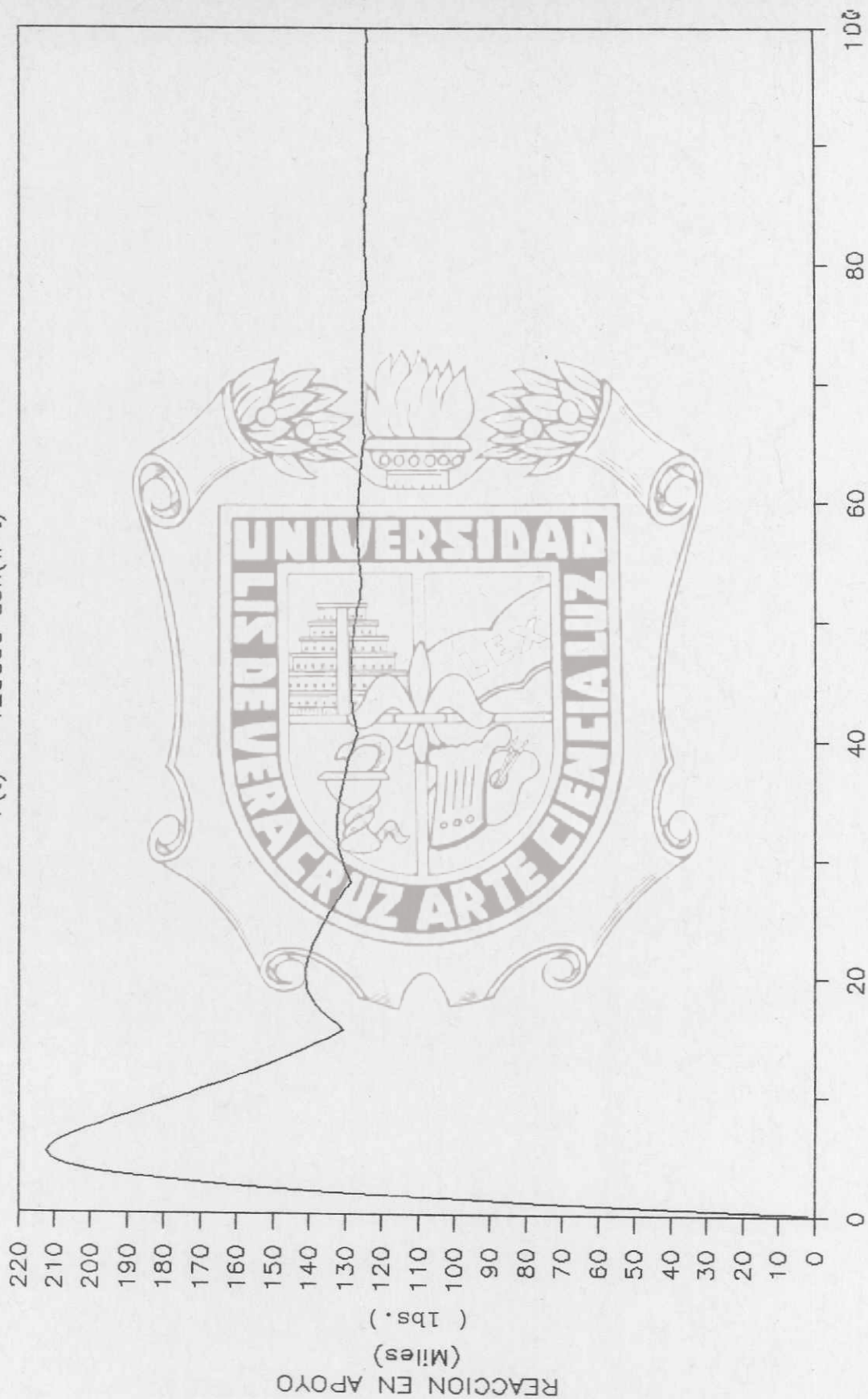


FIGURA No. 4

ESPECTRO DE RESPUESTA

$$F(t) = 120000 * \text{sen}(\bar{\omega} * t)$$



FRECUENCIAS ( hertz )

FIGURA No. 5

ESPECTRO DE RESPUESTA

$$F(t) = 120000 * \text{sen}(\bar{\omega} * t)$$

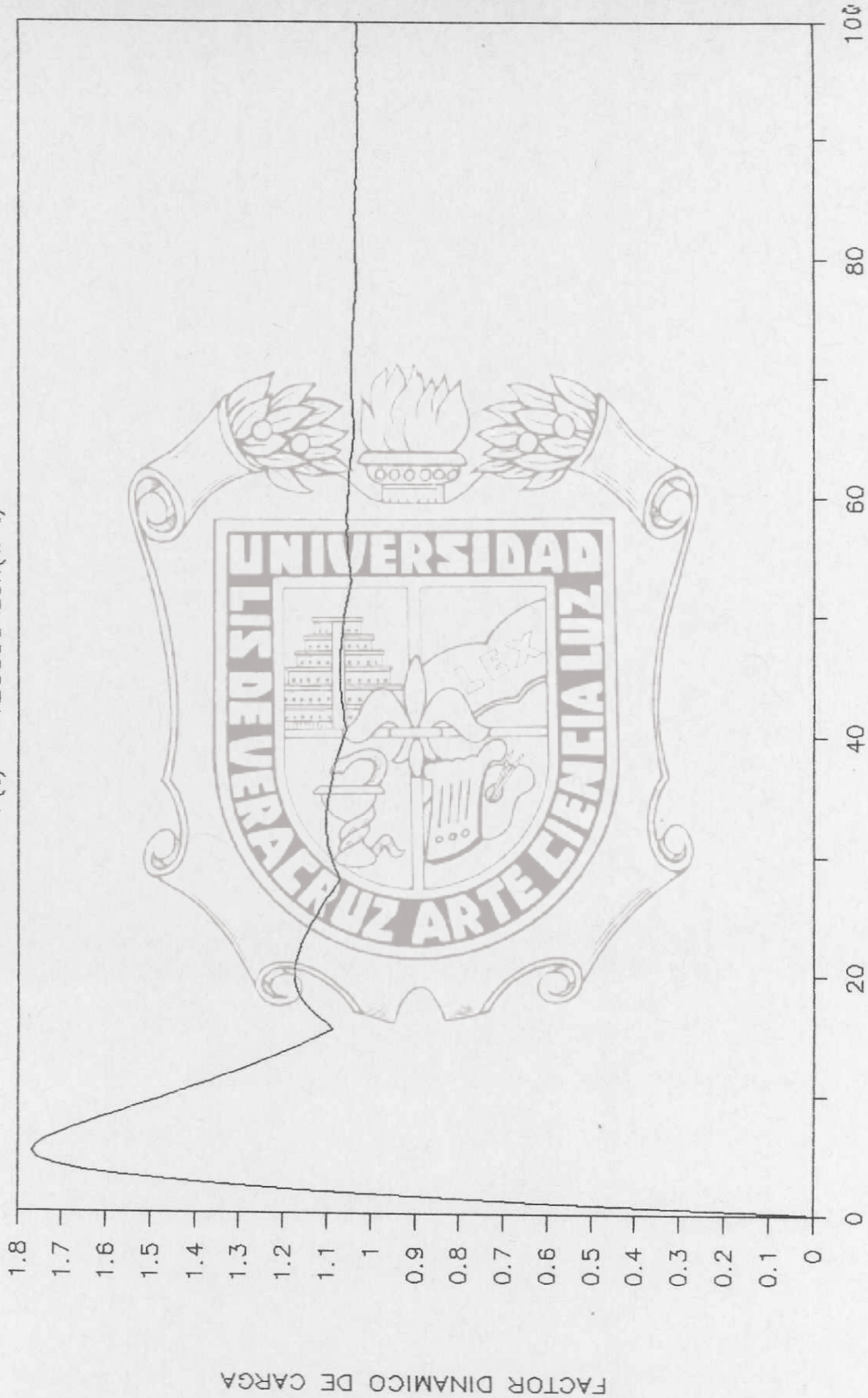


FIGURA No. 6

GRAFICA FUERZA - TIEMPO

$$F(t) = 120000 * \text{SEN}(\omega t)$$



TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 7

GRAFICA DESPLAZAMIENTO - TIEMPO

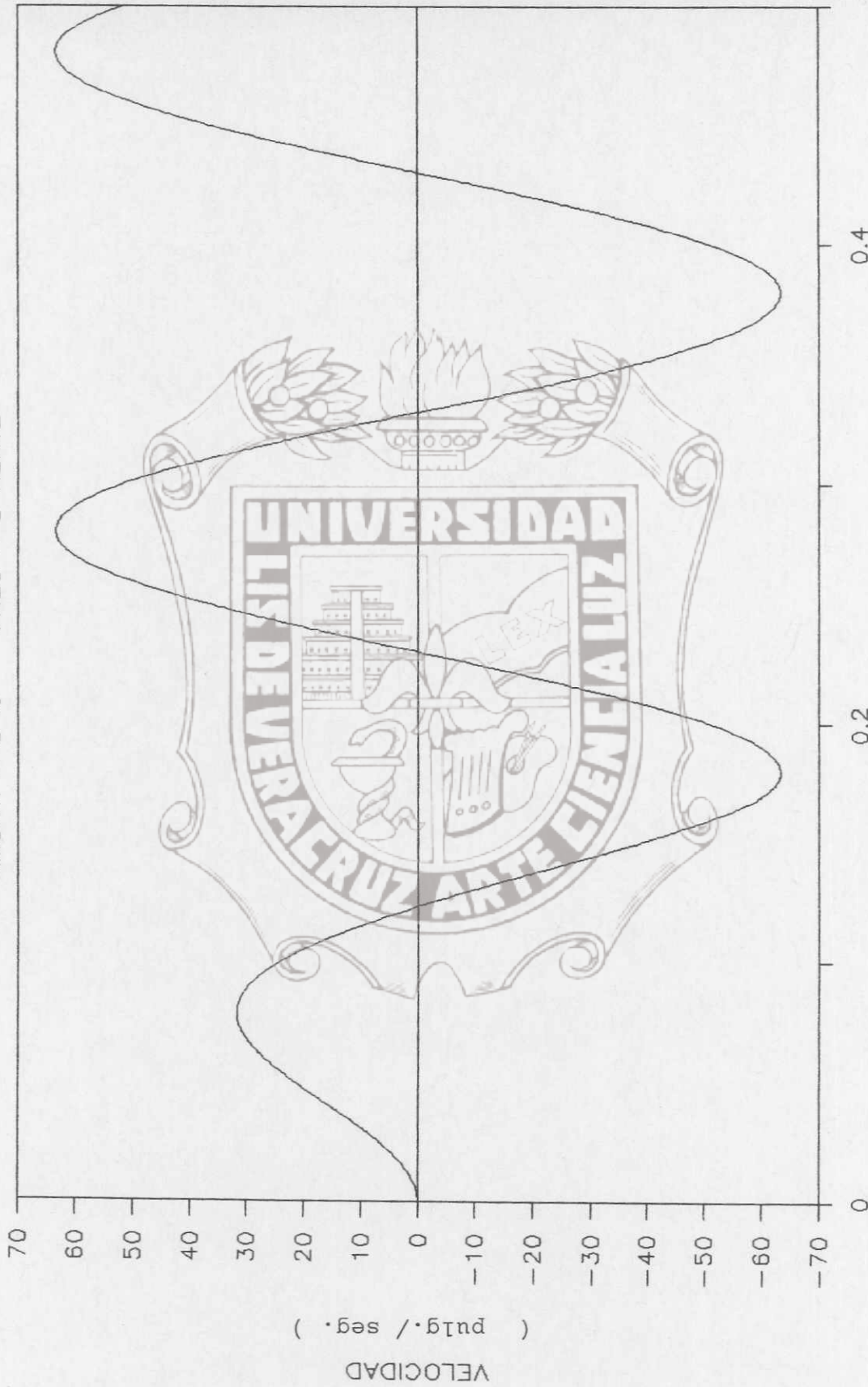
AMORTI = 0 %      FREQ = 5 HERTZ



FIGURA No. 8

GRAFICA VELOCIDAD -- TIEMPO

AMORTI = 0 %    FREC = 5 HERTZ



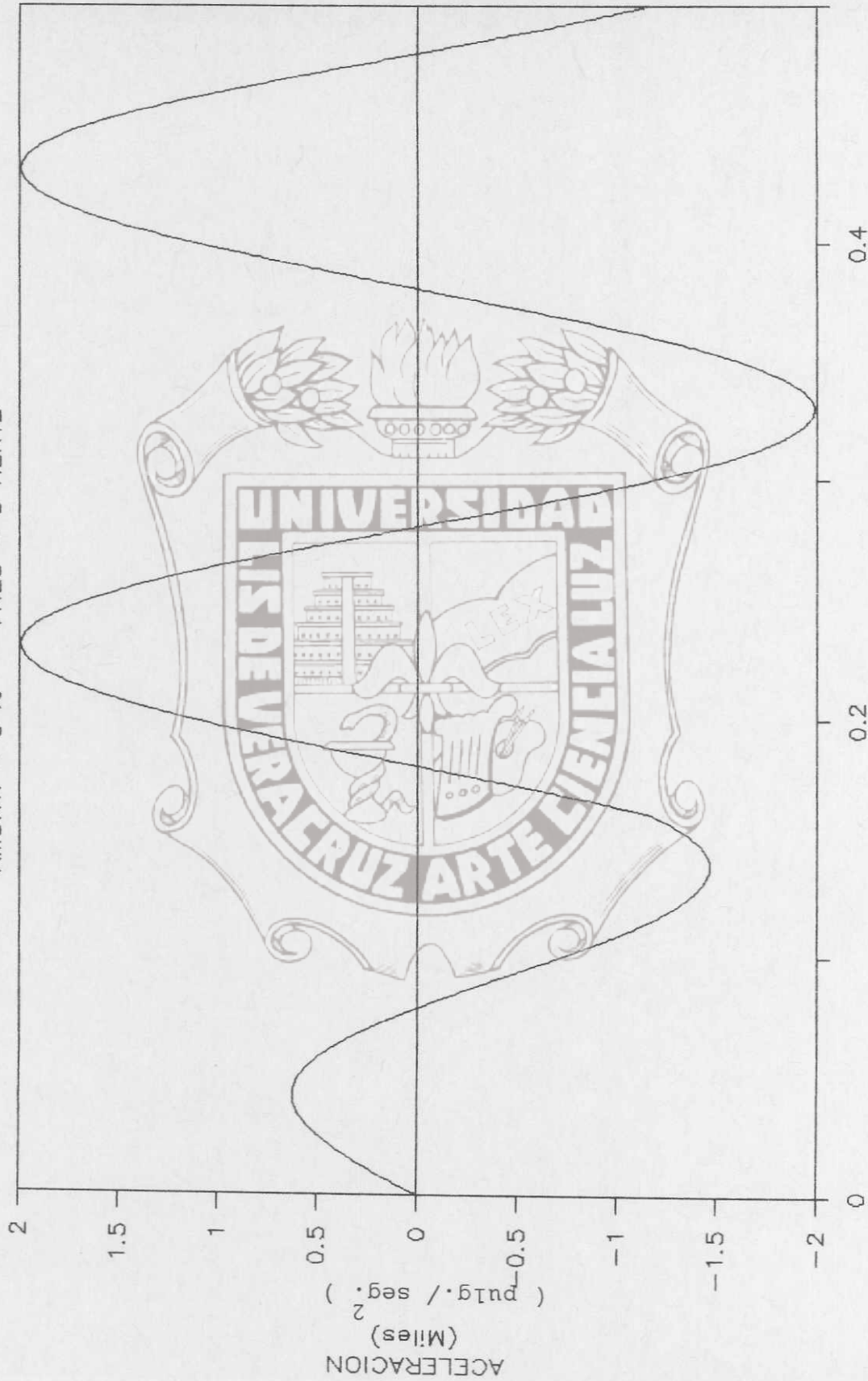
TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 9



GRAFICA ACELERACION - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 5 HERTZ

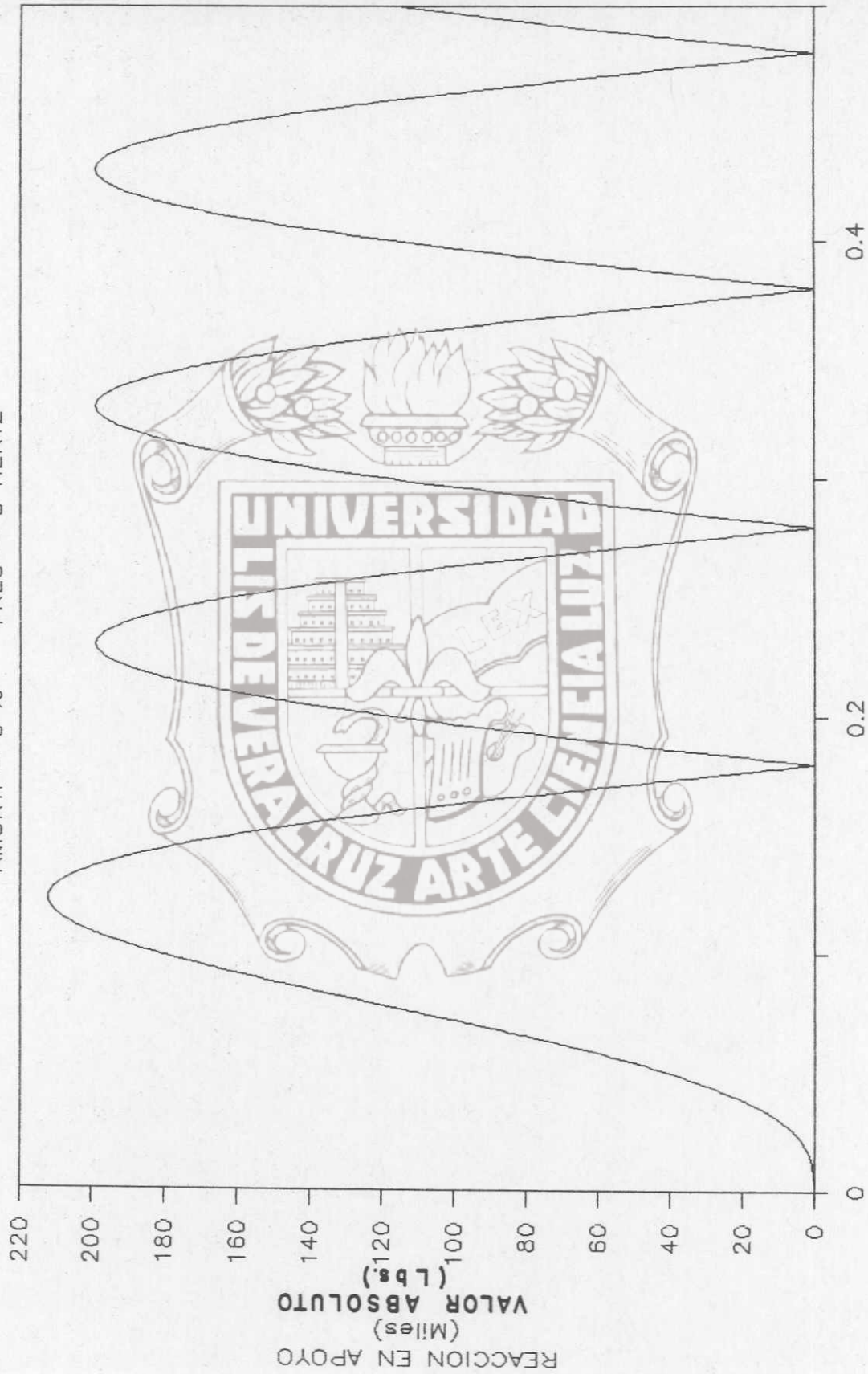


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 10

GRAFICA REACCION EN APOYO - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 5 HERTZ

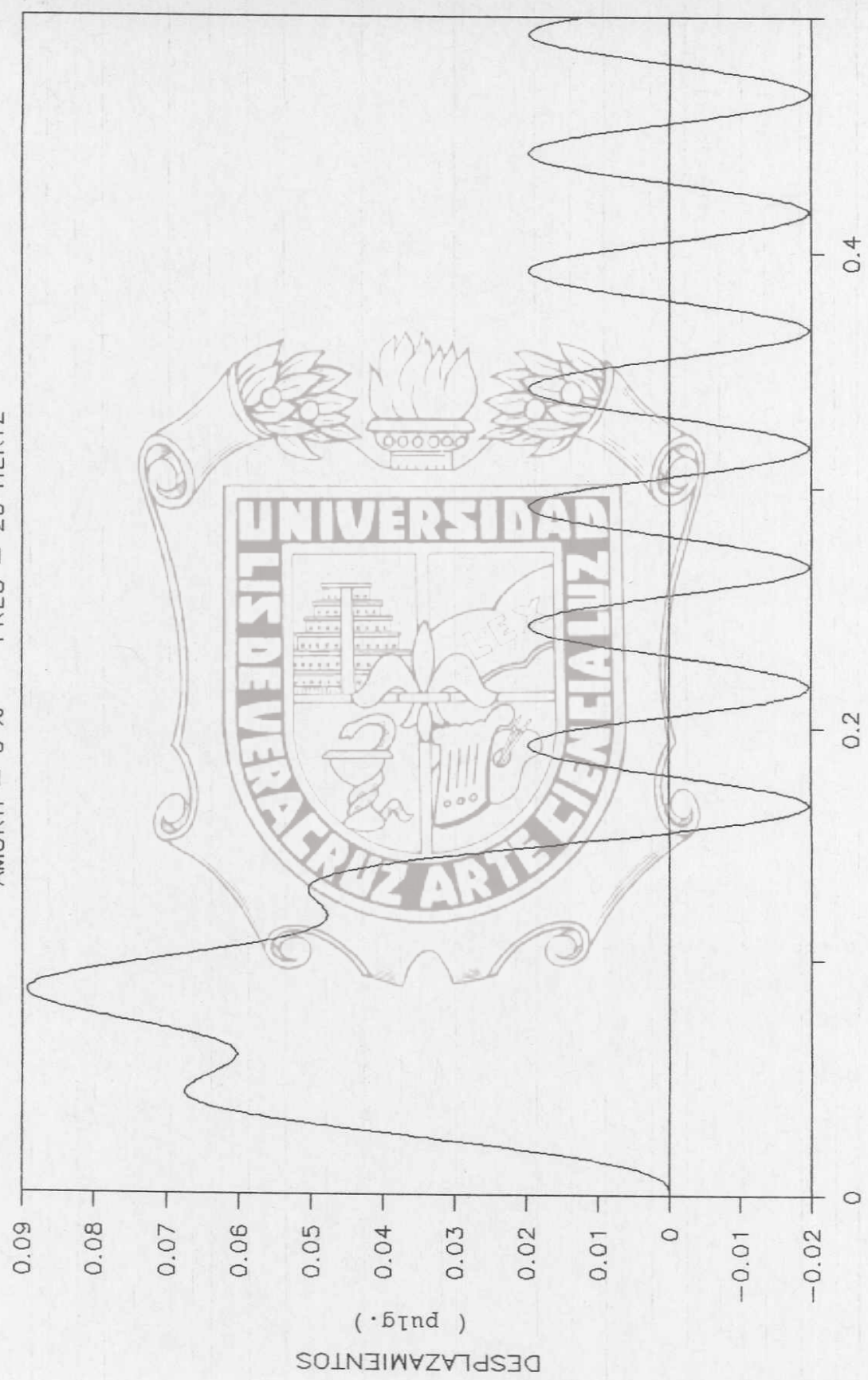


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 11

GRAFICA DESPLAZAMIENTO - TIEMPO

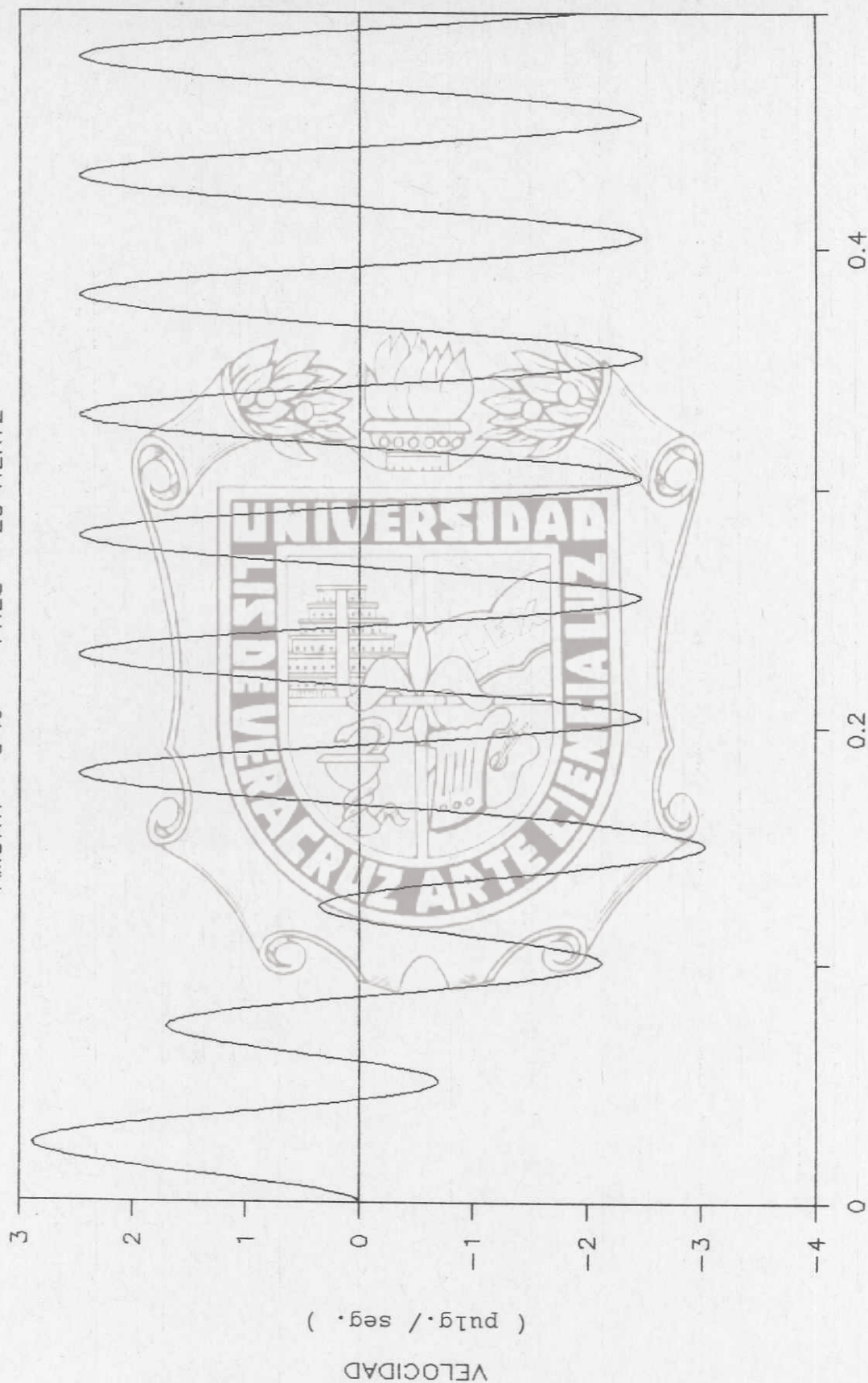
AMORTI = 0 %      FREC = 20 HERTZ



TIEMPO ( seg. )  
FIGURA No. 12

GRAFICA VELOCIDAD - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 20 HERTZ

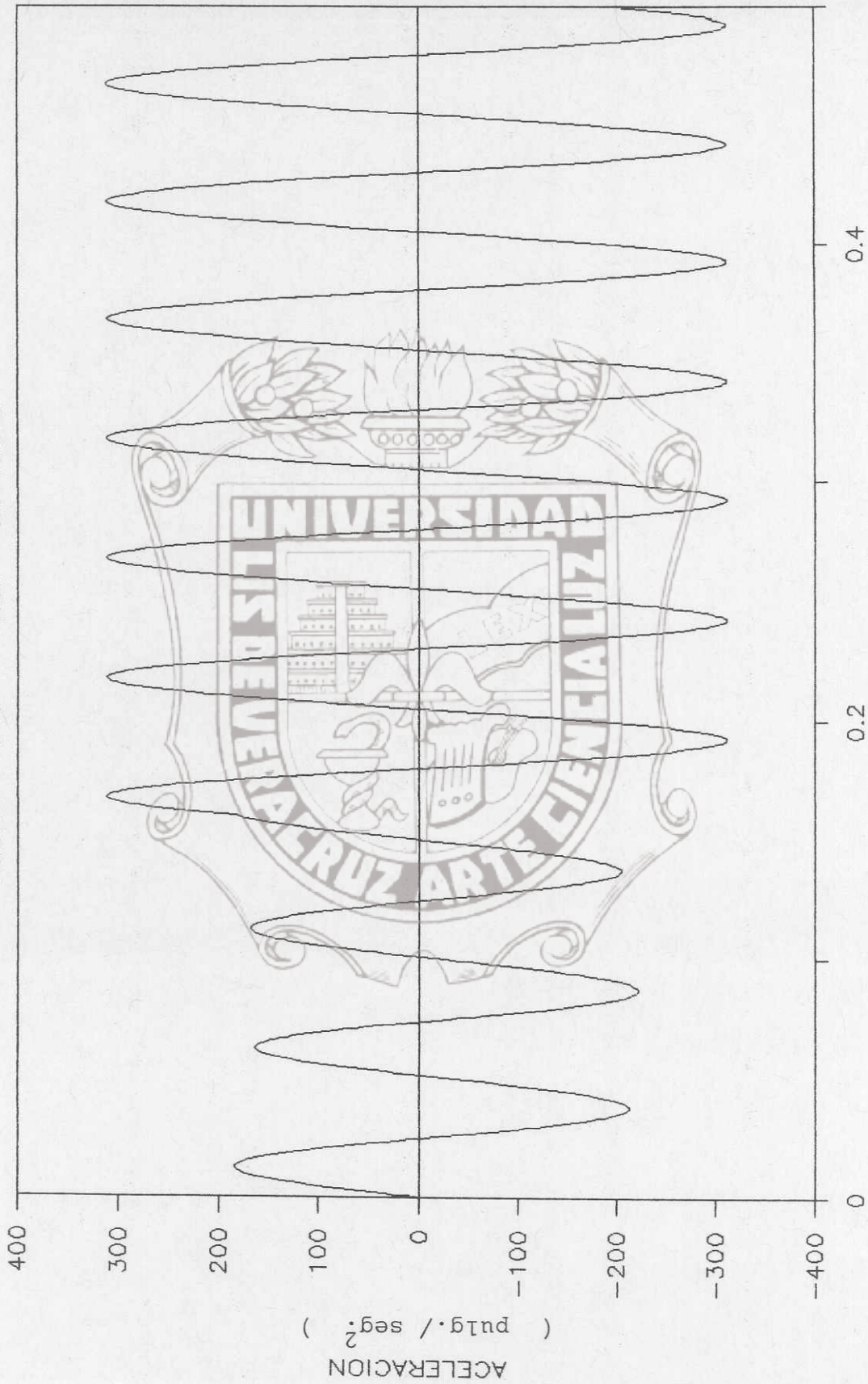


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 13

GRAFICA ACELERACION - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 20 HERTZ



TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 14

GRAFICA REACCION EN APOYO - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 20 HERTZ

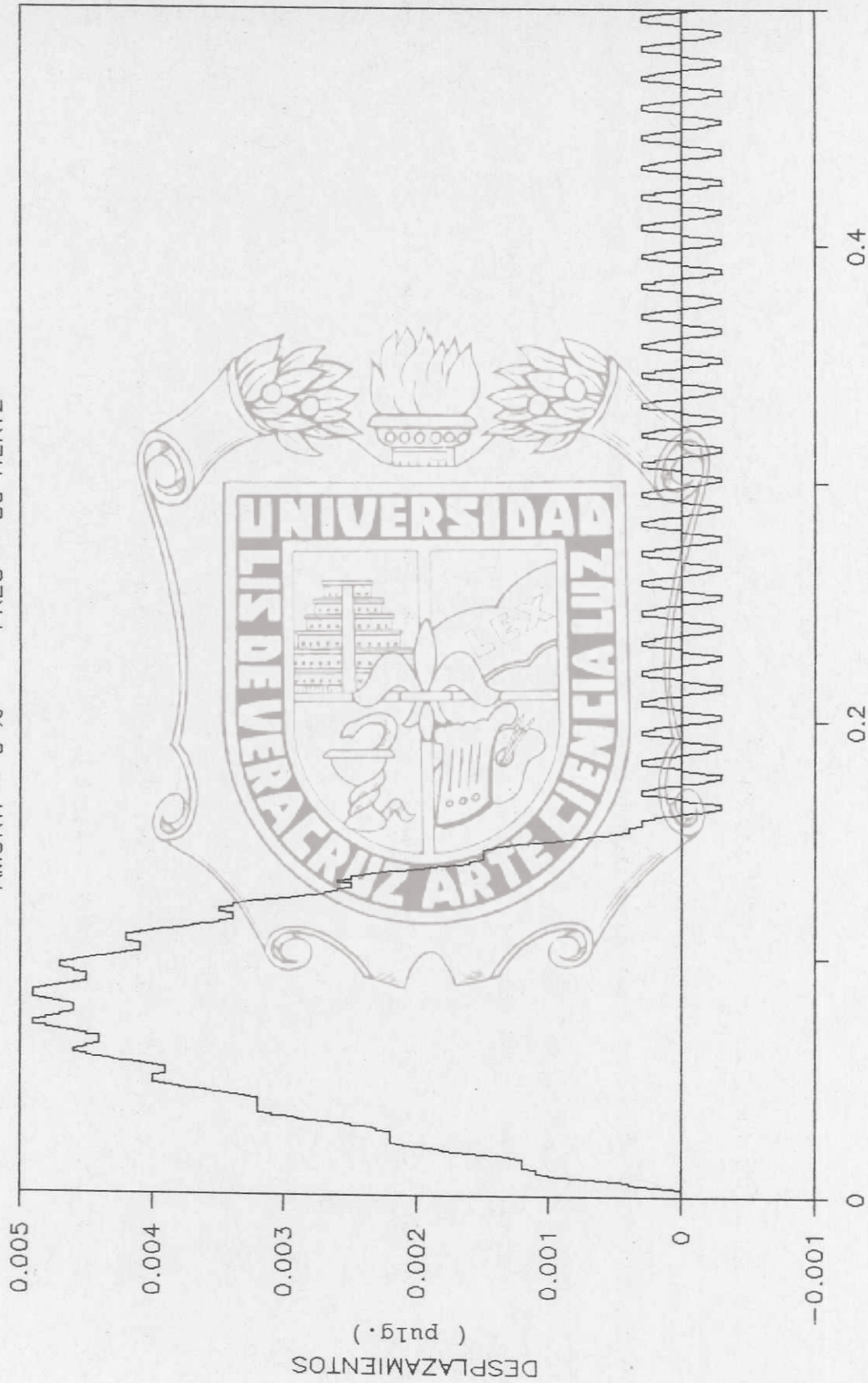


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 15

GRAFICA DESPLAZAMIENTO - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREC = 80 HERTZ

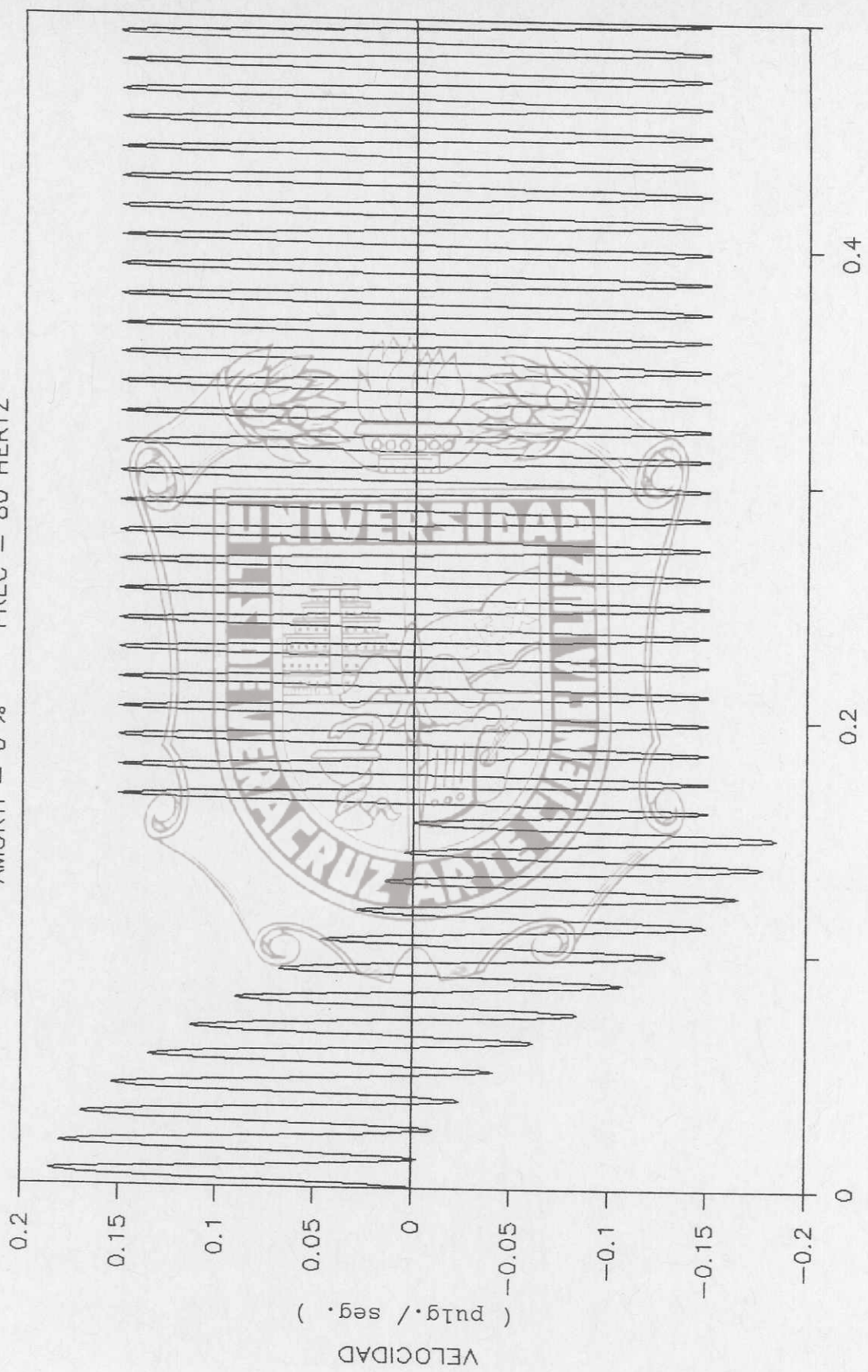


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 16

GRAFICA VELOCIDAD -- TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 80 HERTZ



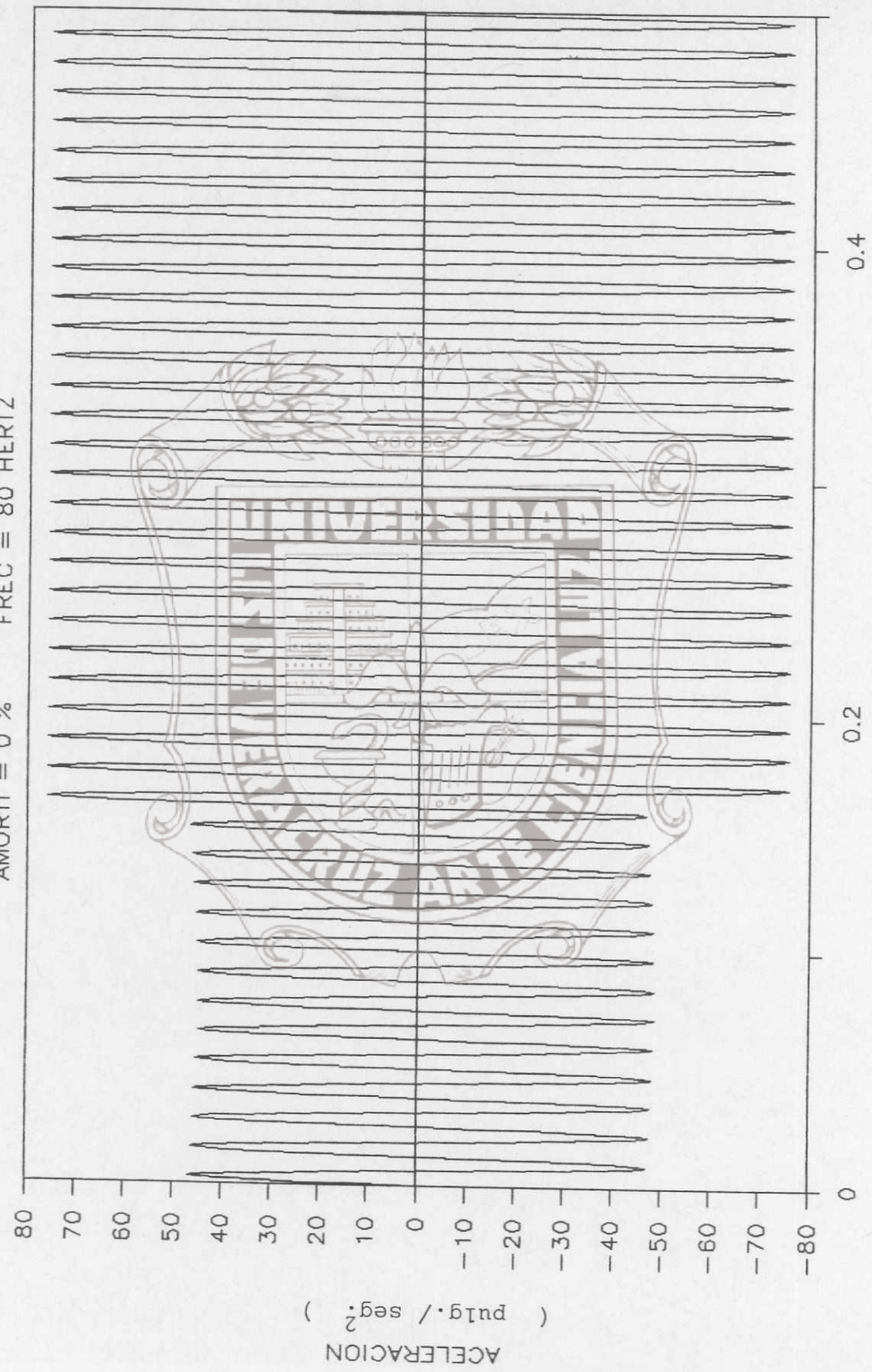
TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 17



GRAFICA ACELERACION - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREQ = 80 HERTZ

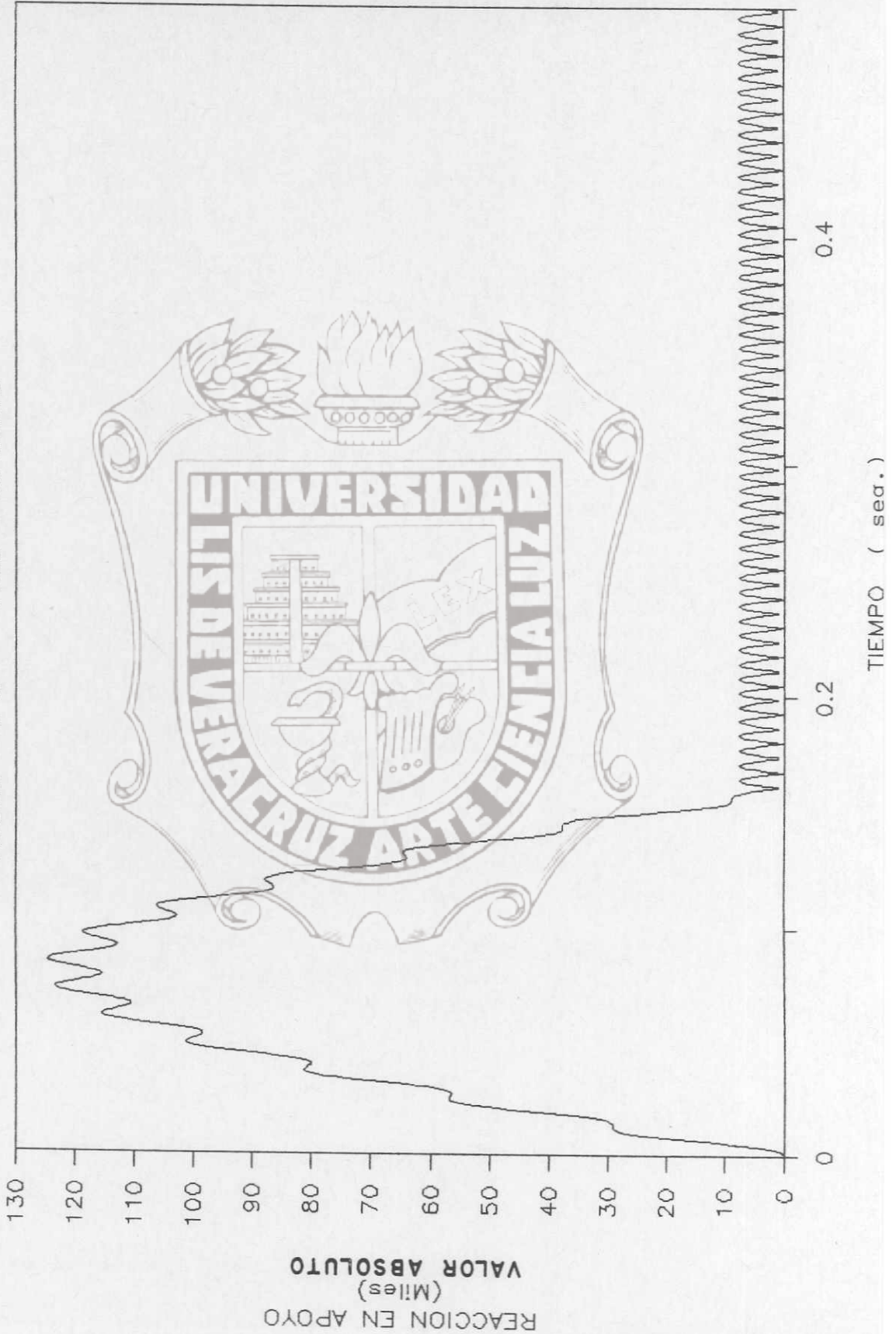


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 18

GRAFICA REACCION EN APOYO - TIEMPO

AMORTI = 0 %      FREC = 80 HERTZ



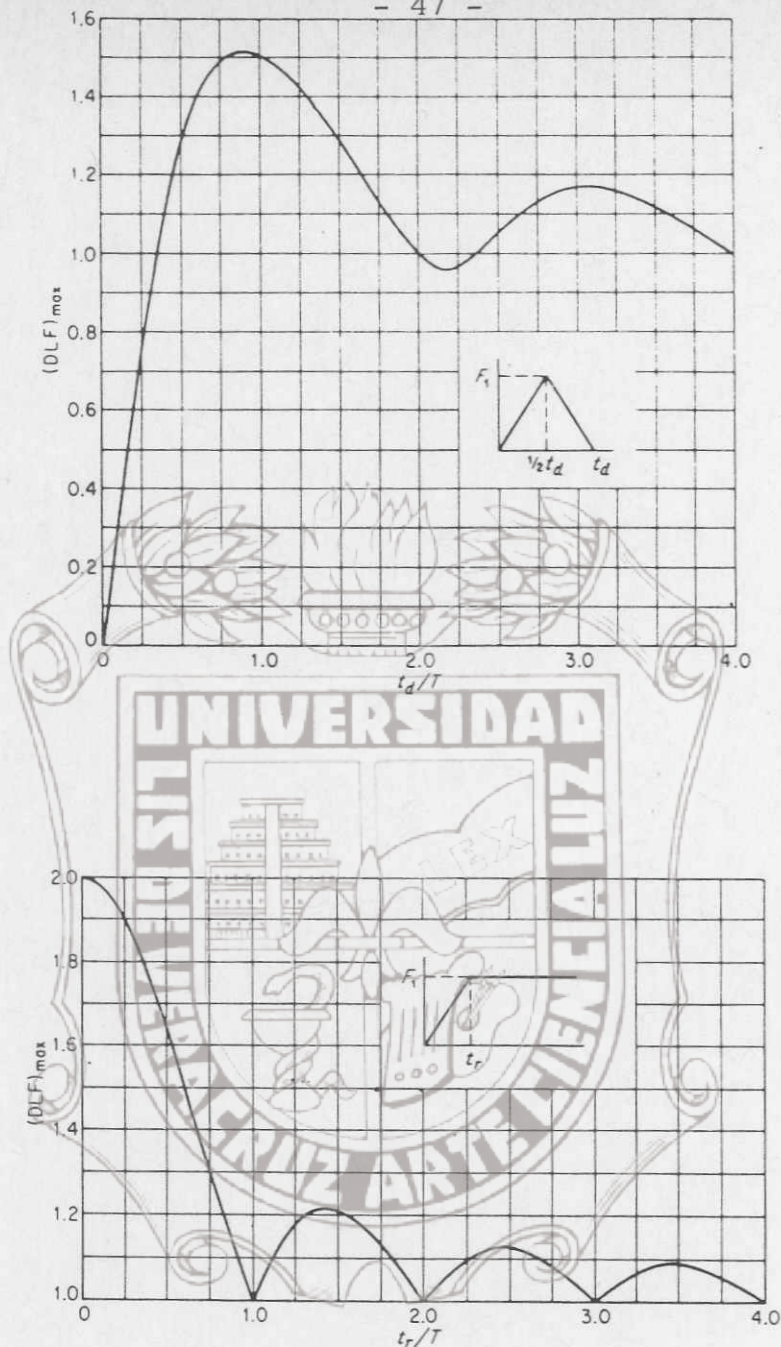


FIGURA No. 20

ESPECTROS DE RESPUESTA PARA DIFERENTES TIPOS DE FUERZAS

( 1 y 2 )

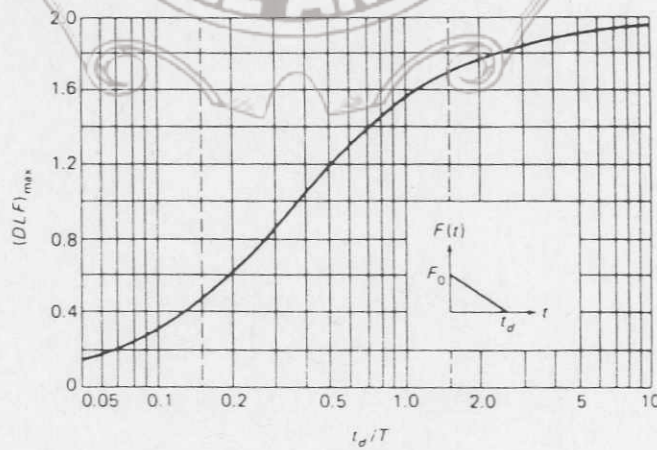
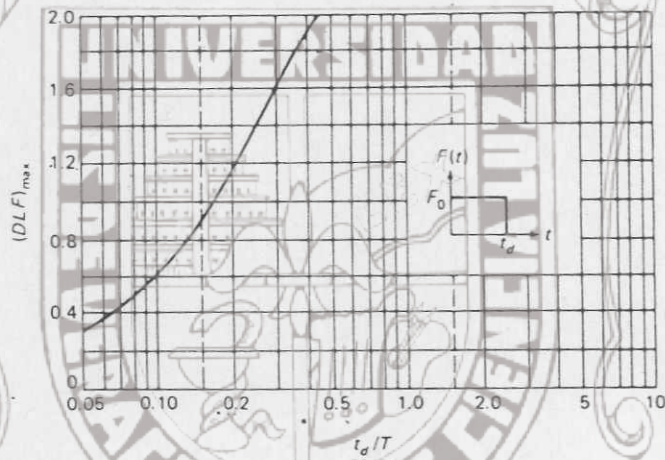
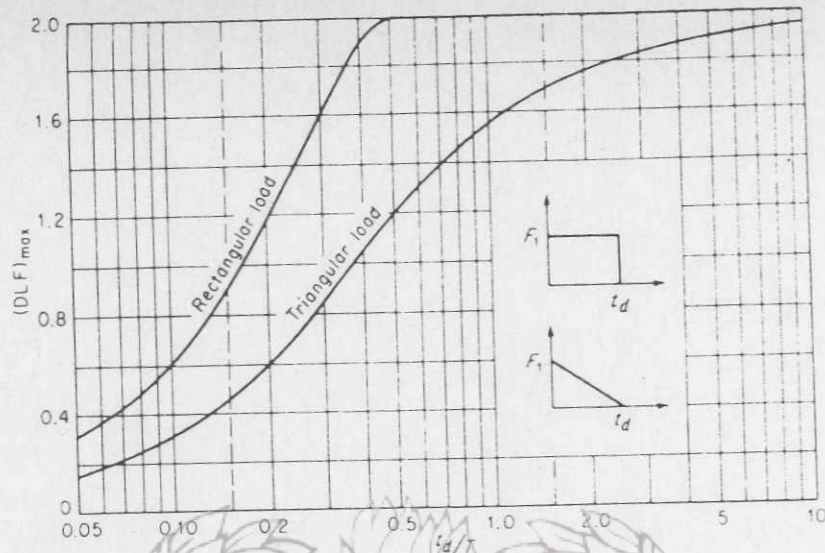


FIGURA No. 20 ( continuación )

ESPECTROS DE RESPUESTA PARA DIFERENTES TIPOS DE FUERZA

EL CENTRO 1940

COMPONENTE NORTE - SUR

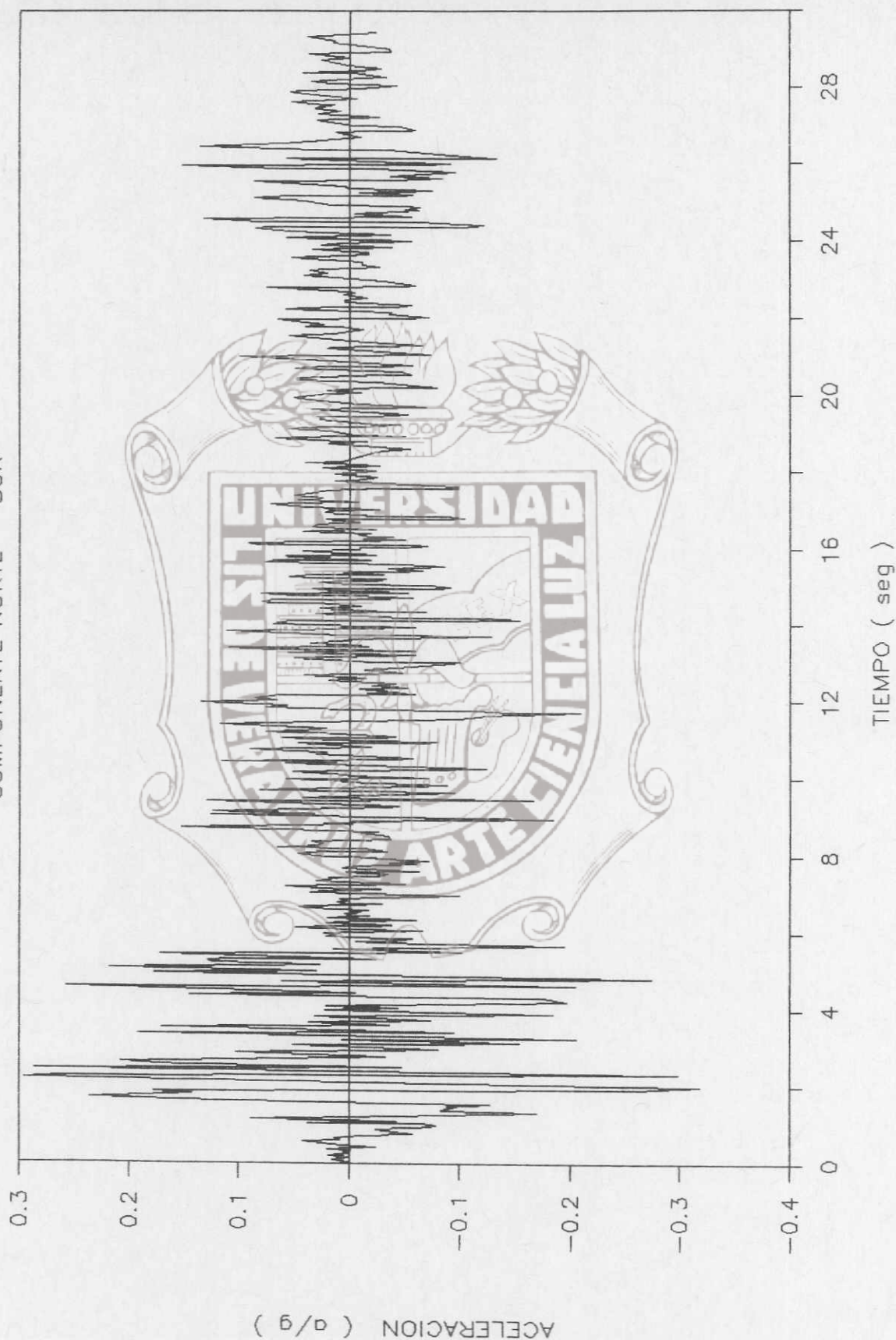


FIGURA No. 21

Tesis de Maestría  
 ACELEROGRAMA

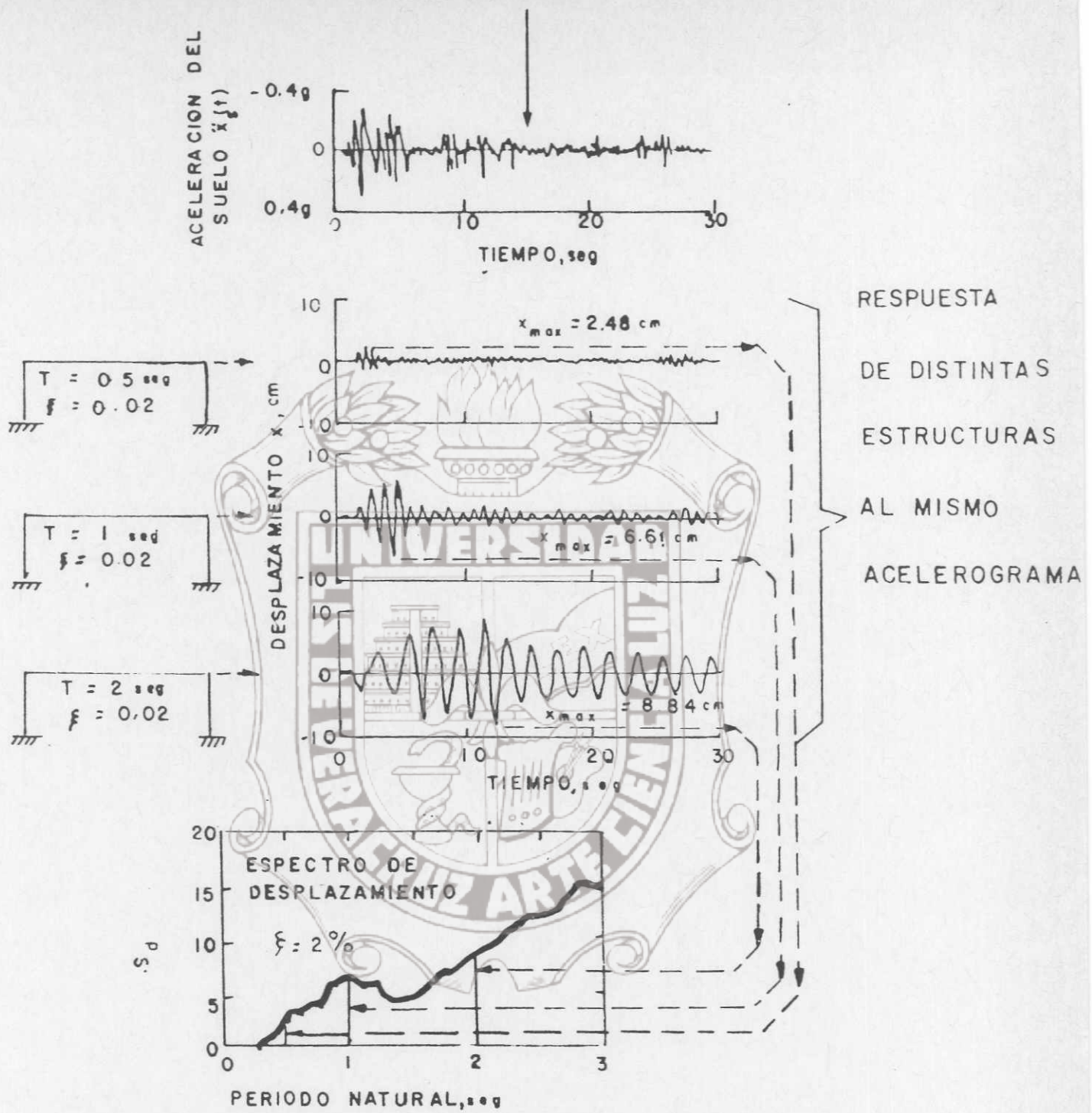


FIGURA No. 22

CONSTRUCCION DE UN ESPECTRO DE RESPUESTA

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 0 %

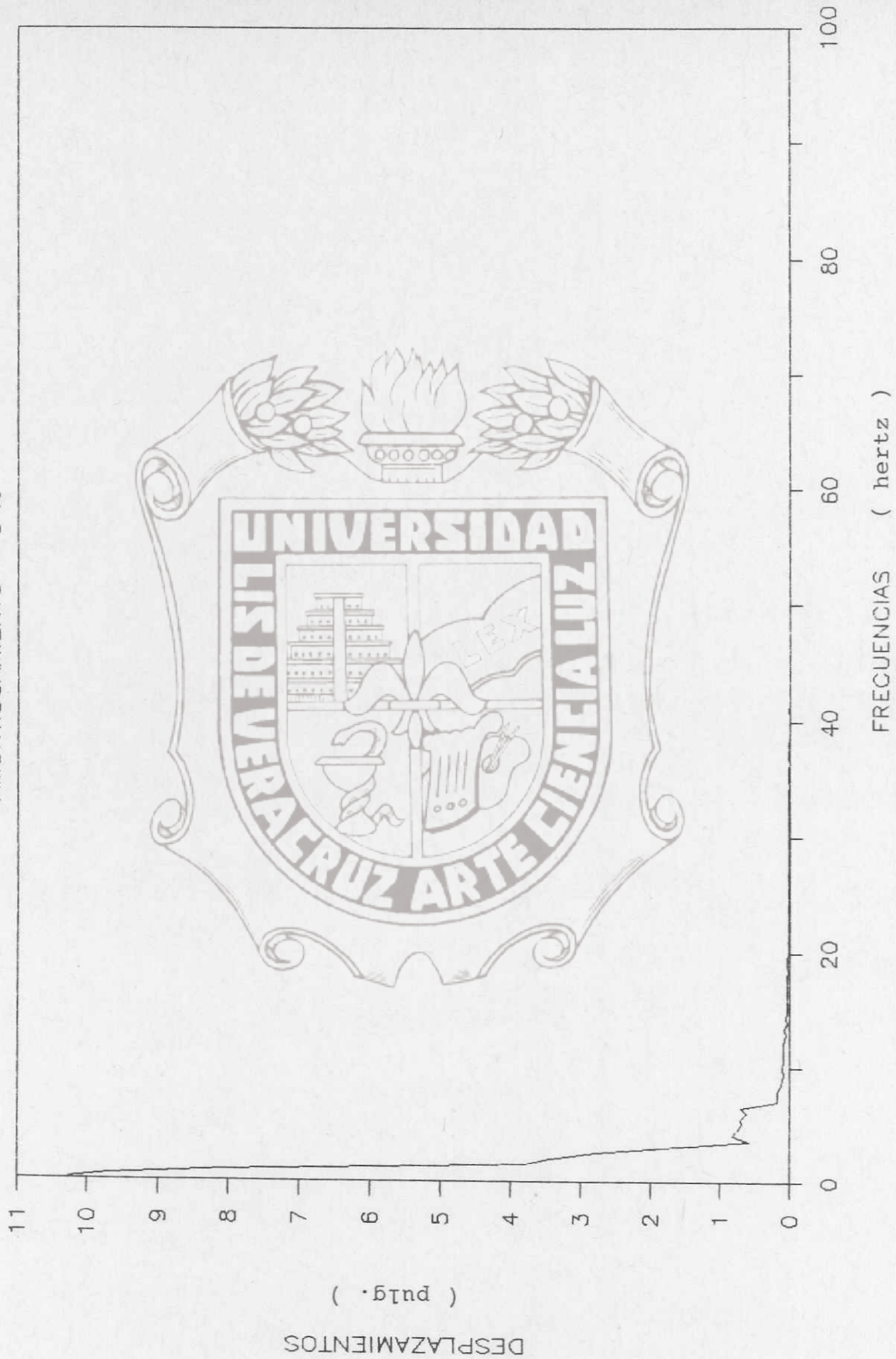


FIGURA No. 23

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 0 %



FIGURA No. 24



ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 0 %

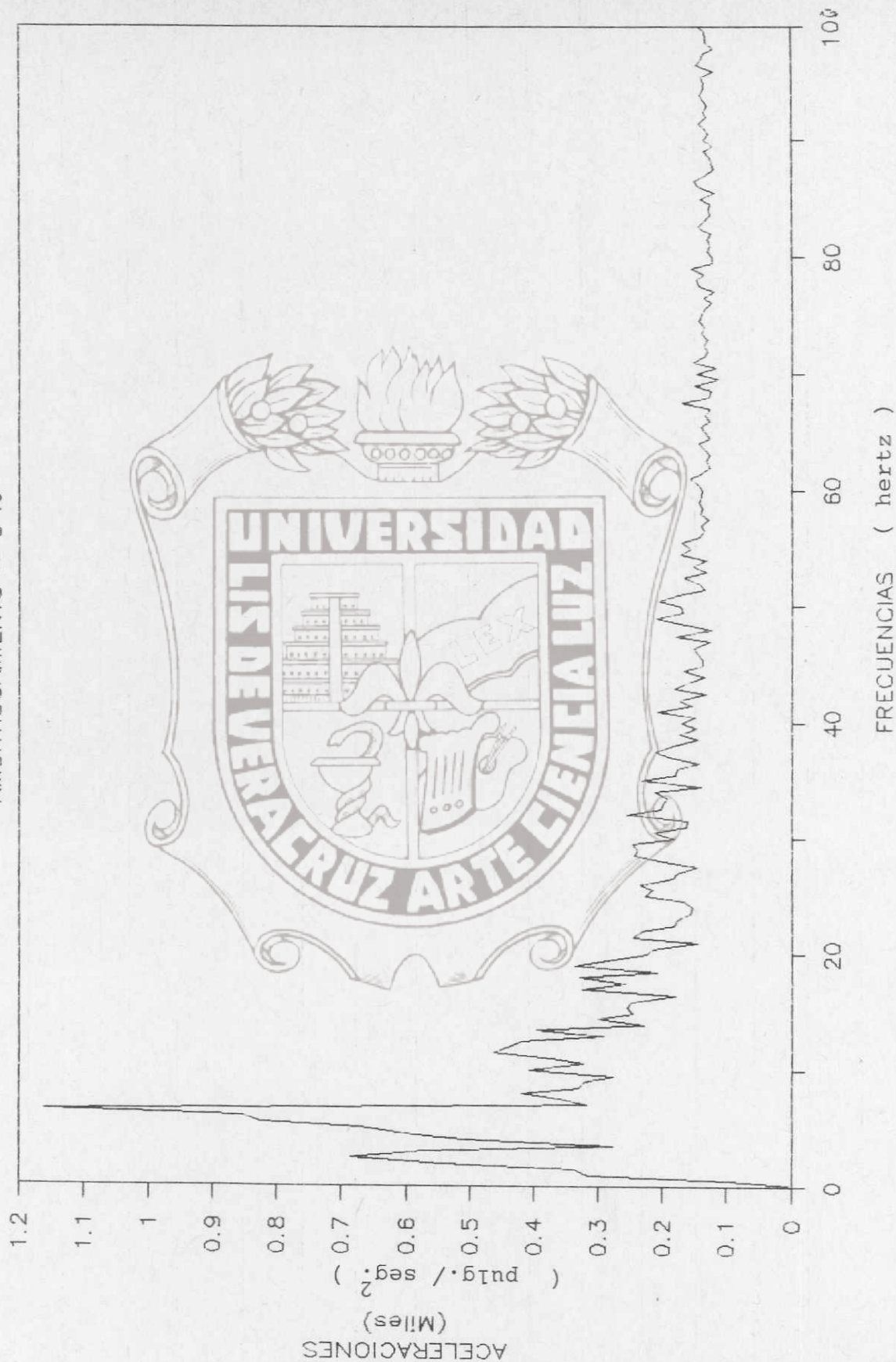


FIGURA No. 25

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 0 %

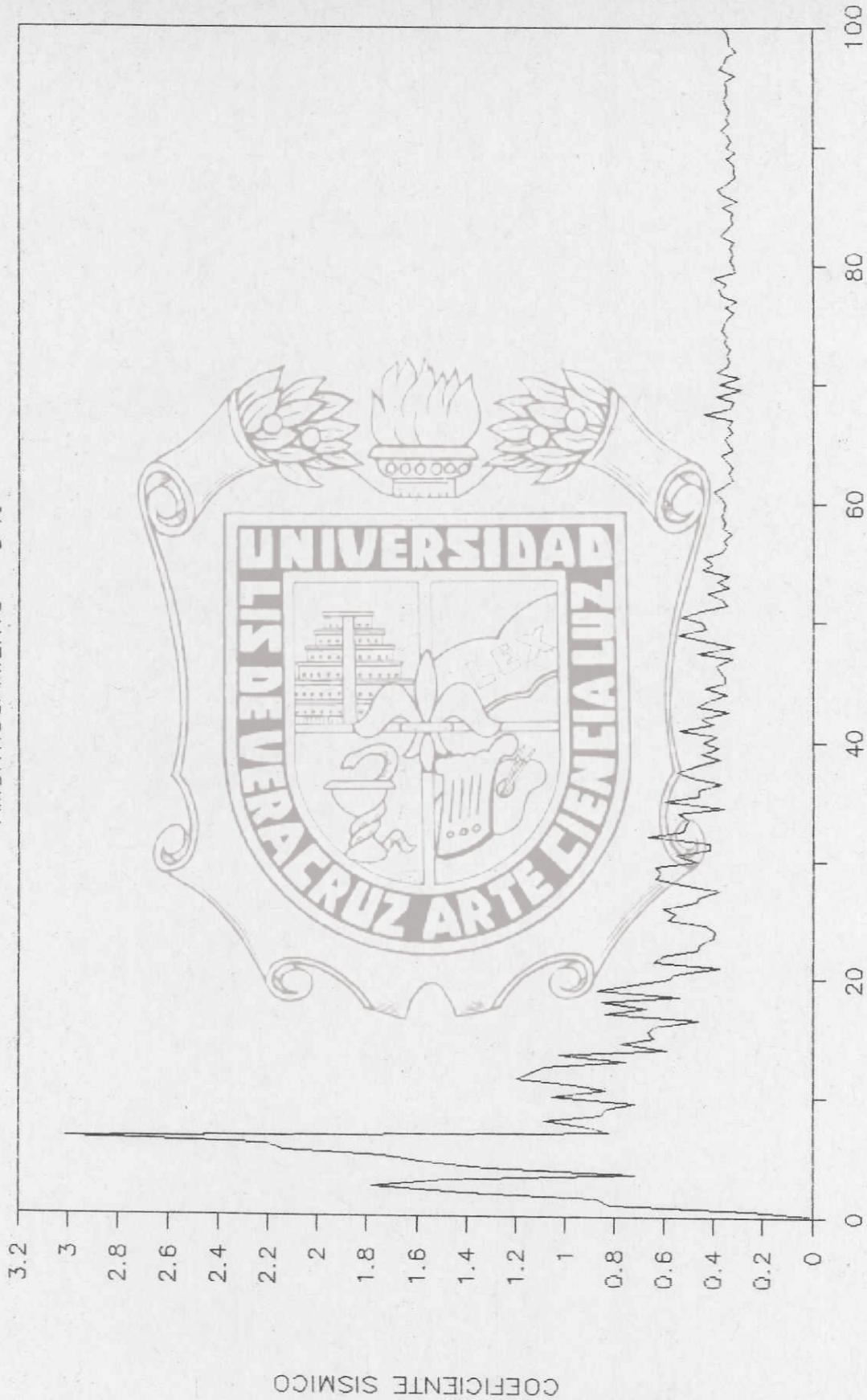


FIGURA No. 26

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 5 %



FIGURA No. 27

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 5 %

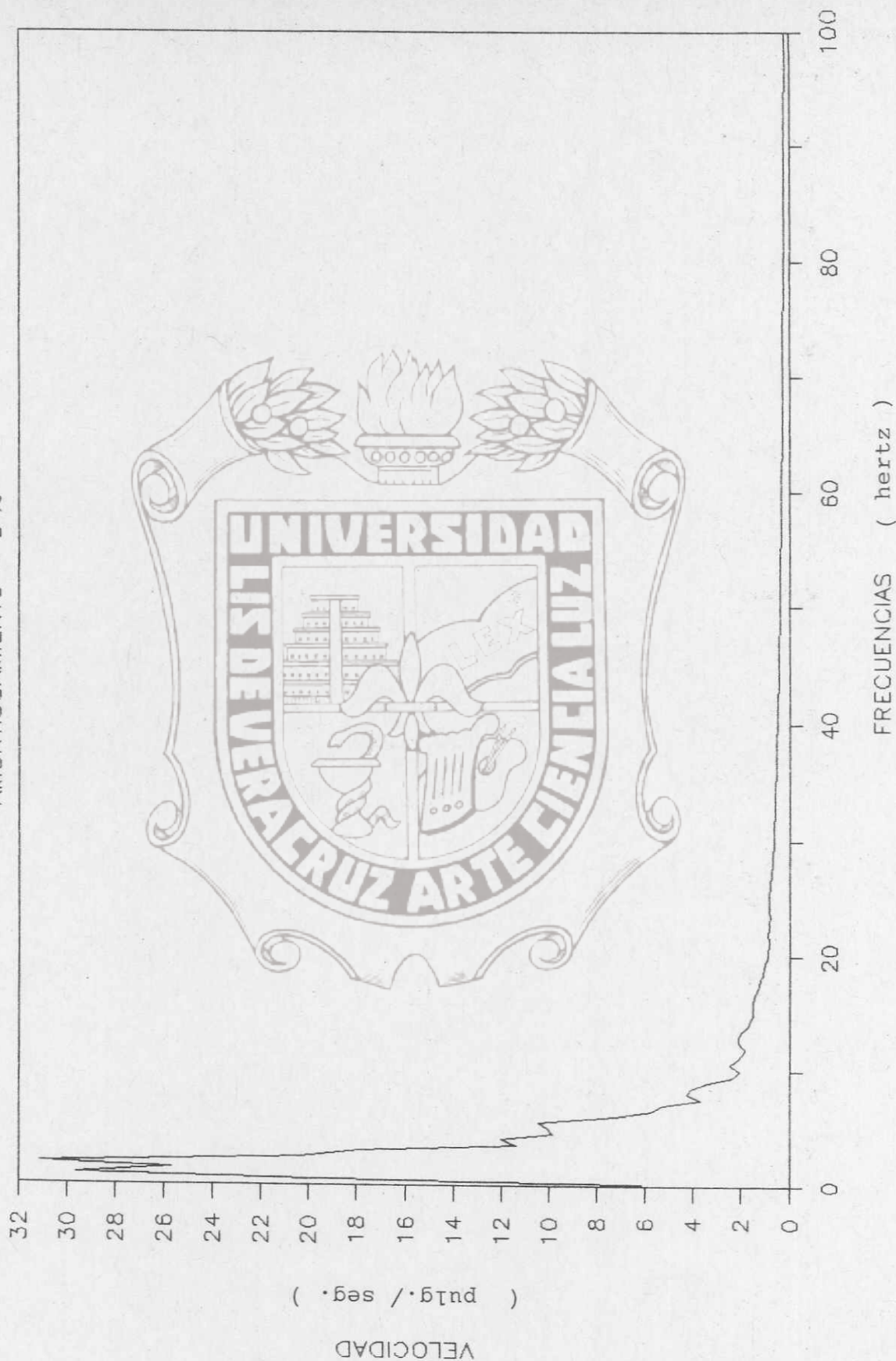


FIGURA No. 28

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 5 %

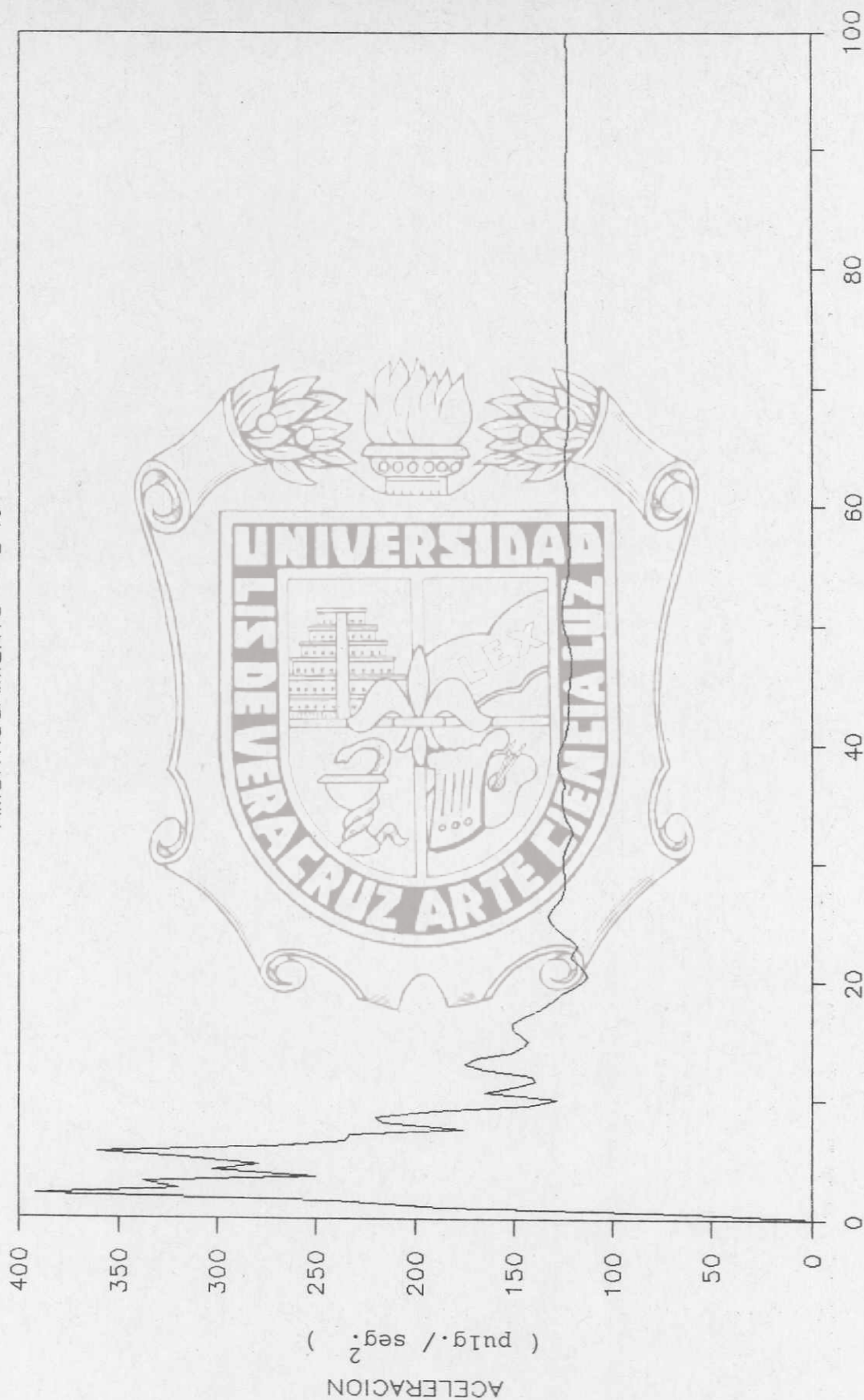


FIGURA No. 29

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 5 %



FIGURA No. 30

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 10 %

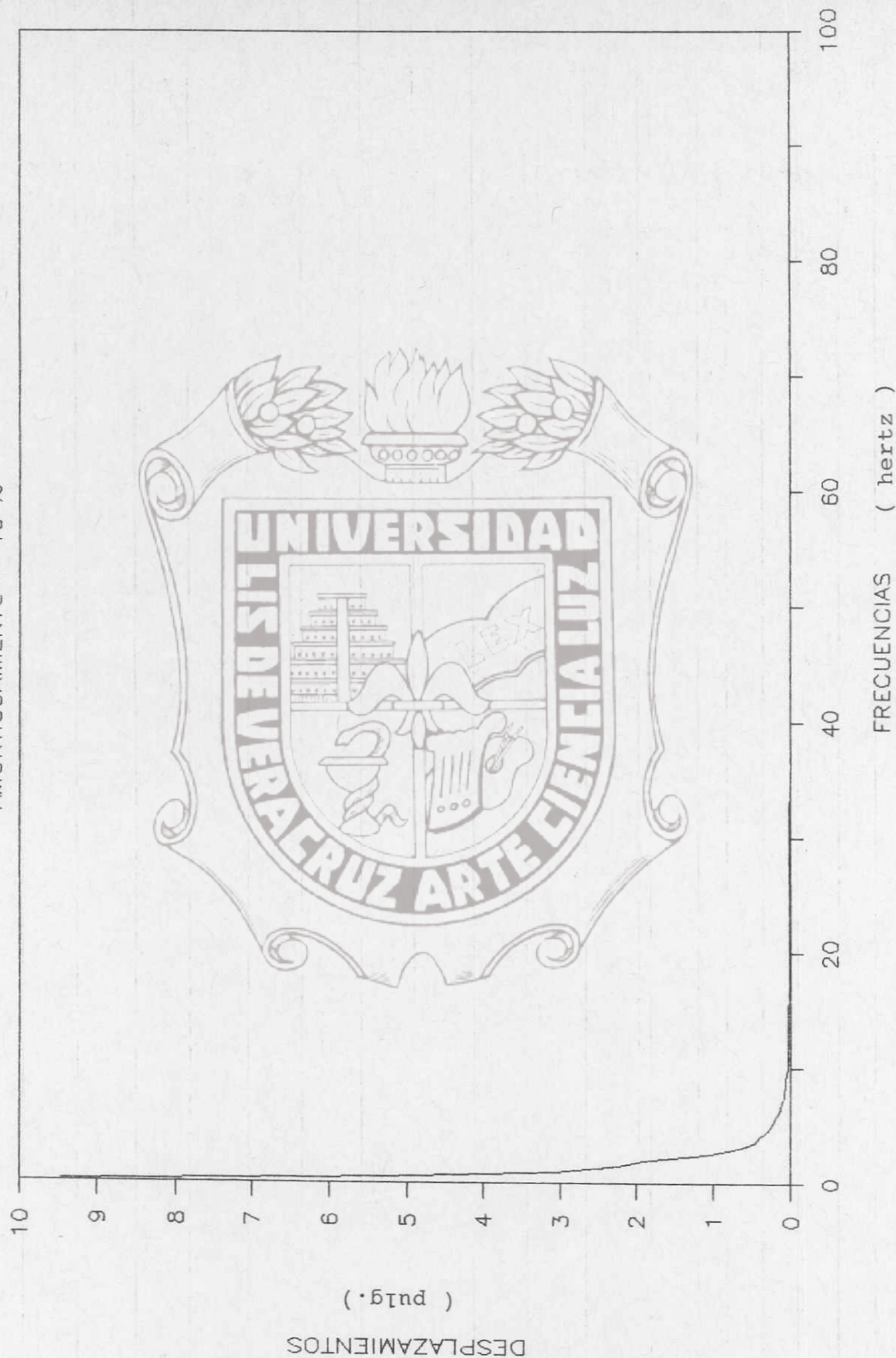


FIGURA No. 31

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 10 %

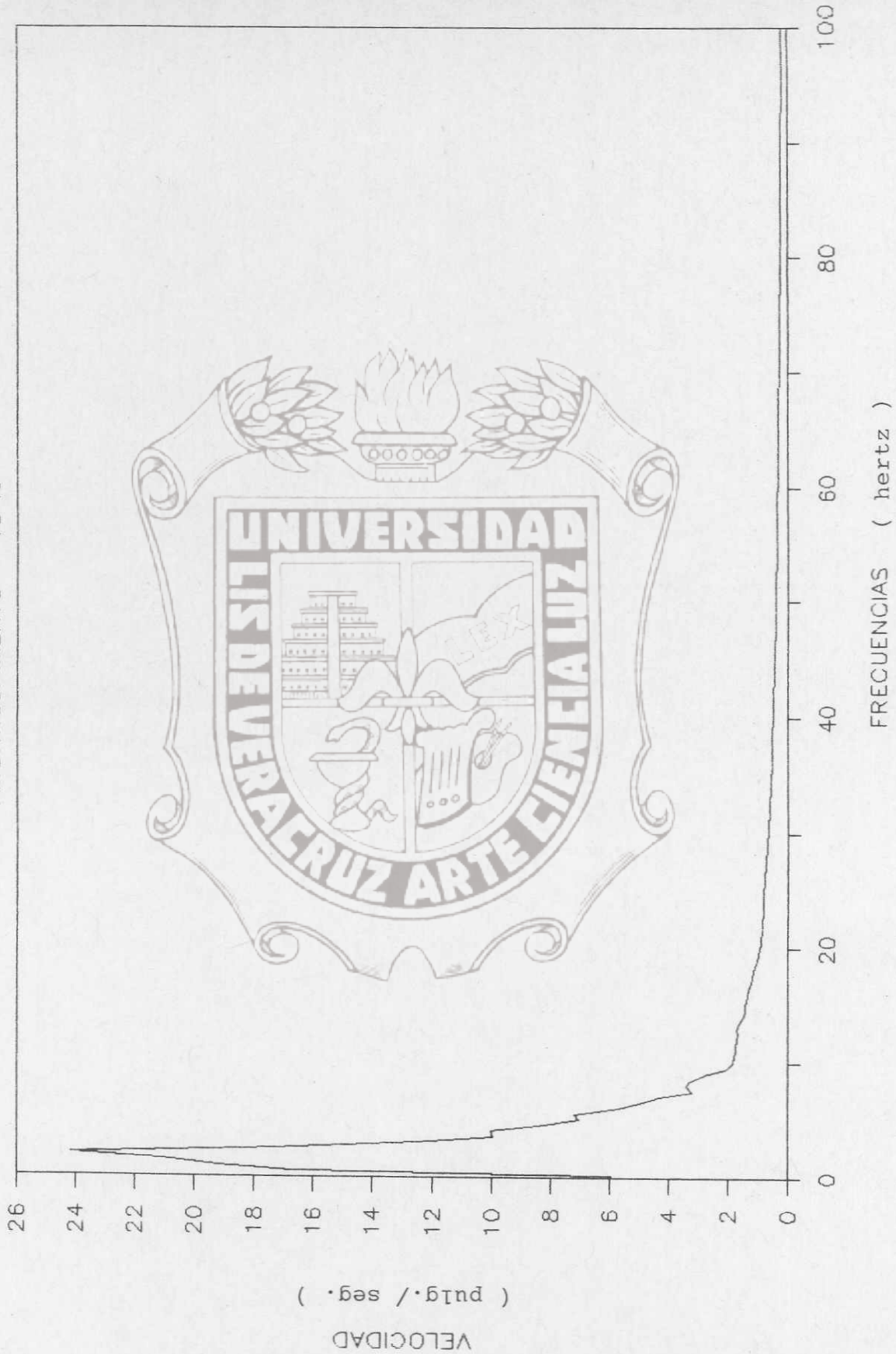


FIGURA No. 32



ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 10 %



FIGURA No. 33

ESPECTRO DE RESPUESTA EL CENTRO 1940

AMORTIGUAMIENTO = 10 %

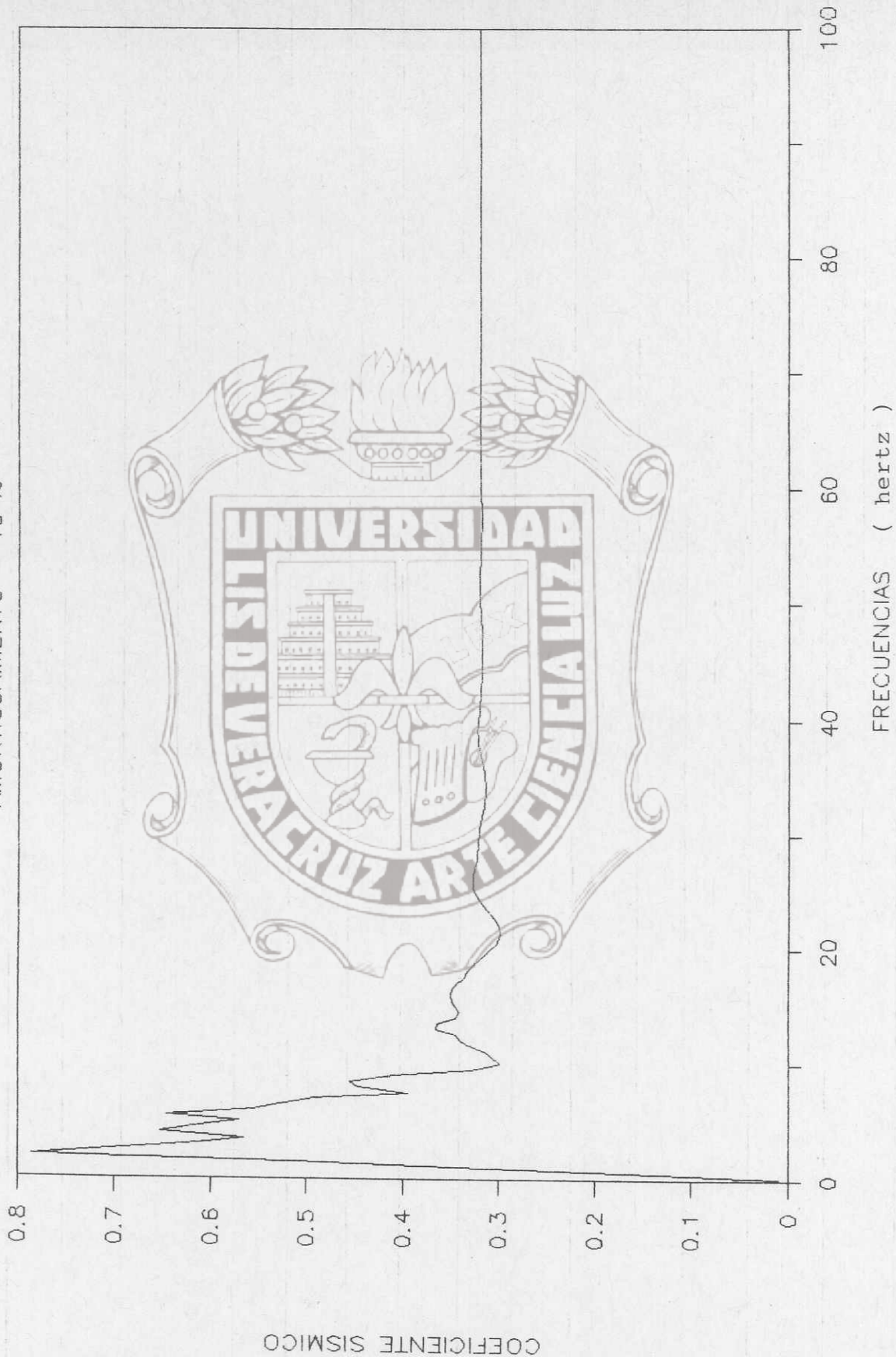


FIGURA No. 34



EL CENTRO 1940

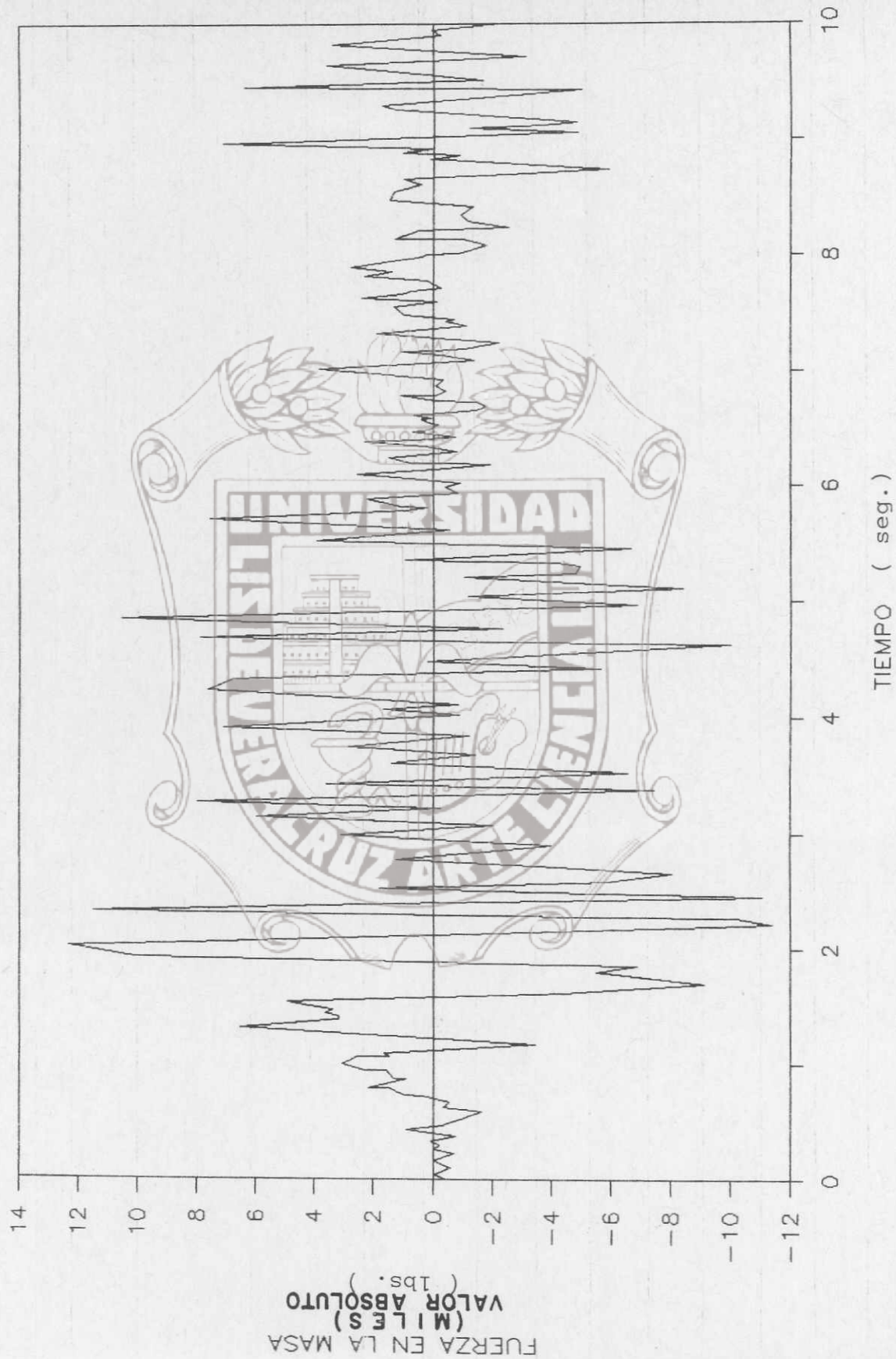


FIGURA No. 36

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ      AMORTI = 0.0 %

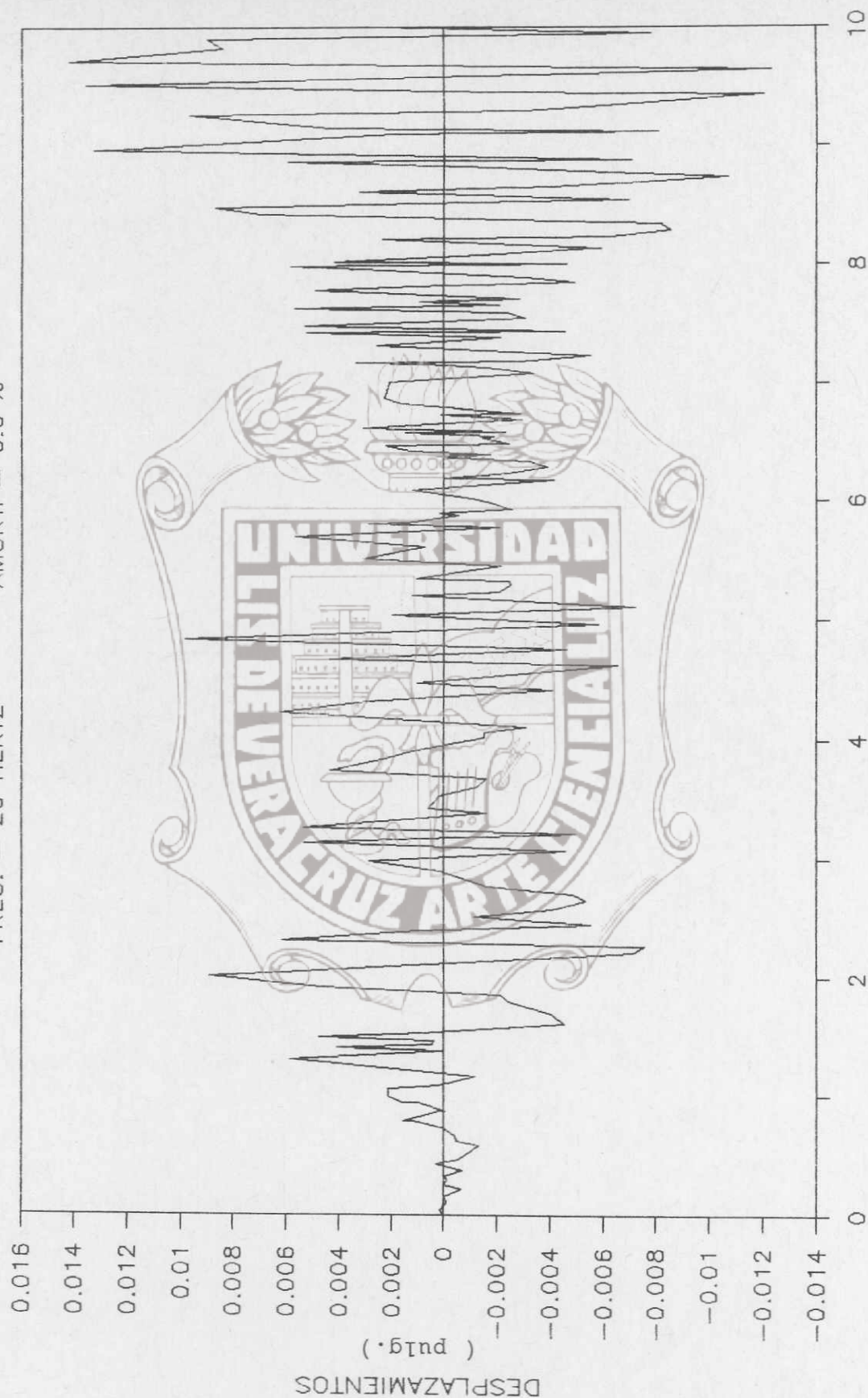


FIGURA No. 37

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ      AMORTI = 0.0 %

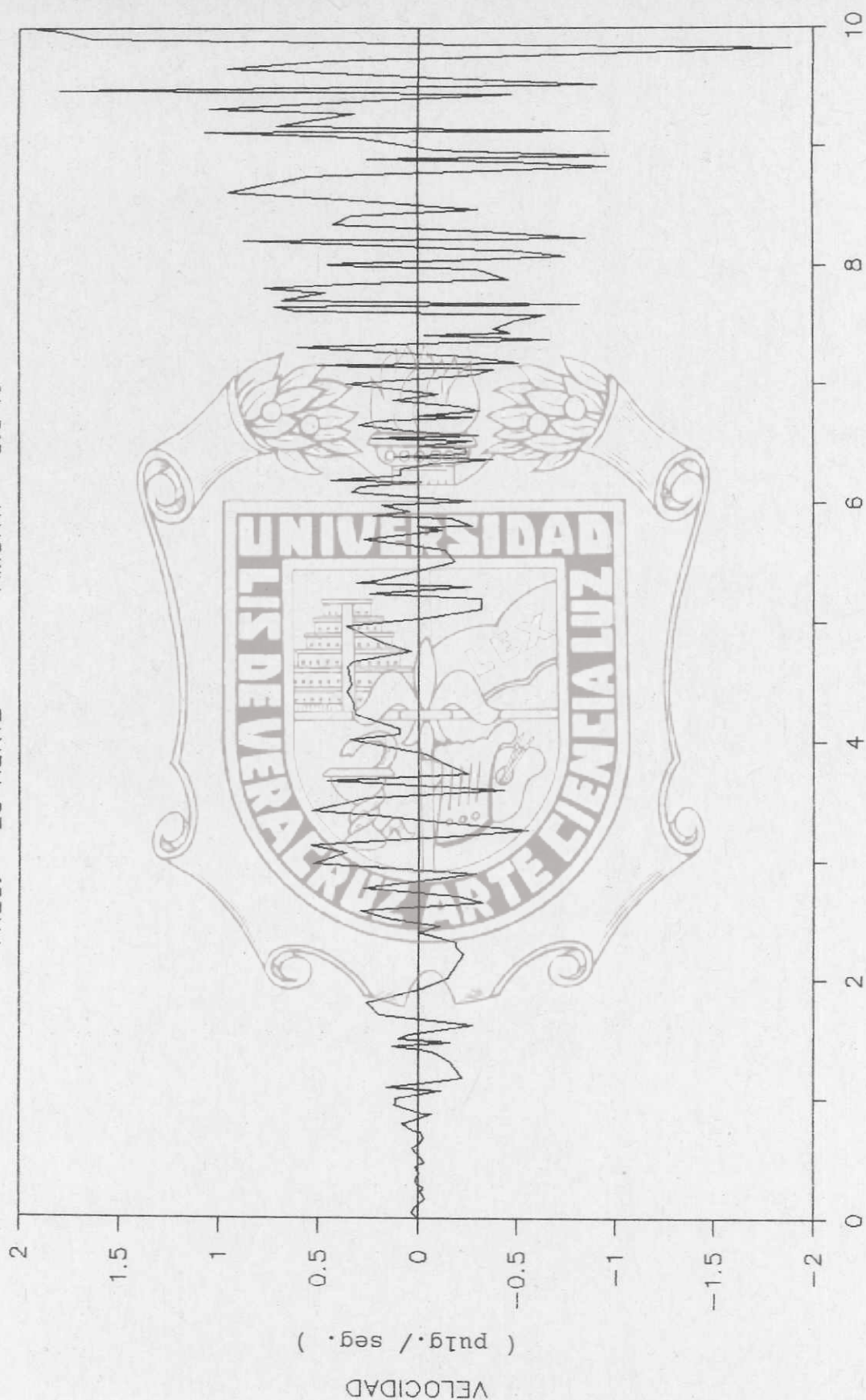
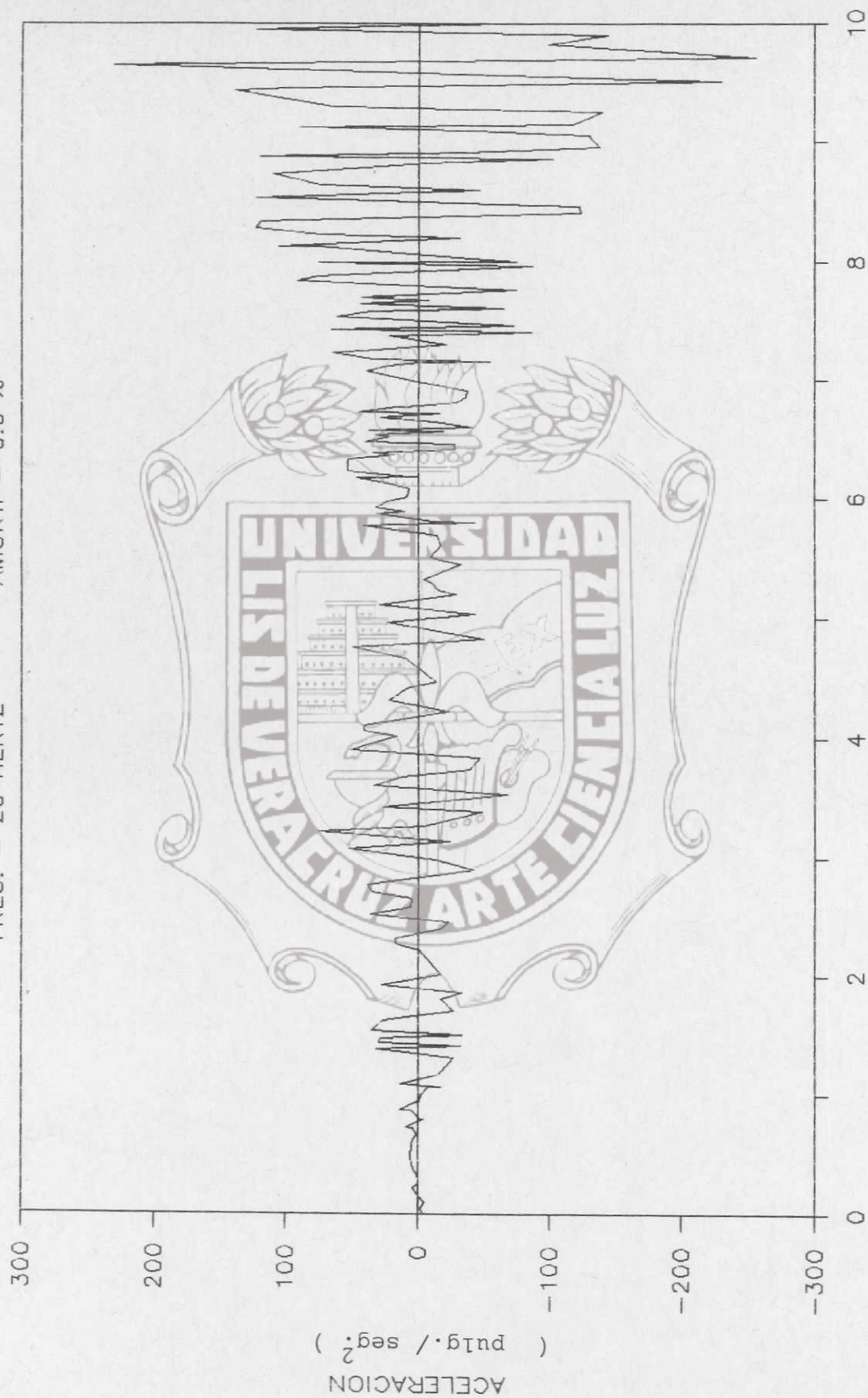


FIGURA No. 38

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ      AMORTI = 0.0 %



TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 39

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 0.0 %

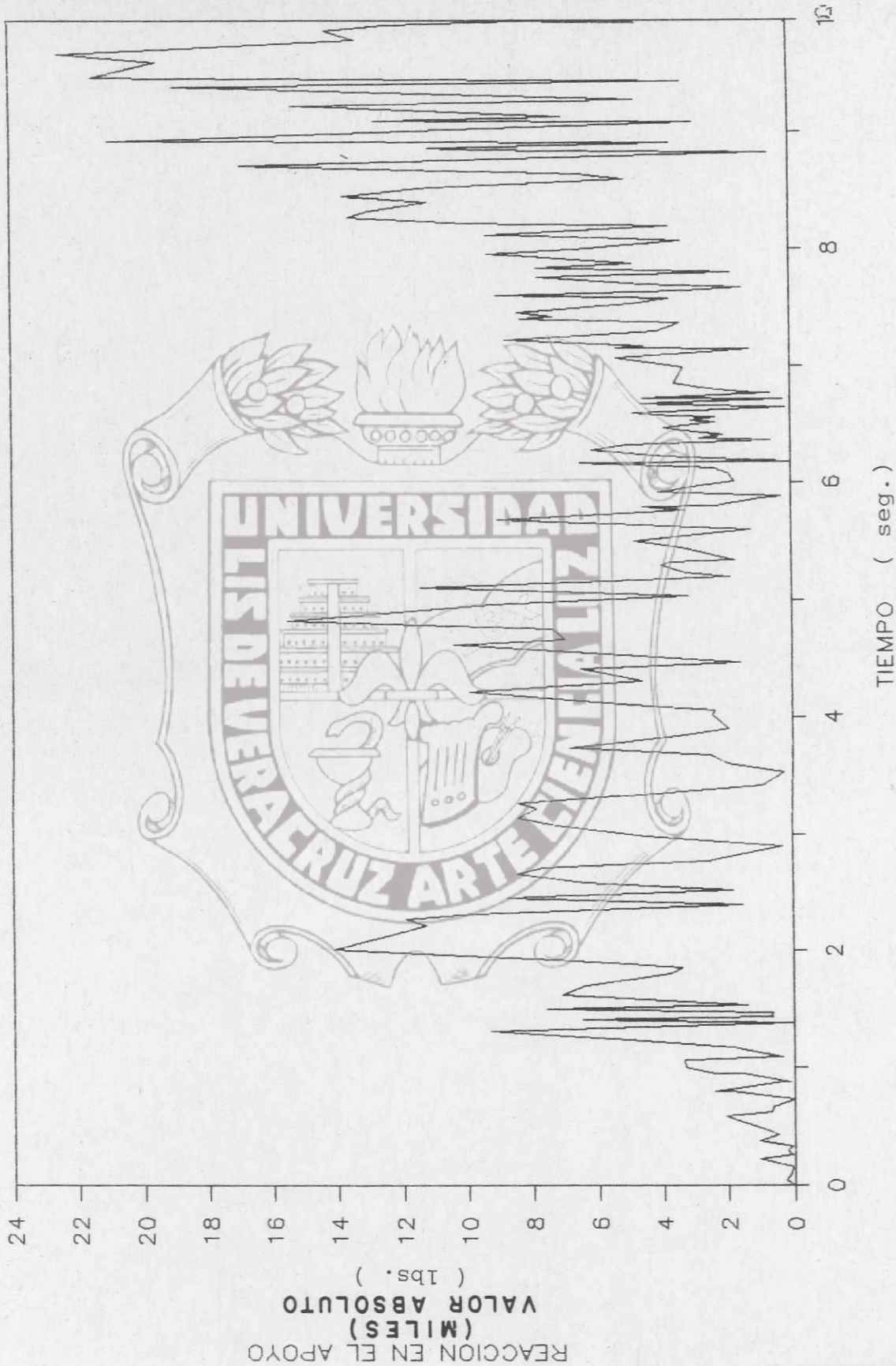


FIGURA No. 40



EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 5 %



TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 41

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 5 %

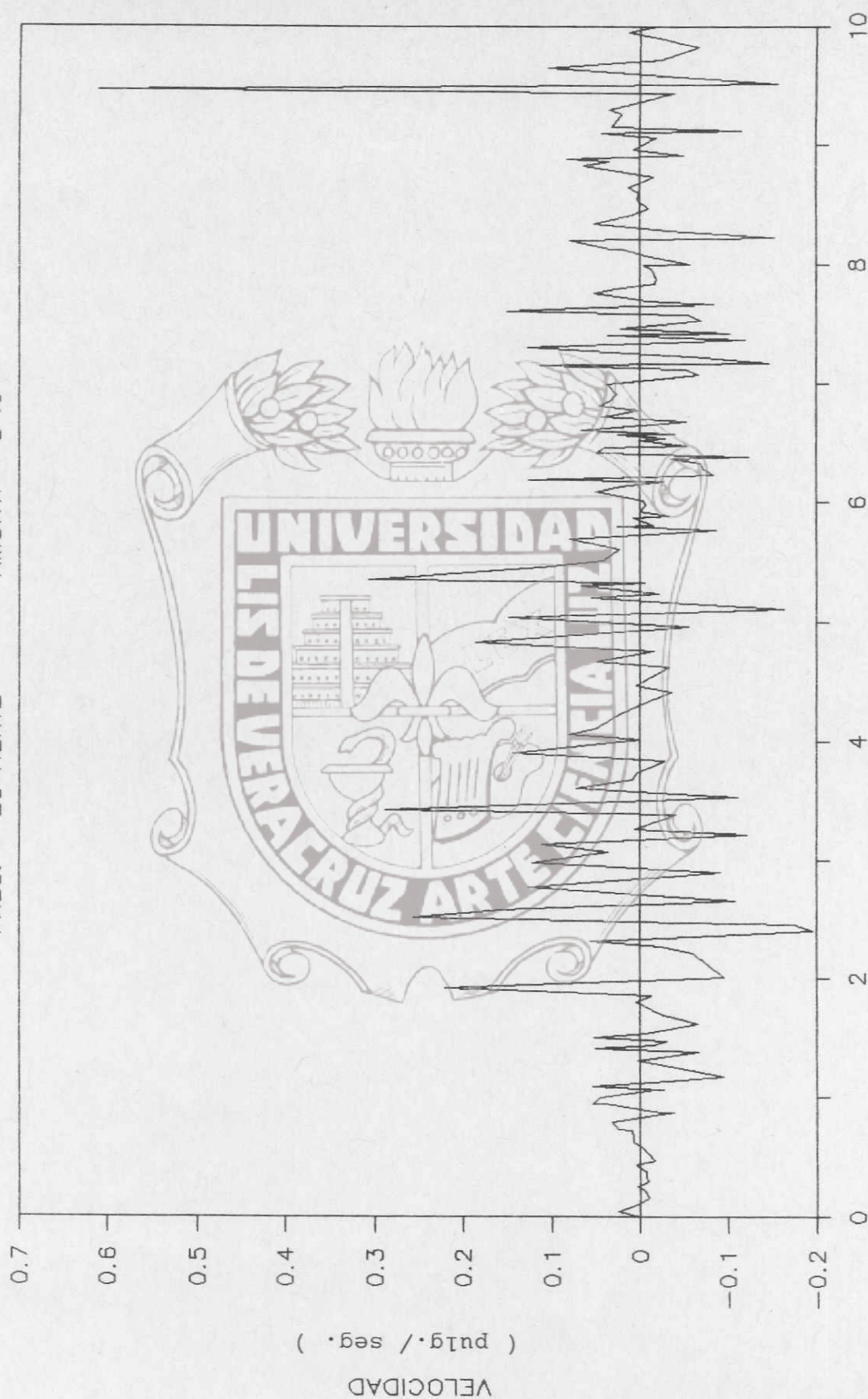


FIGURA No. 42

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 5 %

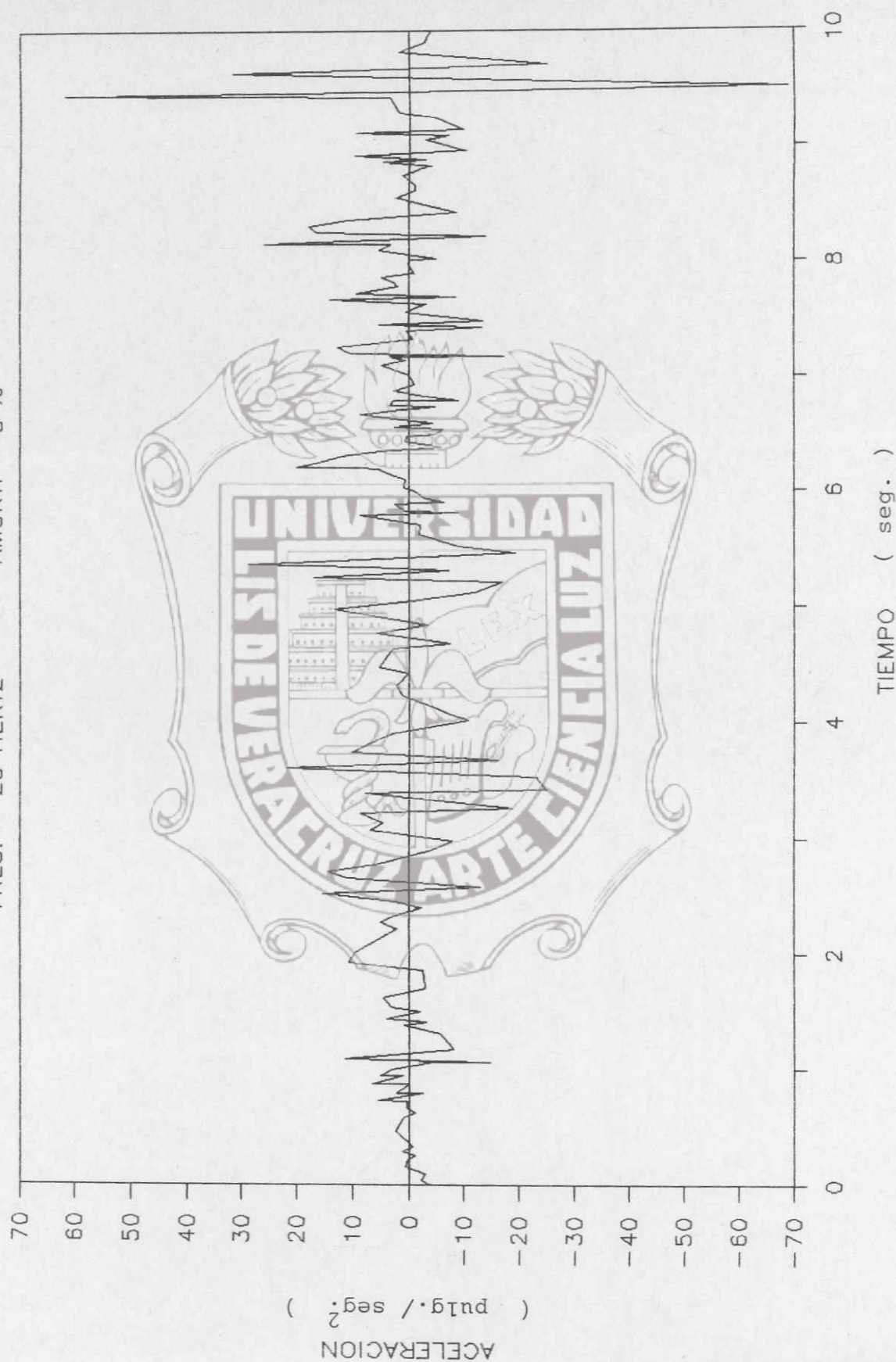


FIGURA No. 43

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 5 %

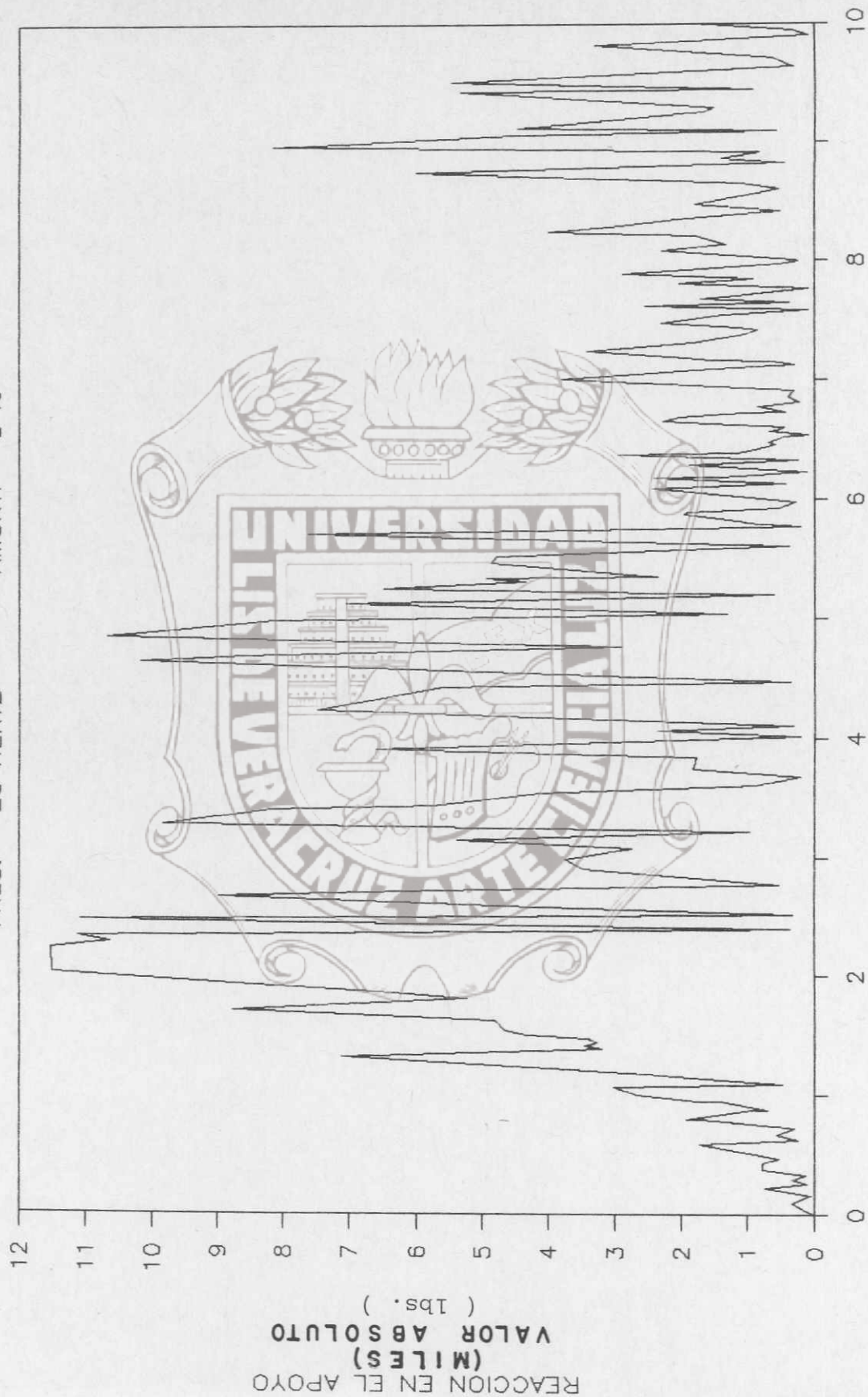


FIGURA No. 44

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 10 %



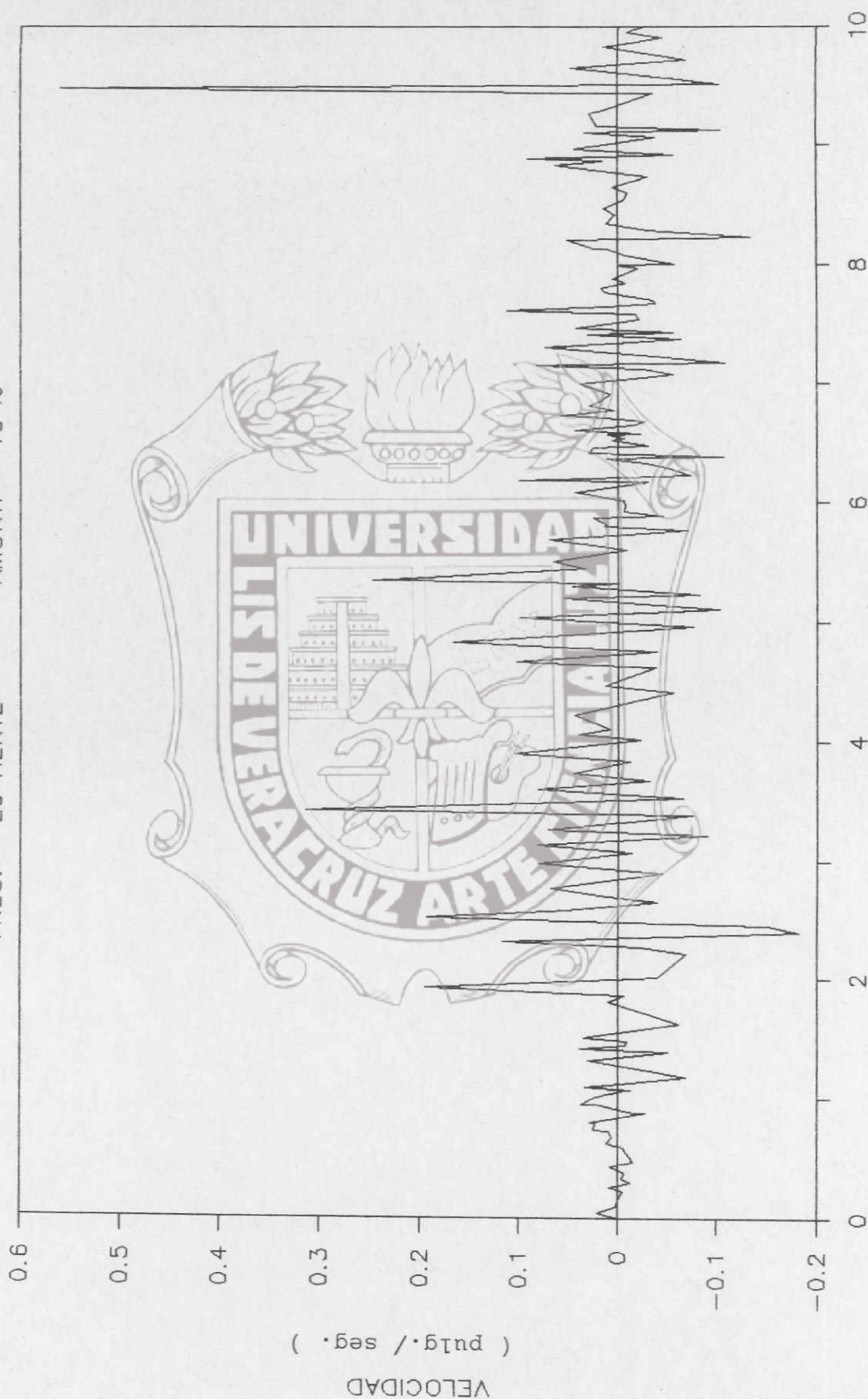
TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 45

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ

AMORTI = 10 %



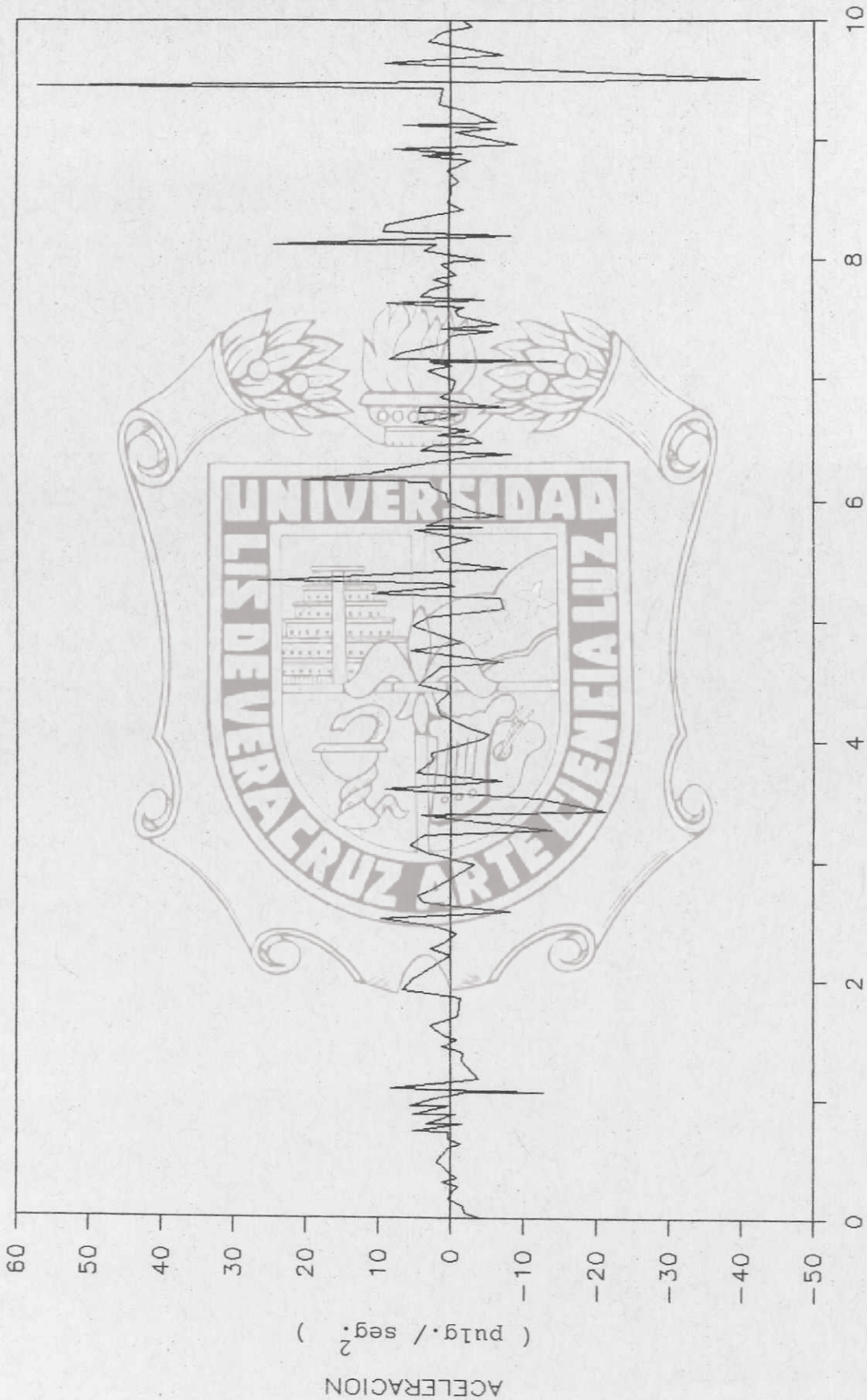
TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 46

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ      AMORTI = 10 %

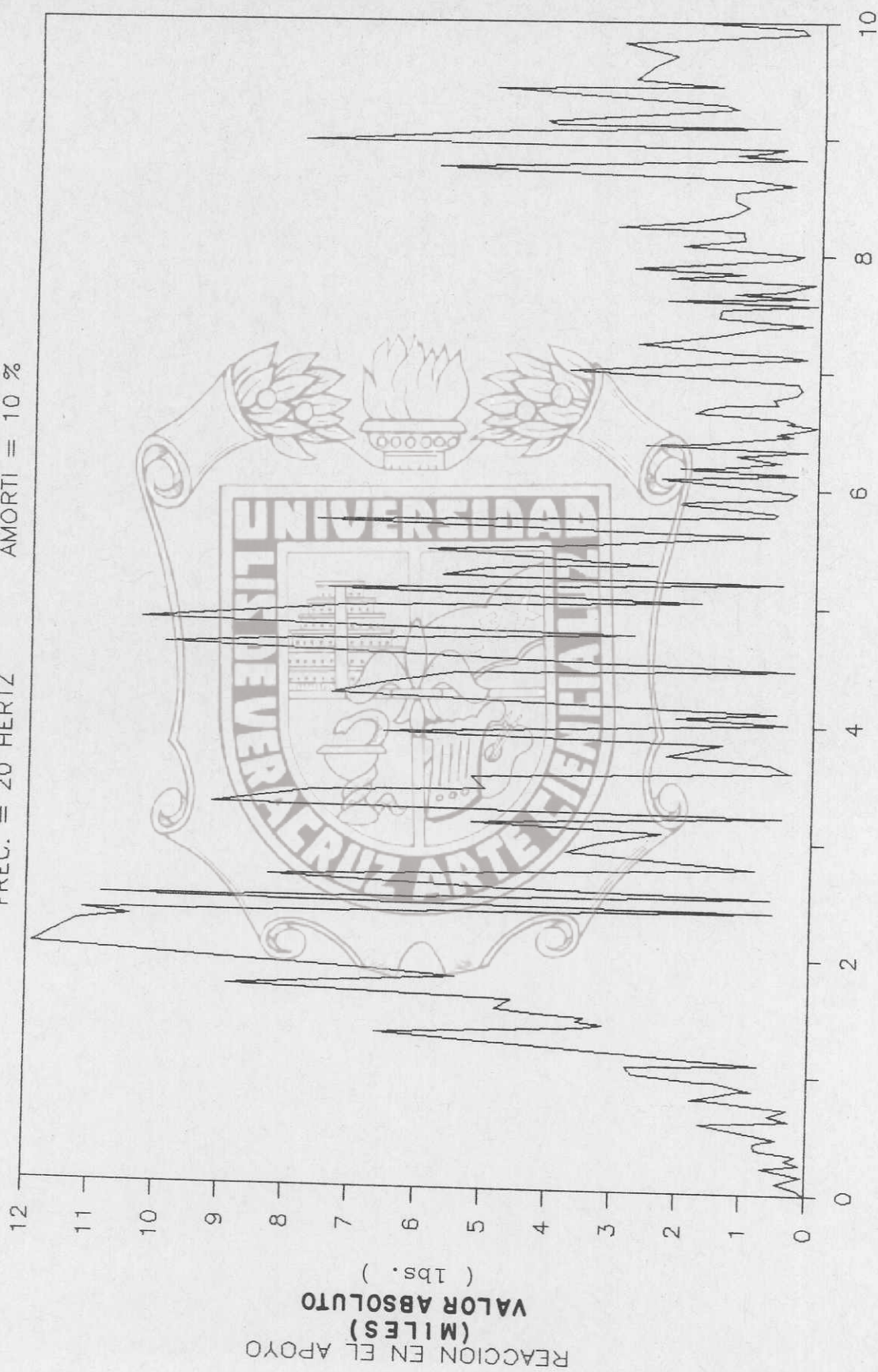


TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 47

EL CENTRO 1940

FREC. = 20 HERTZ AMORTI = 10 %



TIEMPO ( seg. )

FIGURA No. 48



PROGRAMA ESPECTRO:

PROGRAM ESPECTRO

```

C          *****
C          *
C          *           ESPECTRO DE RESPUESTA UTILIZANDO           *
C          *
C          *           LA INTEGRAL DE DUHAMEL                       *
C          *
C          *****
C
C          DATOS DE ENTRADA
C
C          NTYPE = TIPO DE EXCITACION
C          = 0 FUERZA EN LA MASA
C          = 1 ACELERACION EN EL APOYO
C          N = NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINEN LA FUNCION EXCITACION
C          NR = NUMERO DE RESPUESTAS
C          FO = FUERZA MAXIMA
C          VM(J) = VECTOR MASAS
C          XI = PORCENTAJE DE AMORTIGUAMIENTO
C          VK(J) = VECTOR CONSTANTES DE RESORTE
C          TMAX = MAXIMO TIEMPO DE INTEGRACION
C          DT = INTERVALO DE TIEMPO
C          INT = INDICE DE INTERPOLACION
C          = 0 NO INTERPOLACION
C          = 1 INTERPOLACION
C          GR = ACELERACION DE LA GRAVEDAD
C          ( GR = 0 CUANDO NTYPE = 0 )
C          T(I) = TIEMPO EN EL PUNTO I
C          F(I) = FUERZA O ACELERACION EN EL TIEMPO T(I)
C          (ACELERACION EN G'S )
    
```

C RESULTADOS

C EXCITACION EN LA MASA :

C MAX. DISPL. , MAX. VELOC. , MAX. ACEL. , MAXSUP. FUERZA. ,  
 C MAX. D.L.F.

C EXCITACION EN EL APOYO :

C MAX. DISPL. , MAX. VELOC. , MAX. ACEL. , COEF. SIS.

Proyecto de Digitalización de Tesis  
 Responsable M.B. Alberto Pedro Morandi Medina  
 Colaboradores: Estanislao Ferman Garcia  
 M.B. Enrique Rodriguez Alagaña

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8INT1, INT2, INT3, INT4
DIMENSION T(1000), F(1000), VM(1500), VK(1500)

```

C FUNCIONES

```

INT1(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DCOS(WD*TAU)+WD*
! DSIN(WD*TAU))/DWSQ
INT2(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DSIN(WD*TAU)-WD*DCOS(WD*TAU))/
! DWSQ
INT3(TAU)=TAU*INT2(TAU)-XIWD*INT2(TAU)/DWSQ+WD*INT1(TAU)/DWSQ
INT4(TAU)=TAU*INT1(TAU)-XIWD*INT1(TAU)/DWSQ-WD*INT2(TAU)/DWSQ

```

C LECTURA Y ESCRITURA DE DATOS DE ENTRADA

```

OPEN(5, FILE=' ')
OPEN(6, FILE=' ')
WRITE(6, 200)
200 FORMAT(1H1, 10X, 'DATOS DE ENTRADA'//)
READ(5, *) NTYPE, N, NR, FO, XI, TMAX, DT, INT, GR
WRITE(6, 210) NTYPE, N, NR, FO, XI, TMAX, DT, INT, GR
210 FORMAT(3I5, F12.3, 3F10.3, I5, F10.3)
READ(5, *) (VM(J), VK(J), J=1, NR)
WRITE(6, 220) (VM(J), VK(J), J=1, NR)
READ(5, *) (T(I), F(I), I=1, N)
WRITE(6, 230) (T(I), F(I), I=1, N)
220 FORMAT(2F15.2)
230 FORMAT(2F15.5)
WRITE(6, 240)
240 FORMAT(30X, //, 15X, 'ESPECTRO DE RESPUESTA', //)
IF (NTYPE.EQ.1) GO TO 10
WRITE(6, 250)
250 FORMAT(6X, 'FREC', 5X, 'DESP', 7X, 'VEL', 7X, 'ACEL', 7X, 'REAC', 9X,
! 'D.L.F.', //)
WRITE(*, 250)
GO TO 15
10 WRITE(6, 260)
260 FORMAT(6X, 'FREC', 5X, 'DESP', 7X, 'VEL', 7X, 'ACEL', 7X, 'C.',
! 'SIS.', //)
WRITE(*, 260)
15 CONTINUE
IF(NTYPE.EQ.0)
GO TO 30
DO 20 I=1, N
F(I)=F(I)*GR

```

```

20  CONTINUE
30  CONTINUE
    DO 100 J=1,NR
    IF(INT.EQ.0) GO TO 40
C   INTERPOLACION ENTRE LOS DATOS DE ENTRADA

    CALL INTER(N,T,F,DT,TMAX)

C   VALORES INICIALES
40  FIM1=F(1)
    TIM1=T(1)
    ATI=0.0
    BTI=0.0
    DAT=0.0
    DBT=0.0
    Y=0.0
    V=0.0
    P=0.0
    YMAX=0.0
    VMAX=0.0
    AMAX=0.0
    PMAX=0.0
    OMEGA=DSQRT(VK(J)/VM(J))
    CRIT=2*DSQRT(VK(J)*VM(J))
    C=XI*CRIT
    WD=OMEGA*DSQRT(1.-(XI**2))
    XIWD=XI*OMEGA
    DWSQ=XIWD**2+WD**2
    ACC=FIM1/VM(J)
    PI = 4.*DATAN(1.)
    FREC = OMEGA/(2*PI)
    IF (NTYPE.EQ.1) GO TO 50
    YST = FO/VK(J)
50  CONTINUE
    IF ( NTYPE .EQ. 0 ) GO TO 60
    ACC=-FIM1
    FIM1=-FIM1*VM(J)
60  CONTINUE
    NM1=N-1
    DO 90 I=1,NM1

C   DESPLAZAMIENTO

    FI=F(I+1)
    TI=T(I+1)
    IF ( NTYPE .NE. 0 ) FI=-FI*VM(J)
    DFTI=FI-FIM1
    DTI=TI-TIM1
    FT=DFTI/DTI
    G=FIM1-TIM1*FT

```

$AI=INT1(TI)-INT1(TIM1)$   
 $BI=INT2(TI)-INT2(TIM1)$   
 $VS=INT3(TI)-INT3(TIM1)$   
 $VC=INT4(TI)-INT4(TIM1)$   
 $AI=AI*G$   
 $BI=BI*G$   
 $BI=BI+FT*VS$   
 $AI=AI+FT*VC$   
 $ATI=ATI+AI$   
 $BTI=BTI+BI$   
 $Y=DEXP(-XIWD*TI)*((ATI*DSIN(WD*TI)-BTI*DCOS(WD*TI))/(VM(J)*WD))$

C

VELOCIDAD

$DA=(WD*BTI-XIWD*ATI)*DSIN(WD*TI)$   
 $DB=(WD*ATI+XIWD*BTI)*DCOS(WD*TI)$   
 $V=DEXP(-XIWD*TI)*(DA+DB)/(VM(J)*WD)$

C

ACELERACION

$ACC=(FI-C*V-VK(J)*Y)/VM(J)$

C

FUERZAS EN EL RESORTE Y EN EL AMORITIGUADOR

$FS=Y*VK(J)$   
 $FD=V*C$   
 $P=DSQRT(FS**2+FD**2)$

C

VALORES MAXIMOS

C

FUERZA EN LA MASA :

C

DESPLAZAMIENTO

$IF(DABS(Y).GT.DABS(YMAX))YMAX=Y$

C

VELOCIDAD

$IF(DABS(V).GT.DABS(VMAX))VMAX=V$

C

ACELERACION

$IF(DABS(ACC).GT.DABS(AMAX))AMAX=ACC$

C

REACCION EN EL APOYO

$IF(DABS(P).GT.DABS(PMAX))PMAX=P$

$IF(NTYPE.EQ.1)GO\ TO\ 70$

$DLF=DABS(YMAX/YST)$

```

70      GO TO 80
        CONTINUE

C      EXCITACION EN EL APOYO :
C      DESPLAZAMIENTO

        SD = DABS(YMAX)

C      SEUDOVELOCIDAD

        SV = DABS(YMAX)*OMEGA

C      ACELERACION

        SA = DABS(YMAX)*OMEGA**2

C      COEFICIENTE SISMICO

        CS = SA/GR

80      CONTINUE
        TIM1=TI
        FIM1=FI
90      CONTINUE

C      IMPRESION DE LOS MAXIMOS VALORES

        IF (NTYPE.EQ.1) GO TO 125

C      FUERZA EN LA MASA

        WRITE (6,270)FREC,YMAX,VMAX,AMAX,PMAX,DLF
        WRITE (*,270)FREC,YMAX,VMAX,AMAX,PMAX,DLF
270     FORMAT (3X,F6.2,3X,F8.5,3X,F12.5,3X,F12.5,3X,F11.3,3X,F9.3)
        GO TO 100

C      EXCITACION EN EL APOYO

125     CONTINUE
        WRITE (6,280)FREC,SD,SV,SA,CS
        WRITE (*,280)FREC,SD,SV,SA,CS
280     FORMAT (5X,F6.2,3X,F8.5,3X,F8.5,3X,F9.4,3X,F8.3)
100     CONTINUE
        END

C      SUBROUTINA DE INTERPOLACION

        SUBROUTINE INTER(N,TC,X,DT,TMAX)
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
        DIMENSION TC(1000),X(1000)

```

```
NT=TMAX/DT
NT1=NT+1
DO 10 I=1,NT1
10 F(I)=0.0
F(1)=X(1)
ANN=0.0
II=1
DO 30 I=2,NT1
AI=I-1
T=AI*DT
IF(T.GT.TC(N)) GO TO 40
IF(T.LE.TC(II+1)) GO TO 20
ANN=-TC(II+1)+T-DT
II=II+1
20 ANN=ANN+DT
F(I)=X(II)+(X(II+1)-X(II))*ANN/(TC(II+1)-TC(II))
30 CONTINUE
40 TC1=TC(1)
N=NT1
DO 50 I=1,NT1
X(I)=F(I)
AL=I
50 TC(I)=TC1+DT*(AL-1.)
RETURN
END
```

