



# UNIVERSIDAD VERACRUZANA

INSTITUTO DE INGENIERIA



"MODELACION MATEMATICA  
DE FLUJOS COMPRESIBLES  
UNIDIMENSIONALES"

**TESIS DE MAESTRIA**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRIA EN INGENIERIA AMBIENTAL**

P R E S E N T A

**Alma Guadalupe Hernández Fernández**

H. VERACRUZ, VER.

1995.

Proyecto de Digitalización de Tesis  
Responsable M.B. Alberto Pedro Lorandi Medina  
Colaboradores: Estanislao Ferman García  
M.B. Enrique Rodríguez Magaña

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



UNIVERSIDAD VERACRUZANA  
INSTITUTO DE INGENIERIA

SEP-FOME  
933109

H. Veracruz, Ver., Febrero 6 de 1995.  
DI280/95.

Al Candidato al Grado:  
ING. ALMA GUADALUPE HERNANDEZ FERNANDEZ  
P R E S E N T E.

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Dr. Rafael Villasenor Gutiérrez, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería en el área de Ingeniería Ambiental.

**T E M A :**

**"MODELACION MATEMATICA DE FLUJOS COMPRESIBLES UNIDIMENSIONALES"**

Introducción


- 1.- Generalidades de las ecuaciones diferenciales parciales y diferencias finitas.
  - 2.- Ecuaciones de Euler.
  - 3.- Casos de Estudio.
  - 4.- Coordenadas Generalizadas.
  - 5.- Resultados.
  - 6.- Conclusiones
- Apéndices  
Bibliografía

Sin otro particular, me es grato reiterarle la seguridad de mi más atenta y distinguida consideración.

A T E N T A M E N T E  
"LIS DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"

  
DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ  
DIRECTOR

Proyecto de Digitalización de Tesis  
Responsable M.B. Alberto Pedro Lorandi Medina  
Colaboradores: Estanislao Ferman García  
M.B. Enrique Rodríguez Magaña

The seal of the University of Veracruz is centered in the background. It features a shield with a central figure, a crown on top, and a banner at the bottom with the motto 'ARTE SCIENCIA'. The text 'UNIVERSIDAD VERACRUZANA' is also visible within the seal's design.

***MODELACION  
MATEMATICA DE  
FLUJOS COMPRESIBLES  
UNIDIMENSIONALES***

Doy gracias a dios por haberme permitido vivir y encausar mi vida hasta el logro de esta meta.

**DEDICATORIAS:**

Dedico esta tesis:

A mis queridos padres:

Ma Elena Fernández Machorro.  
Ing. Manuel Hernández del Valle. (q.d.e.)

Que hicieron posible mi existencia. **EL** cuya herencia dejó en mi la inquietud de buscar la libertad, y **ELLA** que con su ejemplar y muchas veces heroico testimonio supo sembrar mucho de lo bueno que hay en mi.

A mis Hermanos:

Jorge Alberto Hernández Fernández.  
Silvia del Carmen Hernández Fernández.

A mi Hermano y su Esposa:

Ing. Luis Guillermo Hernández Fernández.  
Enfra. Martha Medina de Hernández.

"Por su comprensión, cariño, afecto y confianza que me tienen".

A mis sobrinos:

Guadalupe, Flor, José Alfredo, Luisita, Marthita y Luis Gmo.

Que esto sirva de ejemplo para que puedan seguir adelante con sus estudios y que nada es fácil en la vida

## **RECONOCIMIENTOS:**

### **AL INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS (I.I.E).**

Por darme la oportunidad de haber elaborado mi tesis en sus instalaciones haciendo uso de sus excelentes recursos humanos, técnicos y materiales y así mismo el haberme otorgado una beca que pude aprovechar en la terminación de la presente tesis de maestría.

### **AL CONACYT.**

Por haber otorgado un apoyo económico al proyecto en el cual se realizó el trabajo de investigación para la tesis de Maestría.

### **AL DR. ANSELMO CHAVEZ ARGUELLEZ.**

Por la oportunidad brindada para la realización de este trabajo, proyecto-tesis y así como las facilidades en el uso de las instalaciones.

### **AL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD VERACRUZANA (U.V.)**

Por la formación académica que me otorgo, sin exigirme más que mi esfuerzo y dedicación.

### **A LOS PROFESORES DEL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA U.V.**

Por la experiencia académica que me transmitieron a lo largo de toda mi especialidad.

## **AGRADECIMIENTOS:**

Agradezco a mi asesor el DR. Rafael Villaseñor Gutiérrez quien me ayudo enormemente en la realización de mi tesis, y sin el cual el camino hubiera sido más difícil. Así como también el haberme dado un ambiente agradable de trabajo, con el cual varios nos sentimos honrados de trabajar con él.

Agradezco al M.C. Nicolás Pardo Viera y M.I. Marco Antonio Martínez Flores por la ayuda e interés mostrado en el desarrollo del trabajo de investigación que dió lugar a la presente tesis.

Agrazco a los señores del Jurado calificador de esta tesis: Drs. José Luis Vargas López, Rafael Villaseñor Gutiérrez y M.C. Evaristo Hernández Marcelliz por su atinada labor de revisión.

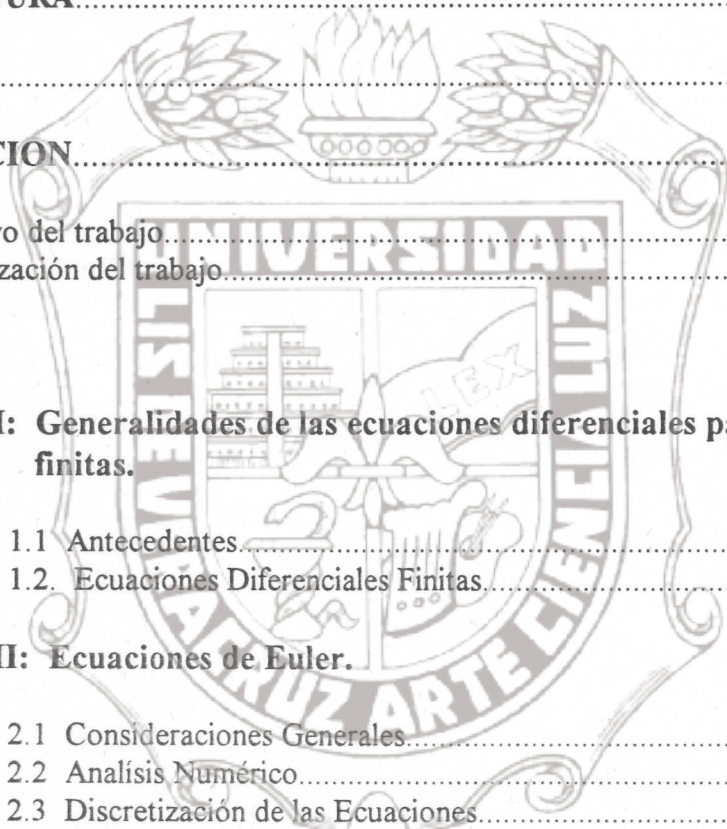
A las personas que me brindaron también su ayuda durante mi estancia en el I.I.E.

M.C. JOSE MANUEL MORALES ROSAS.  
Q.I. PATRICIA GONZALEZ ALEMAN.  
ING. JESUS ADOLFO SALAS FERNANDEZ.  
SEC. TERESA REBOLLAR PALACIOS.  
SEC. CLAUDIA LORENA GALLEGOS GARZA.  
SEC. MARIO HIDALGO RAMIREZ.

INDICE

Página

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	i
<b>NOMENCLATURA</b> .....	ii
<b>RESUMEN</b> .....	1
<b>INTRODUCCION</b> .....	2
Objetivo del trabajo.....	4
Organización del trabajo.....	4
<b>CAPITULOS:</b>	
<b>CAPITULO I: Generalidades de las ecuaciones diferenciales parciales y diferencias finitas.</b>	
1.1 Antecedentes.....	6
1.2. Ecuaciones Diferenciales Finitas.....	7
<b>CAPITULO II: Ecuaciones de Euler.</b>	
2.1 Consideraciones Generales.....	8
2.2 Análisis Numérico.....	11
2.3 Discretización de las Ecuaciones.....	18
2.4 Condiciones de Frontera del tipo Derichlet.....	22
<b>CAPITULO III: Casos de Estudio.</b>	
3.1 Aspectos Generales de los Fluidos a Estudiar.....	24
3.2 Caso 1.....	26
3.3 Caso 2.....	27
<b>CAPITULO IV: Coordenadas Generalizadas.</b>	
4.1 Transformación de las Metrics.....	29
4.2 Aplicación de las coordenadas Generalizadas a las Ecuaciones Euler.....	31
4.3 Generación de un Sistema de Malla.....	32



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

**CAPITULO V: Resultados.**

5.1 Discusión de los Resultados.....37

**CAPITULO VI: Conclusiones.**

Conclusiones.....47

**APENDICES**

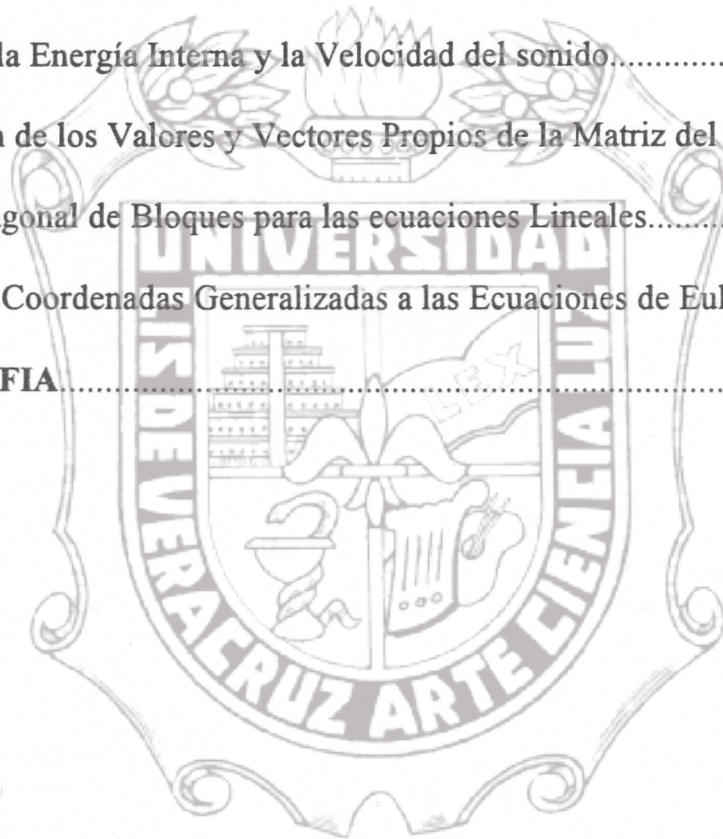
Obtención de la Energía Interna y la Velocidad del sonido.....49

Determinación de los Valores y Vectores Propios de la Matriz del flujo A.....52

Sistema Tridiagonal de Bloques para las ecuaciones Lineales.....54

Aplicación de Coordenadas Generalizadas a las Ecuaciones de Euler.....57

**BIBLIOGRAFIA**.....61



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



LISTA DE FIGURAS

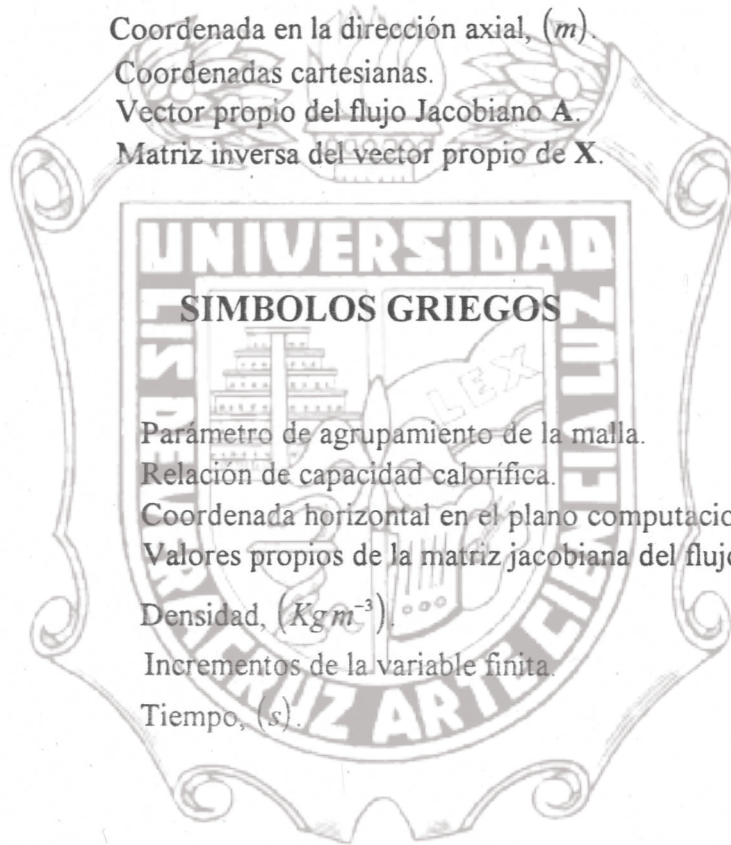
Figuras	Pagina
1. Dominio fisico empleado para la solución de la ecuación (2.3.6).....	21
2. Ducto divergente con sección transversal variable donde circula un gas solamente en la dirección axial.....	25
3. Plano fisico la cual se transforma a un plano computacional uniforme.....	35
4. Plano computacional rectangular con espaciamentos de la malla uniforme.....	36
5. Distribuciones de presión y número de Mach para el caso 1.....	40
6. Distribuciones de densidad y energía interna total para el caso 1.....	41
7. Distribuciones de presión en los diferentes niveles de tiempos para el caso 1.....	42
8. Distribuciones de presión y número de Mach para el caso 2.....	43
9. Distribuciones de densidad y energía interna total para el caso 2.....	44
10. Distribuciones de presión en los diferentes niveles de tiempos para el caso 2.....	45
11. Distribuciones de presión con la implementación de coordenadas generalizadas donde se presenta la onda de choque.....	46

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## NOMENCLATURA

$a$	Velocidad del sonido, ( $ms^{-1}$ ).
$c$	Constante de integración.
$A$	Constante de transformación de la coordenada axial.
$A, B$	Matrices jacobianas del flujo.
$A, B, C$	Coefficientes de las matrices (código hiperbólico).
$A M_i, A A_i, A P_i$	Coefficientes de la ecuación diferencial finita.
$A^+, A^-$	Matriz Jacobiana del flujo $A$ positiva y negativa.
$D$	Matriz diagonal de los valores propios.
$D^+, D^-$	Matriz diagonal de los valores propios positivo y negativo.
$D$	Parámetro del punto físico del dominio.
$e$	Energía interna, ( $J Kg^{-1}$ ).
$e_i$	Energía interna total, ( $J Kg^{-1}$ ).
$E^+, E^-$	Vector flujo $E$ positivo y negativo.
$f$	Variable utilizada para la extrapolación.
$E, F, G$	Términos convectivos de las ecs. de Navier-Stokes.
$E_v, F_v, G_v$	Términos difusivos de las ecs. de Navier-Stokes.
$H$	Término fuente/sumidero.
$I$	Matriz identidad.
$J$	transformación del Jacobiano.
$K$	Constante de la ecuación de estado para un proceso isoentrópico.
$L$	Longitud del dominio físico, ( $m$ ).
$L$	Matriz triangular inferior.
$M_i$	Número de Mach.
$M$	Número de ecuaciones de transporte (código hiperbólico).
$NP$	Número total de los puntos de la malla (código hiperbólico).
$p$	Presión del gas, ( $N m^{-2}$ ).
$q_i$	Elementos en función del vector solución.
$Q$	Flujo de calor.
$Q$	Vector solución de las variables dependientes.
$R$	Vector residual de la descomposición de la matriz $LU$ .
$RHS_i$	Vector residual.

S	Area de la sección transversal del ducto, ( $m^2$ ).
t	Tiempo, (s).
u	Velocidad, ( $ms^{-1}$ ).
U	Matriz triangular superior.
V	Volumen, ( $m^3$ ).
W	Trabajo, (J).
x	Coordenada en la dirección axial, (m).
y, z	Coordenadas cartesianas.
X	Vector propio del flujo Jacobiano A.
X <sup>-1</sup>	Matriz inversa del vector propio de X.



## SIMBOLOS GRIEGOS

$\beta$	Parámetro de agrupamiento de la malla.
$\gamma$	Relación de capacidad calorífica.
$\epsilon$	Coordenada horizontal en el plano computacional.
$\lambda$	Valores propios de la matriz jacobiana del flujo A.
$\rho$	Densidad, ( $Kgm^{-3}$ ).
$\Delta$	Incrementos de la variable finita.
$\tau$	Tiempo, (s).

## MODELACION MATEMATICA DE FLUJOS COMPRESIBLES UNIDIMENSIONALES

ALMA GUADALUPE HERNANDEZ FERNANDEZ

*Dirigida por el Dr. Rafael Villaseñor Gutiérrez*

Este trabajo presenta un código computacional, el cual predice el comportamiento de un gas a través de un ducto con sección transversal variable, a fin de obtener las distribuciones de presión, densidad y temperatura. El gas es sometido bajo las siguientes condiciones de flujo: en la entrada, el flujo es supersónico y abandona el ducto (salida) como (1) supersónico, (2) subsónico. Para verificar la ejecución del programa en flujos compresibles el código computacional se ha validado con datos analíticos obtenidos de la literatura.

El método numérico implementado es estable y eficiente para la solución de las ecuaciones de Euler que rigen el comportamiento de un fluido ideal. Las ecuaciones de Euler incluyen conservación de masa, momento y energía. Para nuestro estudio se considero que los efectos convectivos ocurren solamente la dirección axial. Para facilitar la solución numérica las ecuaciones de Euler para un flujo unidimensional se han expresado en forma vectorial resultando un sistema de ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico, altamente no lineales de primer orden. A estas ecuaciones se les ha aplicado un método implícito denominado formulación Delta y en su discretización se han usado diferencias finitas. El método implícito permite tomar incrementos grandes de la coordenada axial para mantener la estabilidad numérica. El sistema de ecuaciones algebraicas que se obtiene da origen a un sistema tridiagonal de bloques.

Para resolver los gradientes de las variables de flujo cuando aparecen ondas de choque las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, se han transformado del plano físico al plano computacional. A estas transformaciones se le conoce como coordenadas generalizadas. Con las coordenadas generalizadas los puntos del dominio se agrupan en las regiones donde las variables del flujo sufren cambios drásticos. Se ha desarrollado una subrutina para la generación de una malla fina donde ocurren gradientes pronunciados en las regiones de mayor importancia por donde circula el fluido. Esto ha permitido obtener los detalles donde cambian subitamente las propiedades termodinámicas y aerodinámica del gas para poder modelar ondas de choque.

Se escribieron dos códigos computacionales mediante los cuales fueron obtenidas las soluciones numéricas para flujos supersónicos y transónicos. Los resultados numéricos han sido comparados con datos analíticos obtenidos de la literatura para validar los códigos computacionales.

Las predicciones obtenidas al resolver las ecuaciones de Euler para un flujo unidimensional fueron satisfactorias, dado que se ajustan a los datos analíticos reportados de la literatura. Las distribuciones de densidad, presión y velocidad se han usado para ser comparados con los datos analíticos.

### INTRODUCCION

La mecánica de fluidos se ocupa de estudiar los fluidos en movimiento o en reposo y los efectos sobre los contornos, que pueden ser con superficies sólidas ó inclusive con otros fluidos. Desde el punto de vista de la mecánica la materia sólo puede presentarse en dos estados: sólido y fluido. La diferencia entre ellos radica en la reacción de ambos a un esfuerzo tangencial o cortante. Un sólido puede resistir un esfuerzo cortante con una deformación estática. Sin embargo, cualquier esfuerzo cortante aplicado a un fluido, no importa cuán pequeño sea, provocara el movimiento del fluido. Este se mueve y se deforma continuamente mientras se siga aplicando el esfuerzo cortante.

A los fluidos los podemos clasificar en líquidos y gases. Para un líquido, éste está compuesto por agrupaciones de moléculas muy cercanas con enormes fuerzas cohesivas, tienden a conservar su volumen y formar una superficie libre en campos gravitatorios. Mientras para un gas, las moléculas se encuentran separadas entre sí, con fuerzas cohesivas despreciables, y se expansionan hasta que encuentra paredes que lo confinan; por consiguiente, un gas no tiene volumen definido y por si mismo forma una atmósfera hidrostática y no forman superficies libres, para flujos gaseosos raramente influyen otros efectos gravitatorios distintos de flotabilidad.

La determinación ya sea experimental o teórica de las propiedades de un flujo, como función de la posición y del tiempo, son parte esencial para la solución de cualquier problema fluidodinámico. Existen dos métodos de análisis: el primer método se denomina *euleriano*, y consiste en determinar el campo de presión como función de la posición en el tiempo  $p(x, y, z, t)$  y no los cambios de presión  $p(t)$  que experimenta una partícula al moverse. El segundo método es el llamado *lagrangiano*, y consiste en determinar las propiedades de una partícula durante su movimiento a lo largo del flujo en el tiempo.

Las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, son las que gobiernan el movimiento de un fluido, estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes, y cuando carecen de los términos difusivos, se obtienen las llamadas ecuaciones de Euler.

En esta investigación consideramos un flujo unidimensional donde la densidad ( $\rho$ ), la presión ( $p$ ), la energía interna total ( $e$ ), y la velocidad ( $u$ ) son funciones únicamente de la coordenada axial ( $x$ ). Las ecuaciones de Euler para un flujo unidimensional quedan

## INTRODUCCION

---

condicionadas de la siguiente manera; si la variación del área transversal de la dirección predominante del flujo  $S = S(x)$  es gradual, las propiedades del fluido a través del área de la sección transversal se podrán considerar uniformes en cada posición de la coordenada axial. Para un flujo tal, donde varía el área como  $S = S(x)$ , se puede asumir sin incurrir en errores grandes que  $\rho, e, p$ , y  $u$  son funciones únicamente de la coordenada axial.

Dado un flujo en una región unidimensional, las propiedades del flujo cambian como una función de la coordenada axial donde el gas atraviesa la región. En el lado izquierdo del campo de flujo (entrada al ducto), la densidad, la energía interna total, la presión y la velocidad se denominarán  $\rho, e, p$ , y  $u$  respectivamente. En la región del lado derecho (salida del ducto) las variables de flujo están dadas por  $\rho_{NP}, e_{NP}, p_{NP}$ , y  $u_{NP}$ . Para calcular las variables de flujo entre estas fronteras físicas, es necesario resolver las ecuaciones de Euler, ya que estas ecuaciones se pueden expresar en forma vectorial formando ecuaciones diferenciales del tipo hiperbólico altamente no lineales. Su solución requiere de utilizar simplificaciones, las cuales se discutirán más adelante. Para obtener estabilidad numérica y una solución convergente las ecuaciones de Euler deben de ser resueltas simultáneamente para las variables dependientes  $\rho, e$ , y  $u$ . La distribución de presión se calculará una vez que se ha determinado el campo vectorial y escalar.

En nuestro caso de estudio, se considera un flujo adiabático, sin efectos de difusión, que es una buena aproximación que puede ser aplicada en un gran número de situaciones prácticas. Para un flujo compresible, con número de Mach superior a 0.3, existen variaciones apreciables de densidad. Cuando las variaciones de densidad son significativas, la ecuación de estado nos señala que la presión y temperatura también lo son. Esas grandes variaciones de temperatura implican que la ecuación de la energía no pueden suprimirse.

Es importante recordar que el número de Mach se define como la razón de las fuerzas inerciales con respecto a las fuerzas elásticas que actúan sobre el fluido. Si el número de Mach es pequeño, las fuerzas inerciales no son eficaces para comprimir al fluido y éste puede considerarse como un flujo incompresible. El número de Mach se define matemáticamente como el cociente entre la velocidad de un fluido y la velocidad local del sonido en el medio, esto es  $M = u/a$ . Los flujos compresibles se caracterizan por el régimen de su número de Mach como sigue,  $M > 1$  flujo supersónico,  $M < 1$  flujo subsónico y  $M = 1$  flujo sónico.

Las ecuaciones de Euler no son válidas en una región en que se comunique calor o trabajo al fluido. La razón básica de esta restricción es que el calor y el trabajo van acompañados por efectos de difusión.

## INTRODUCCION

---

### El objetivo del Trabajo

El objetivo de este trabajo de investigación es desarrollar un código computacional que permita predecir el comportamiento de un gas a través de un ducto divergente para obtener lo siguiente:

- Distribución de presión
- Distribución de densidad
- Distribución de temperatura

Bajo las siguientes condiciones: en la entrada el flujo es supersónico y abandona el ducto (salida) como (1) supersónico, (2) subsónico, y validar el código computacional con datos analíticos obtenidos de la literatura.

### Organización del Trabajo

La estructura del trabajo comprende resumen, introducción, seis capítulos y cuatro apéndices, que se describen como siguen:

En el primer capítulo, se describe las ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico que forman las ecuaciones de Euler, se explica las formulaciones que existen para resolverlas y las características de las técnicas numéricas que deben cumplir las ecuaciones diferenciales en diferencias finitas.

En el capítulo dos, se describe el desarrollo de un método numérico estable y eficiente para resolver las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido ideal. Apartir de las ecuaciones que gobiernan a los fluidos, conservación de masa, momento y energía, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes se obtienen las ecuaciones de Euler eliminando los términos difusivos. Para la solución de estas ecuaciones, se aplicó el método implícito conocido como formulación Delta y su discretización se realizó utilizando diferencias finitas. Con éste método implícito se permite tomar incrementos grandes de la coordenada axial para mantener estabilidad numérica.

En el capítulo tres, se describen los aspectos generales de los fluidos a estudiar, se consideraron dos casos de flujo en la salida: el primero para un flujo supersónico y el segundo para un flujo subsónico, para obtener las distribuciones de presión, densidad, número de Mach y energía interna total para los dos casos considerados.

En el capítulo cuatro, se describe el desarrollo que resulta de implementar a las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía al ser transformadas del plano físico al plano computacional. A esta transformación se le conoce como coordenadas generalizadas. Además, se muestra el desarrollo de dos códigos computacionales para obtener la solución numérica de las ecuaciones de Euler unidimensionales para un gas que circula por un ducto. En la entrada del ducto el flujo es supersónico y lo abandona bajo dos diferentes condiciones (1) supersónico, (2) subsónico. Con los resultados obtenidos de

## INTRODUCCION

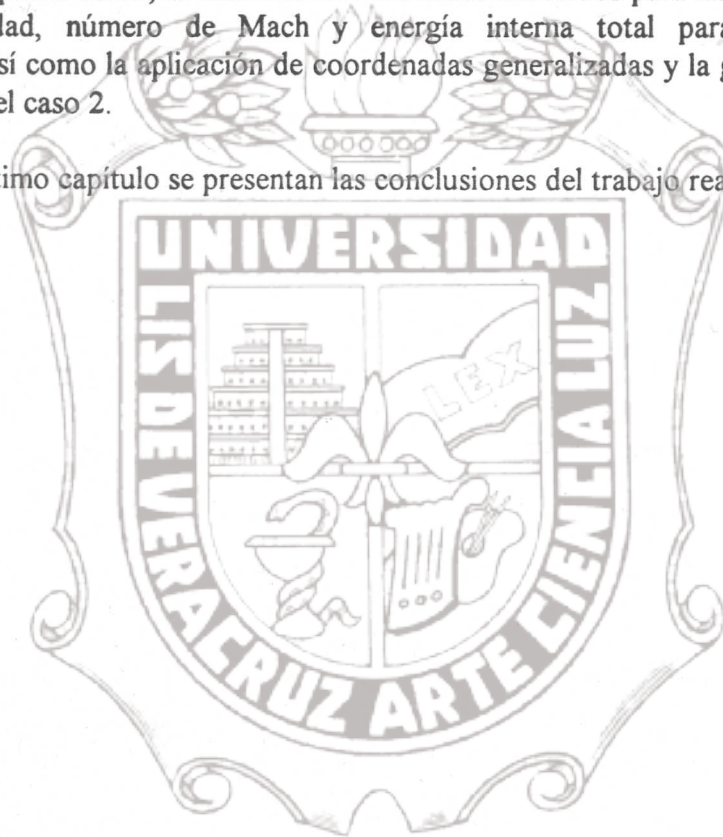
---

las soluciones numéricas se realizó una comparación con datos analíticos [ Hoffmann (1989) A] para validar los códigos computacionales.

Posteriormente se muestra el desarrollo analítico que se usó para generar un sistema de malla fina del plano físico al plano computacional, a fin de obtener una mejor resolución en las regiones, donde las variables del flujo sufren altos gradientes en la dirección axial. Esta subrutina se implemento al código computacional para el caso 2 en el que se presenta la onda de choque.

En el capítulo cinco, se discuten los resultados obtenidos para las distribuciones de presión, densidad, número de Mach y energía interna total para los dos casos considerados, así como la aplicación de coordenadas generalizadas y la generación de una malla fina para el caso 2.

En el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo realizado.



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



## CAPITULO I

**GENERALIDADES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES  
Y DIFERENCIAS FINITAS****1.1 Antecedentes**

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de los fluidos son las ecuaciones de Navier-Stokes. El progreso tan notable de los métodos numéricos para las ecuaciones de Navier-Stokes en los años recientes está íntimamente ligado con el avance en la dinámica computacional de fluidos. Las ecuaciones básicas del flujo de fluidos sin efectos de difusión son las llamadas ecuaciones de Euler que son de tipo hiperbólico. Incluso las ecuaciones para los flujos viscosos se pueden analizar como si fueran hiperbólicas si los efectos viscosos son débiles. El éxito de una simulación computacional de los fluidos depende de la precisión y eficiencia al resolver las ecuaciones discretizadas. A esto se debe que el desarrollo de métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) hiperbólicas sea investigado en la parte computacional de la dinámica de fluidos.

Para resolver las EDP's hiperbólicas usando métodos numéricos, las derivadas parciales en las ecuaciones son aproximadas mediante relaciones de diferencias finitas. Las representaciones de las derivadas parciales son obtenidas por expansión de series de Taylor. Las ecuaciones aproximadas resultantes, la cual representan las EDP's hiperbólicas originales, se llaman ecuaciones de diferencias finitas.

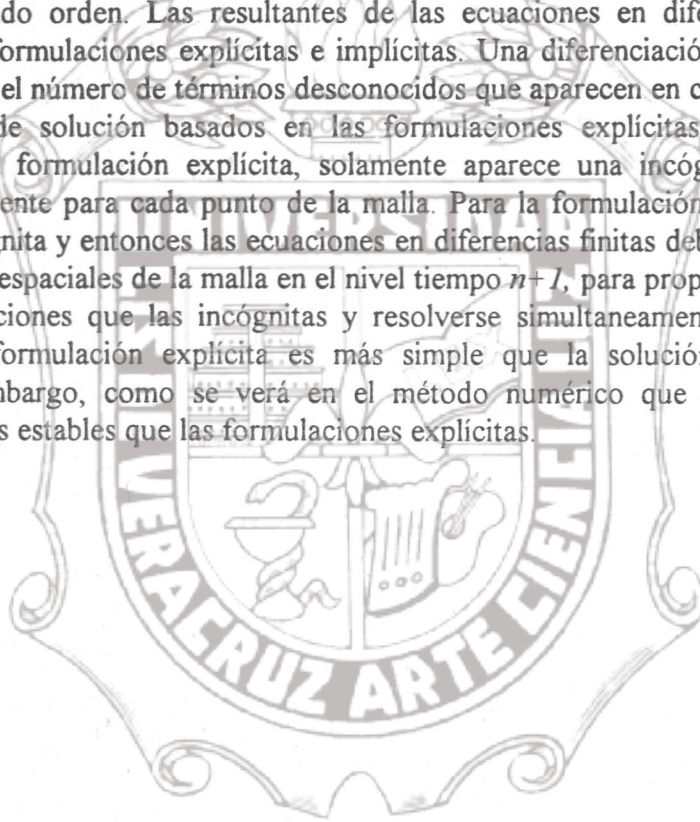
Las ecuaciones en diferencias finitas representan a las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas mediante ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones algebraicas se escriben para cada punto nodal de la malla del dominio. La solución de las ecuaciones de diferencias finitas proporcionan el valor de la variable dependiente en cada punto de la malla. El objetivo de esta técnica consiste en aproximar las ecuaciones diferenciales parciales mediante ecuaciones en diferencias finitas y definir técnicas numéricas para resolver las ecuaciones aproximadas resultantes.

Las características de las técnicas numéricas deben cumplir lo siguiente: (1) *Consistencia*: Una aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial, es consistente si la ecuación en diferencias finitas se aproxima a la ecuación diferencial parcial como el tamaño de la malla se aproxima a cero, (2) *Estabilidad*: Se dice que un método numérico es estable si un error que se introduce en la ecuación en diferencias finitas no crece con la solución de la ecuación en diferencia finita y (3) *Convergencia*: Un

método de diferencias finitas es convergente si la solución de la ecuación en diferencias finitas se aproxime a la ecuación diferencial parcial cuando el tamaño de la malla se aproxime a cero.

## 1.2 Ecuaciones Diferenciales en Diferencias Finitas

Existen ecuaciones de diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centrales de primero y segundo orden. Las resultantes de las ecuaciones en diferencias finitas se clasifican como formulaciones explícitas e implícitas. Una diferenciación clara de las dos formulaciones es el número de términos desconocidos que aparecen en cada ecuación. Los procedimientos de solución basados en las formulaciones explícitas e implícitas son diferentes. En la formulación explícita, solamente aparece una incógnita y puede ser resuelta directamente para cada punto de la malla. Para la formulación implícita, existen más de una incógnita y entonces las ecuaciones en diferencias finitas deben escribirse para todos los puntos espaciales de la malla en el nivel tiempo  $n+1$ , para proporcionar el mismo número de ecuaciones que las incógnitas y resolverse simultáneamente. Claramente la solución de la formulación explícita es más simple que la solución de formulación implícita. Sin embargo, como se verá en el método numérico que las formulaciones implícitas son más estables que las formulaciones explícitas.



## CAPITULO II

## ECUACIONES DE EULER

## 2.1 Consideraciones Generales

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido son las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales se encuentran en la literatura [Hoffmann (1989) B y White (1993) C] y se expresan en una forma más compacta utilizando una representación vectorial que se pueden escribir de la siguiente manera,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z} \quad (2.1.1)$$

las derivadas  $\partial E/\partial x$ ,  $\partial F/\partial y$  y  $\partial G/\partial z$  son los términos convectivos y las derivadas  $\partial E_v/\partial x$ ,  $\partial F_v/\partial y$  y  $\partial G_v/\partial z$  son los términos difusivos. Para un fluido sin efectos difusivos, los términos del lado derecho de la ec. (2.1.1) no aparecen y ésta se transforma en

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (2.1.2)$$

Debido a que nuestro interés fundamental está confinado a el estudio del movimiento de un fluido en una sola dimensión, resulta entonces que la ec. (2.1.2) se reduce a lo siguiente.

$$S \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} - H = 0 \quad (2.1.3)$$

Donde  $S$  es el área de la sección transversal del ducto por donde circula el flujo y se considera únicamente una función de la coordenada axial y  $H$  es el término fuente/sumidero. Esta última ecuación se conoce como **ecuación de Euler para un flujo unidimensional**. Mayores detalles sobre las ecuaciones de Euler multidimensionales pueden obtenerse en la literatura [Hoffmann (1989) D y White (1993) B].

Los vectores  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  están definidos por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = S \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_t + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

La Ec. (2.1.3) representa un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales; por consiguiente, para poder producir un sistema numéricamente estable se empleará un método implícito de diferencia finita, así, en el nivel tiempo  $n+1$  el término temporal se expresa como,

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^{n+1}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \quad (2.1.5)$$

que es una aproximación por diferencia finita de primer orden hacia adelante con respecto a la derivada tiempo, al sustituirla a la ec. (2.1.3) ésta se transforma en,

$$S \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} + \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right)^{n+1} - \mathbf{H}^{n+1} = 0 \quad (2.1.6)$$

donde los exponentes indican el tiempo en que se evalúa cada término, debido a que un método implícito, es aplicado los dos últimos términos se evaluarán en el nivel tiempo  $n+1$ .

Los cambios del vector de las variables dependientes del flujo están dadas por

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n \quad (2.1.7)$$

Si sustituimos la ec. (2.1.7) en la ec. (2.1.6) obtenemos,

$$S \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta t} + \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right)^{n+1} - \mathbf{H}^{n+1} = 0 \quad (2.1.8)$$

una formulación tipo Delta que ofrece gran estabilidad numérica.

Definimos el vector solución  $\mathbf{Q}$ , de la siguiente manera,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

para comodidad en desarrollos posteriores.

La ecuación de conservación de energía se expresa en términos de la energía interna total del flujo y esta dada por,

$$e_t = e + \frac{1}{2}u^2 \quad (2.1.10)$$

donde  $e$  indica la energía interna y el segundo término  $1/2 u^2$  es la energía cinética del gas.

Mediante el uso de la primera ley de la termodinámica se obtiene que  $e = p/\rho(\gamma-1)$  (véase Apéndice A), substituyendo en (2.1.10) resulta,

$$e_t = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}u^2$$

de donde

$$p = \rho(\gamma-1) e_t - \frac{1}{2}(\gamma-1)\rho u^2 \quad (2.1.11)$$

Expresando esta ecuación en función de los elementos  $q_1, q_2$  y  $q_3$  del vector solución  $Q$ , se obtiene la siguiente expresión

$$p = (\gamma-1)q_3 - \frac{(\gamma-1)q_2^2}{2q_1} \quad (2.1.12)$$

Los vectores  $E$  y  $H$  de la ec. (2.1.3) podrán ahora estar en función de los componentes  $q_i$  del vector solución  $Q$ , esto es

$$E = S \begin{bmatrix} q_2 \\ (\gamma-1)q_3 + (3-\gamma)\frac{q_2^2}{2q_1} \\ \gamma q_3 \frac{q_2}{q_1} - \frac{(\gamma-1)q_2^3}{2q_1^2} \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{H} = \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} 0 & (\gamma-1) \frac{q_2^2}{2} \\ (\gamma-1) q_3 & q_1 \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

## 2.2 Análisis Numérico

Debido a que la ec (2.1.3) es no lineal en  $Q$ , y además  $E(Q)$  es una función no lineal en  $Q$  [Nakumura (1992) E]. Procedemos a linealizarla, lo cual lo hacemos de acuerdo a la expansión de funciones en serie de Taylor que les aplicaremos a los términos  $E^{n+1}$  y  $H^{n+1}$  alrededor del nivel tiempo  $n$ , resultando esto

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\partial E^n}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t)^2 \quad (2.2.1)$$

$$H^{n+1} = H^n + \frac{\partial H^n}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t)^2 \quad (2.2.2)$$

siendo que  $E = E(Q, S)$ , entonces mediante el uso de la regla de la cadena, encontramos que

$$\frac{\partial E^n}{\partial t} = \frac{\partial E^n}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E^n}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.2.3)$$

Como se mencionó anteriormente,  $S$  solo depende de la coordenada axial, por consiguiente, el último término de la ecuación (2.2.3) se anula, resultando

$$\frac{\partial E^n}{\partial t} = \frac{\partial E^n}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \cong \frac{\partial E^n}{\partial Q} \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} = \frac{\partial E^n}{\partial Q} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2.2.4)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ec. (2.2.1) se obtiene lo siguiente

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\partial E^n}{\partial Q} \Delta Q + o(\Delta t)^2 \quad (2.2.5)$$

Como podemos observar, el último término de esta ecuación es de orden de magnitud dos, eliminando términos de orden superior resulta que,

$$\mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n + \frac{\partial \mathbf{E}^n}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q} \quad (2.2.6)$$

Para el tercer término de la ec. (2.1.6) se procede de forma semejante, resultando esto,

$$\mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}^n + \frac{\partial \mathbf{H}^n}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q} \quad (2.2.7)$$

Los términos  $\partial \mathbf{E}^n / \partial \mathbf{Q}$  y  $\partial \mathbf{H}^n / \partial \mathbf{Q}$  de las ecs. (2.2.6) y (2.2.7), se definen mediante una representación matricial que comúnmente se denominan las matrices Jacobianas del flujo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ ; por consiguiente, cada matriz jacobiana es de 3 x 3 respectivamente y matemáticamente se definen como  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{Q}$  esta dada por

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial q_1} & \frac{\partial E_1}{\partial q_2} & \frac{\partial E_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial E_2}{\partial q_1} & \frac{\partial E_2}{\partial q_2} & \frac{\partial E_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial q_1} & \frac{\partial E_3}{\partial q_2} & \frac{\partial E_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

Llevando a cabo la derivación de los elementos del vector  $\mathbf{E}$  de la ec. (2.1.13) con respecto a las variables dependientes  $q_i$ , la forma final del flujo jacobiano  $\mathbf{E}$  con sus elementos expresados en términos de las variables físicas se escribe como,

$$\mathbf{A} = S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{(3-\gamma)}{2}u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\gamma e_i u + (\gamma-1)u^3 & \gamma e_i - \frac{3(\gamma-1)}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Siguiendo en una forma similar, la matriz jacobiana del flujo  $\mathbf{B}$  se obtiene de la forma,

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} & \frac{\partial H_1}{\partial q_2} & \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial H_2}{\partial q_1} & \frac{\partial H_2}{\partial q_2} & \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial H_3}{\partial q_1} & \frac{\partial H_3}{\partial q_2} & \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

Y realizando las mismas operaciones anteriores para la ec. (2.1.14) se obtiene que

$$\mathbf{B} = \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2} u^2 & -(\gamma-1)u & (\gamma-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Sustituyendo la ecuación (A-8) del apéndice A, en la ec. (2.1.10) tenemos que

$$e_t = \frac{P}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2} u^2 \quad (2.2.10)$$

De la ec. (A-12) tenemos que  $p = a^2 \rho / \gamma$  que al sustituirla en la ec. (2.2.10) resulta,

$$e_t = \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{1}{2} u^2 \quad (2.2.11)$$

y por consiguiente, al sustituir la ec. (2.2.11) en la matriz A esta se transforma como,

$$\mathbf{A} = S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)u^2 & -(\gamma-3)u & (\gamma-1) \\ -\frac{a^2 u}{\gamma-1} + \left(\frac{1}{2}\gamma-1\right)u^3 & \frac{a^2}{(\gamma-1)} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

esto se realiza con la finalidad de simplificar los términos que involucran a la energía interna total que se encuentran en el tercer reglón de la matriz A.



Una vez hecha la linealización de los términos  $E^{n+1}$  y  $H^{n+1}$ , se sustituyen las matrices  $A$  y  $B$  en las ecs. (2.2.6) y (2.2.7) quedando así,

$$E^{n+1} = E^n + A^n \Delta Q \quad (2.2.13)$$

$$H^{n+1} = H^n + B^n \Delta Q \quad (2.2.14)$$

Antes de proponer el método numérico para resolver el sistema de las ecs. (2.1.3), se explicará algunas propiedades de estas ecuaciones diferenciales parciales con carácter hiperbólico. Este sistema de ecuaciones tiene la propiedad de que el vector  $E$ , es una función homogénea de primer grado en  $Q$ . Esto es, si  $\alpha$  es una constante escalar, entonces  $E(\alpha Q) = \alpha E(Q)$ . En general, las ecuaciones de Euler poseen esta propiedad. Recordemos que para que un sistema de ecuaciones sea clasificado como hiperbólico, es necesario que la matriz Jacobiana posea sólo valores propios reales, donde estos valores representan la dirección característica del sistema hiperbólico y así la dirección de propagación de la información. Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  los valores propios de  $A$  y  $x_1, x_2$  y  $x_3$  los vectores propios de  $A$  respectivamente y definamos la matriz diagonal  $D$ , tal que  $Diag(D) = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  y sea  $X$  la matriz cuyas columnas sean  $x_1, x_2$  y  $x_3$  de ahí que,  $A = XDX^{-1}$ . Estas observaciones matemáticas son importantes para el desarrollo del método numérico de las ecs. (2.1.3) y en la especificación de las condiciones de frontera.

Regresando a la matriz jacobiana del flujo  $A$  dada por la ec. (2.2.12) se procede a determinar los valores y vectores propios de  $A$  (véase el Apéndice B), donde los resultados de los valores propios de la matriz Jacobiana  $A$  son  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u + a$  y  $\lambda_3 = u - a$  y para los vectores propios de la matriz Jacobiano  $A$  tenemos que,

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u+a \\ \frac{1}{2}u^2 + ua + \frac{a^2}{\gamma-1} \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u-a \\ \frac{1}{2}u^2 - ua + \frac{a^2}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

Puesto que la matriz Jacobiano  $A$  posee valores y vectores propios, se cumple la siguiente igualdad  $A = XDX^{-1}$ , donde  $D$  representa la matriz diagonal de los valores propios de la matriz  $A$ ,  $X$  es el vector propio de la matriz Jacobiana  $A$  y  $X^{-1}$  es la matriz inversa del vector propio de  $X$ . De lo anterior se deduce que

$$D = S \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+a & 0 \\ 0 & 0 & u-a \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

y

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ u & \alpha(u+a) & \alpha(u-a) \\ \frac{1}{2}u^2 & \alpha\left(\frac{1}{2}u^2 + ua + \frac{a^2}{\gamma-1}\right) & \alpha\left(\frac{1}{2}u^2 - ua + \frac{a^2}{\gamma-1}\right) \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

donde  $\alpha = \rho/(a\sqrt{2})$ , y la matriz inversa del vector propio de X es

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{u^2}{2} \frac{\gamma-1}{a^2} & (\gamma-1) \frac{u}{a^2} & -\frac{(\gamma-1)}{a^2} \\ \beta \left[ (\gamma-1) \frac{u^2}{2} - ua \right] & \beta [a - (\gamma-1)u] & \beta(\gamma-1) \\ \beta \left[ (\gamma-1) \frac{u^2}{2} + ua \right] & -\beta [a + (\gamma-1)u] & \beta(\gamma-1) \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

donde  $\beta = 1/(\rho a \sqrt{2})$ .

Si  $A = \partial E / \partial Q \Rightarrow \partial E = A \cdot \partial Q$  al integrar nos resulta que  $E = A \cdot Q + c$  y al aplicar la propiedad de homogeneidad de  $E(Q)$ , se puede demostrar que  $c = 0$ , como se indica a continuación:  $0 = 0 \cdot E(Q) = E(0 \cdot Q) = A \cdot 0 \cdot Q + c = 0 \cdot A \cdot Q + c = c$ , se tiene entonces que  $E = A \cdot Q$ ; por consiguiente, se divide en submatrices donde cada submatriz se encuentra asociada con los valores propios positivos y negativos de la matriz jacobiana del flujo A. La matriz jacobiana A se descompone como

$$A = A^+ + A^- \quad (2.2.19)$$

donde

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{X}\mathbf{D}^+\mathbf{X}^{-1} \tag{2.2.20a}$$

y

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{X}\mathbf{D}^-\mathbf{X}^{-1} \tag{2.2.20b}$$

los elementos de la matriz diagonal  $\mathbf{D}^+$  es la misma que  $\mathbf{D}$ , excepto que los valores negativos de  $\mathbf{D}^-$  son reemplazados por ceros.  $\mathbf{D}^-$  es la misma que  $\mathbf{D}$ , excepto que los valores propios positivos  $\mathbf{D}^+$  son reemplazados por ceros. Para determinar  $\mathbf{A}^+$  y  $\mathbf{A}^-$  se realizan las operaciones algebraicas correspondientes dadas por las ecuaciones (2.2.20a) y (2.2.20b) obteniéndose para la matriz  $\mathbf{A}^+$  y la matriz  $\mathbf{A}^-$  las representaciones matriciales dadas por las ecuaciones (2.2.21) y (2.2.22), respectivamente.

De forma similar se descompone el vector flujo  $\mathbf{E}$  según,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- \tag{2.2.23}$$

de donde

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{Q} \tag{2.2.24a}$$

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{A}^- \mathbf{Q} \tag{2.2.24b}$$

y resolviendo las ecuaciones (2.2.24a) y (2.2.24b) se obtiene lo siguiente

$$\mathbf{E}^+ = S \frac{\rho}{2\gamma} \left[ \begin{array}{c} 2\gamma u + a - u \\ 2(\gamma - 1)u^2 + (u + a)^2 \\ (\gamma - 1)u^3 + \frac{(u + a)^3}{2} + \frac{(3 - \gamma)(u + a)a^2}{2(\gamma - 1)} \end{array} \right] \tag{2.2.25}$$

$$\mathbf{E}^- = S \frac{\rho}{2\gamma} \left[ \begin{array}{c} u - a \\ (u - a)^2 \\ \frac{(u - a)^3}{2} + \frac{(3 - \gamma)(u - a)a^2}{2(\gamma - 1)} \end{array} \right] \tag{2.2.26}$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\begin{aligned}
 A^+ = S &= \frac{(y-1)u^3 + a(3-\gamma)u^2 - 2a^2u}{(y-1)u^4 + 2a(2-\gamma)u^3 + a^2(1-\gamma)u^2 + 2a^3u} \\
 &= \frac{(y-1)u^3 + a(3-\gamma)u^2 - 2a^2u}{(y-1)u^4 + (-3\gamma^2 + 8\gamma - 5)au^3 - 2a^2(\gamma-1)^2u^2 + 2a^2(\gamma+1)u + 4a^3u} \\
 &= \frac{(y-1)u^3 + a(2-\gamma)u + a^2}{(y-1)u^3 + a(3-2\gamma)u^2 + a^2(3-\gamma)u + a^3} \\
 &= \frac{(y-1)u - \gamma a + a}{(y-1)u^2 + 2a(1-\gamma)u - \gamma a^2 + a^2} \\
 &= \frac{(y-1)u^2 + 3a(1-\gamma)u^2 - 2\gamma a^2u - 2a^3}{4a^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.21}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(u-a)[(\gamma-1)u+a]}{(u-a)^2[(\gamma-1)u+a]} \\
 &= \frac{(u-a)\left[\frac{1}{2}u^2 - au + \frac{a^2}{\gamma-1}\right]}{(u-a)\left[\frac{1}{2}u^2 - au + \frac{a^2}{\gamma-1}\right]} \\
 &= \frac{(u-a)\left[\frac{1}{2}u^2 - au + \frac{a^2}{\gamma-1}\right]}{4a^2} \\
 &= \frac{(u-a)\left[\frac{1}{2}u^2 - au + \frac{a^2}{\gamma-1}\right]}{4a^2} \\
 &= \frac{(u-a)\left[\frac{1}{2}u^2 - au + \frac{a^2}{\gamma-1}\right]}{4a^2} \\
 &= \frac{(u-a)\left[\frac{1}{2}u^2 - au + \frac{a^2}{\gamma-1}\right]}{4a^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.22}$$

2.3 Discretización de las Ecuaciones

Regresando a la ec. (2.1.8), donde sustituimos las ecs. (2.2.13) y (2.2.14) dando como resultado la linealización del sistema hiperbólico que se representa de la siguiente manera.

$$S \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E}^n + \mathbf{A} \Delta Q) - (\mathbf{H}^n + \mathbf{B} \Delta Q) = 0 \tag{2.3.1}$$

Multiplicando por  $\Delta t$  y factorizando se transforma en lo siguiente,

$$\left\{ S \mathbf{I} + \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \mathbf{B} \right] \Delta t \right\} \Delta Q = - \left( \frac{\partial \mathbf{E}^n}{\partial x} - \mathbf{H}^n \right) \Delta t \tag{2.3.2}$$

esta última ecuación se puede observar que los términos del lado derecho están evaluados en el tiempo conocido  $n$  y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

Como se explicó anteriormente, la matriz Jacobiana del flujo  $\mathbf{A}$  se descompone según la ec. (2.2.19) y de la misma manera el vector del flujo  $\mathbf{E}$  de acuerdo a la ec. (2.2.23), entonces estas ecuaciones las introducimos a la ec. (2.3.2) resultando esto,

$$\left\{ S \mathbf{I} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-) - \mathbf{B} \right] \Delta t \right\} \Delta Q = - \left( \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-) - \mathbf{H}^n \right) \Delta t \tag{2.3.3}$$

En investigaciones realizadas por [Steger y Warming (1979) F] indican que para llevar a cabo un análisis de estabilidad numérica mediante un método implícito, resulta conveniente usar una diferenciación de un sólo lado con respecto a la derivada espacial. Por consiguiente, la ec. (2.3.3) se discretiza mediante una aproximación en diferencias finitas de primer orden hacia adelante para los términos negativos y una aproximación de diferencias finitas de primer orden hacia atrás a los términos positivos, como resultado la ec. (2.3.3) se escribe así,

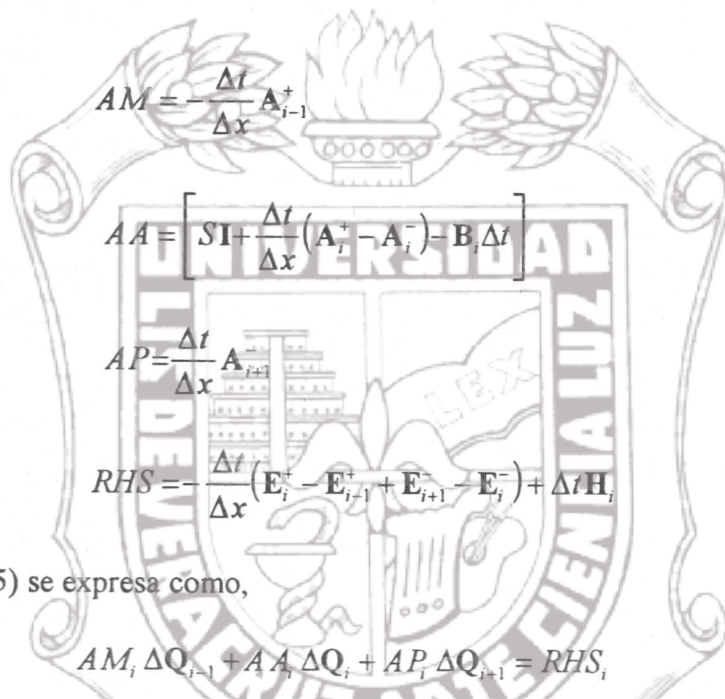
$$\left\{ S \mathbf{I} + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_i^+ - \mathbf{A}_{i-1}^+ + \mathbf{A}_{i+1}^- - \mathbf{A}_i^-) - \mathbf{B}_i \Delta t \right] \right\} \Delta Q = - \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{E}_i^+ - \mathbf{E}_{i-1}^+ + \mathbf{E}_{i+1}^- - \mathbf{E}_i^-) - \mathbf{H}_i \right) \tag{2.3.4}$$

reacomodando términos tenemos que,

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+\right) \Delta Q_{i-1} + \left[SI + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_i^+ - A_i^-) - \Delta t B_i\right] \Delta Q_i \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i+1}^-) \Delta Q_{i+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (E_i^+ - E_{i-1}^+ + E_{i+1}^- - E_i^-) + \Delta t H_i
 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Escribiendo esta ecuación en una forma más conveniente, se definen los siguientes términos,



$$\begin{aligned}
 AM &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ \\
 AA &= \left[SI + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_i^+ - A_i^-) - B_i \Delta t\right] \\
 AP &= \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^- \\
 RHS &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} (E_i^+ - E_{i-1}^+ + E_{i+1}^- - E_i^-) + \Delta t H_i
 \end{aligned}$$

Así, la ec. (2.3.5) se expresa como,

$$AM_i \Delta Q_{i-1} + AA_i \Delta Q_i + AP_i \Delta Q_{i+1} = RHS_i \tag{2.3.6}$$

Esta ecuación se resolverá para una región dividida en  $NP$  intervalos de igual longitud en la coordenada axial, obteniéndose un dominio como el de la Figura 1, donde los intervalos de longitud valen  $\Delta x = L/(NP - 1)$ , de ahí que,  $L$  es la longitud del dominio y  $(NP - 1)$  es el número de nodos empleados en el dominio. Una vez que esta ecuación se aplica a todos los nodos  $i$  desde  $i = 2$  hasta  $i = NP - 1$ , da como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas.

$$i = 2: AM_2 \Delta Q_1 + AA_2 \Delta Q_2 + AP_2 \Delta Q_3 = RHS_2 \tag{2.3.7a}$$

$$i = 3: AM_3 \Delta Q_2 + AA_3 \Delta Q_3 + AP_3 \Delta Q_4 = RHS_3 \tag{2.3.7b}$$

$$i = 4: AM_4 \Delta Q_3 + AA_4 \Delta Q_4 + AP_4 \Delta Q_5 = RHS_4 \tag{2.3.7c}$$

$\vdots =$

$$i = NP - 2: AM_{NP-2} \Delta Q_{NP-3} + AA_{NP-2} \Delta Q_{NP-2} + AP_{NP-2} \Delta Q_{NP-1} = RHS_{NP-2} \tag{2.3.7d}$$

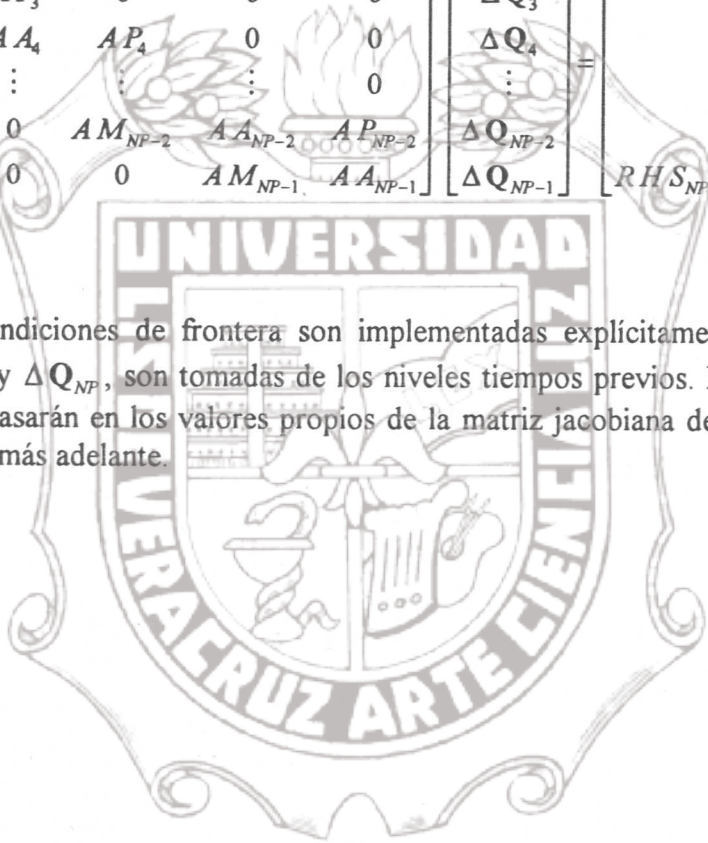
$$i = NP - 1: AM_{NP-1} \Delta Q_{NP-2} + AA_{NP-1} \Delta Q_{NP-1} + AP_{NP-1} \Delta Q_{NP} = RHS_{NP-1} \tag{2.3.7e}$$

Estas ecuaciones serán representadas en una forma matricial, donde los coeficientes de las matrices forman un **Sistema Tridiagonal de Bloques** que se escribe matemáticamente así,

$$\begin{bmatrix}
 AA_2 & AP_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 AM_3 & AA_3 & AP_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & AM_4 & AA_4 & AP_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & AM_{NP-2} & AA_{NP-2} & AP_{NP-2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & AM_{NP-1} & AA_{NP-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta Q_2 \\
 \Delta Q_3 \\
 \Delta Q_4 \\
 \vdots \\
 \Delta Q_{NP-2} \\
 \Delta Q_{NP-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 RHS_2 - AM_2 \Delta Q_1 \\
 RHS_3 \\
 RHS_4 \\
 \vdots \\
 RHS_{NP-2} \\
 RHS_{NP-1} - AP_{NP-1} \Delta Q_{NP}
 \end{bmatrix}$$

(2.3.8)

Si las condiciones de frontera son implementadas explícitamente, entonces los valores de  $\Delta Q_1$  y  $\Delta Q_{NP}$ , son tomadas de los niveles tiempos previos. Estas condiciones de fronteras se basarán en los valores propios de la matriz jacobiana del flujo **A**, lo cual serán explicados más adelante.



Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

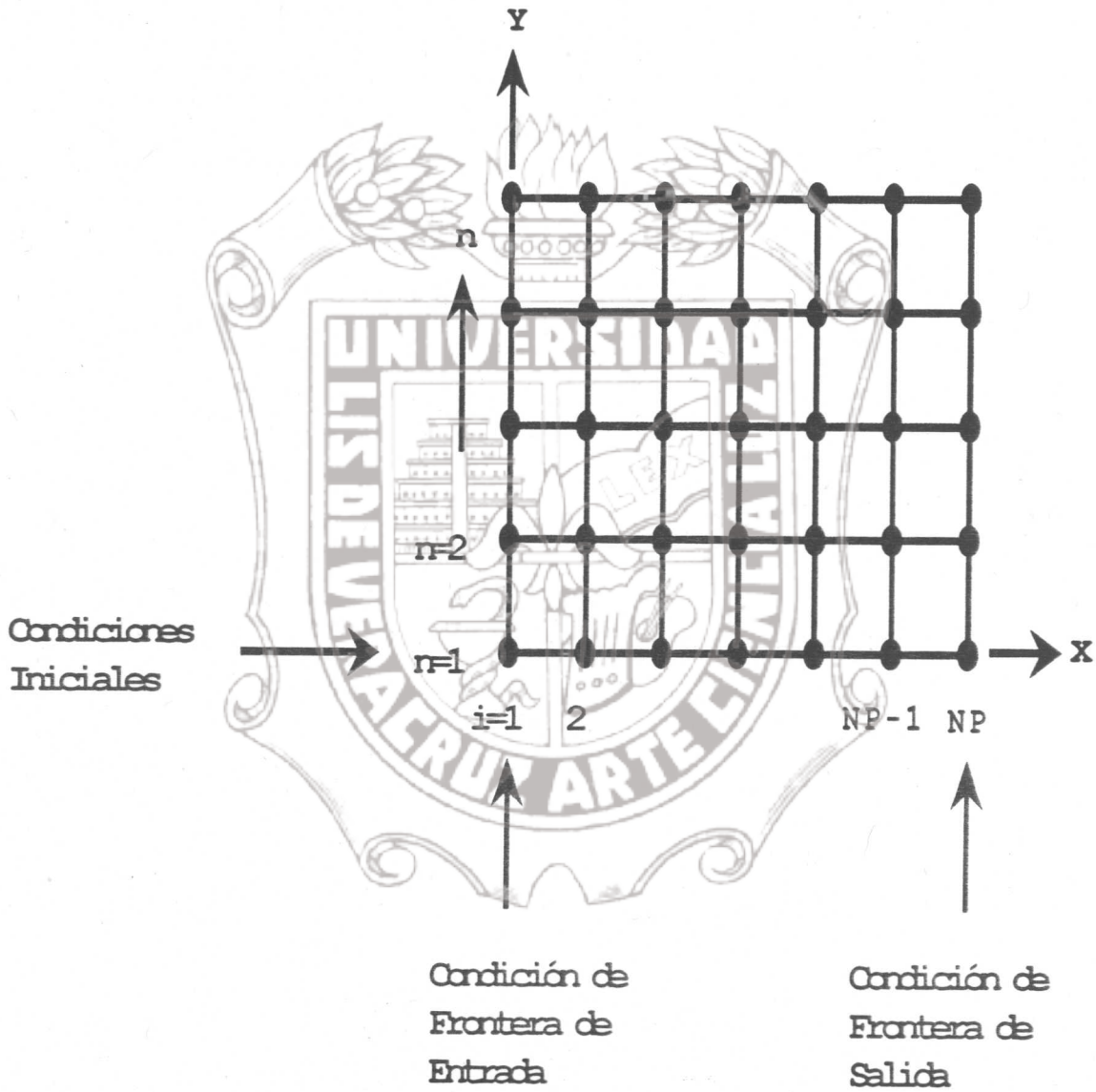


Figura 1. Dominio físico empleado para la solución de la ecuación (2.3.6).



## 2.4 Condiciones de Frontera del tipo Derichlet

En los problemas de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas unidimensionales con valores en la frontera, se pide que la solución satisfaga las condiciones de frontera en ambos extremos del dominio unidimensional. Por lo tanto, a nuestro sistema hiperbólico dado por la ec. (2.3.6) se deben establecer las condiciones de frontera con datos analíticos obtenidos de la literatura [Hoffmann (1989) G]. Una vez que a las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas son aproximadas por diferencias finitas estas necesitan condiciones de frontera numéricas, que serán especificadas mediante una aproximación implícita que consiste en una extrapolación desde los puntos interiores de salida del dominio.

Recordemos que los valores propios de la matriz Jacobiana del flujo  $A$  son  $u$ ,  $u+a$  y  $u-a$ , ya que estos valores propios nos indican como la información es alimentada al dominio. Por consiguiente, consideremos dos casos de flujo 1) flujo supersónico en la entrada y flujo supersónico en la salida, 2) flujo supersónico en la entrada y un flujo subsónico en la salida.

Para el caso 1, los tres valores propios de  $A$  son positivos en la entrada y por consiguiente, las variables dependientes del flujo (densidad, velocidad y energía interna total) entrarán al dominio como condiciones de frontera analíticas que se inicializan y en la salida las variables dependientes del flujo abandonan el dominio y como un resultado las condiciones numéricas no se pueden especificar arbitrariamente. Por lo que, estas condiciones deben ser consistente con la dirección de propagación de información determinada por el signo de los valores propios de  $A$ . Por lo tanto, los valores de estas variables dependientes del flujo saldrán del dominio como positivos y serán evaluadas a partir de la información alcanzada desde los puntos interiores de salida del dominio. Estas evaluaciones se llevarán a cabo mediante una aproximación implícita que consiste en una extrapolación, donde los valores se determinan en el nivel tiempo  $n+1$  como parte de la solución. Para la extrapolación se empleará la propiedad  $f$  en  $i = NP$  desde los puntos interiores de salida del dominio en  $NP-1$  y  $NP-2$  que se representan así [Hoffmann (1989) H].

$$f_{NP}^{n+1} = 2f_{NP-1}^{n+1} - f_{NP-2}^{n+1} \quad (2.4.1)$$

donde  $f$  es sustituido por las variables dependientes del flujo que son densidad, velocidad y energía interna total.

Para el caso 2 que el flujo es subsónico a la salida. Los tres valores propios son positivos en la entrada por lo que, a las variables dependientes del flujo se especifican como condiciones de frontera analíticas y a la salida dos valores propios son positivos y uno es negativo. Por lo tanto, dos valores de las variables dependientes del flujo se

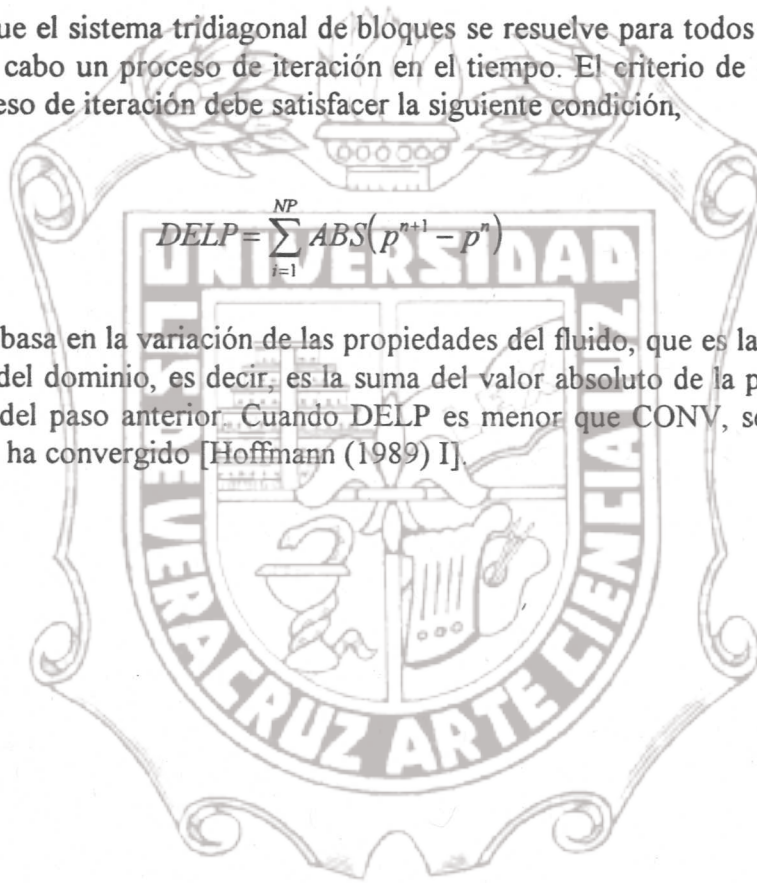
determinan mediante una extrapolación y para el valor negativo se especifica como condición analítica en la salida, que este caso particular lo hacemos con la velocidad.

Estableciéndose las condiciones de frontera en todos los puntos a la entrada y salida del dominio (estas condiciones de frontera son del tipo Dirichlet) se procede a realizar la solución del sistema tridiagonal de bloques formado por las ecs. (2.3.8). El método que se usará para nuestro algoritmo es el de descomposición en LU. Véase el Apéndice C.

Una vez que el sistema tridiagonal de bloques se resuelve para todos los nodos es necesario llevar a cabo un proceso de iteración en el tiempo. El criterio de convergencia (CONV) del proceso de iteración debe satisfacer la siguiente condición,

$$DELP = \sum_{i=1}^{NP} ABS(p^{n+1} - p^n) \quad (2.4.2)$$

Esta condición se basa en la variación de las propiedades del fluido, que es la variación de la presión dentro del dominio, es decir, es la suma del valor absoluto de la presión actual menos la presión del paso anterior. Cuando DELP es menor que CONV, se dice que la solución numérica ha convergido [Hoffmann (1989) I].



## CAPITULO III

## CASOS DE ESTUDIO

## 3.1 Aspectos Generales de los Fluidos a Estudiar

Se realizará la simulación numérica con un programa de computo para estudiar los fenómenos de transporte de masa, momento y energía en un ducto divergente por donde circula un fluido ideal. Para llevar a cabo tal simulación se utilizará una velocidad supersónica a la entrada del ducto y el fluido abandonará el ducto bajo dos diferentes condiciones específicas como (1) supersónico y (2) subsónico; el dominio físico se ilustra en la Figura 2.

Las propiedades del fluido en la entrada del ducto son las siguientes:

Distancia del ducto divergente en la coordenada axial	$x = 10 \text{ m}$
Número de Mach	$M_1 = 1.5$
Presión del gas	$p_1 = 47,800 \text{ N m}^{-2}$
Densidad del gas	$\rho_1 = 1.22 \text{ Kg m}^{-3}$
Relación de capacidad calorífica	$\gamma = 1.4$
Velocidad del sonido	$a = 234.0 \text{ m s}^{-1}$

Se define el área de la sección transversal del ducto divergente por donde circula el fluido en función de la coordenada axial como

$$S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(0.8x - 4.0) \quad (3.1.1)$$

Recordemos que nuestras variables dependientes del flujo de las ecuaciones de Euler son  $\rho$ ,  $u$  y  $e$ , en la entrada. Por lo tanto, se necesitan determinar las propiedades del fluido restante que son la velocidad y energía interna total del gas; por consiguiente las siguientes relaciones se utilizarán para determinar  $u_1$  y  $e_1$  en la entrada, [Hoffmann (1989) G]

$$u_1 = M_1 \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \quad (3.1.2)$$

sustituyendo los valores de las variables correspondientes en (3.1.2) resulta esto,



Figura 2. Ducto divergente con una sección transversal variable donde circula un gas solamente en la dirección axial.

$$u_1 = 352.00 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$e_{t_1} = \frac{p_1}{\rho_1 (\gamma - 1)} + \frac{1}{2} u_1^2 \quad (3.1.3)$$

$$e_{t_1} = 159,000.00 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Para determinar las variables dependientes del flujo en la salida del dominio, se utilizarán las condiciones de frontera numéricas dada por la ec. (2.4.1), que estas serán evaluadas mediante la extrapolación implícita como se indican

$$\rho_{NP}^{n+1} = 2 \rho_{NP-1}^{n+1} - \rho_{NP-2}^{n+1} \quad (3.1.4)$$

$$u_{NP}^{n+1} = 2 u_{NP-1}^{n+1} - u_{NP-2}^{n+1} \quad (3.1.5)$$

$$e_{tNP}^{n+1} = 2 e_{tNP-1}^{n+1} - e_{tNP-2}^{n+1} \quad (3.1.6)$$

### 3.2 Caso 1

El fluido entra al ducto como supersónico y por consiguiente, las propiedades del fluido se especificaron anteriormente como  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $e_{t_1}$  y  $p_1$  que estas serán las condiciones de frontera en la entrada. El flujo en la salida es supersónico, por lo tanto, las condiciones de frontera no se pueden especificar, lo cual se determinan las variables de flujo a la salida utilizando las ecs. (3.1.4) hasta (3.1.6).

El dominio se discretiza en la dirección axial, siendo el intervalo axial de  $\Delta x = 0.03448 \text{ m}$  y el intervalo del tiempo inicial es de  $1.0 \text{ E-06 seg}$ . Después establecemos todas las variables de flujo dentro del dominio iguales a los valores de entrada. Con estos datos iniciales se realiza un proceso de iteración donde se itera todo el proceso de las variables dependientes del flujo del paso anterior hasta obtener los valores actualizados. Una vez que la solución cumple con el criterio de convergencia de la ec. (2.4.2), se obtiene la solución estacionaria después de 400 iteraciones aproximadamente y con un nivel de tiempo final de  $0.0004 \text{ seg}$ .

## 3.3 Caso 2

La segunda consideración consiste en que el flujo es subsónico en la salida. Uno de los valores propios es negativo para el valor propio  $[u-a]$ , lo cual una de las características esta suministrando información hacia el dominio. De ahí que, una de las condiciones de frontera analíticas en la salida se especificará; la especificación puede llevarse por definición de la  $\rho, u$  ó  $p$  en la salida, en este caso se especifica la velocidad en la salida tal que  $u_{NP} = 119.00 \text{ m s}^{-1}$  donde este valor de la velocidad a la salida debe dar origen a una onda de choque localizada en algún punto interno del dominio.

Se establecen las condiciones iniciales requeridas dadas por:

Distancia del ducto divergente	$x = 10 \text{ m}$
Número de Mach	$M_1 = 1.5$
Velocidad del gas de entrada	$u = 352.00 \text{ m s}^{-1} \quad x \leq 2.8 \text{ m}$
Velocidad del gas de salida	$u_{NP} = 119.00 \text{ m s}^{-1} \quad x \geq 2.8 \text{ m}$
Presión del gas	$p_1 = 47,800.00 \text{ N m}^{-2}$
Densidad del gas	$\rho_1 = 1.22 \text{ Kg m}^{-3}$
Energía interna total del gas	$e_{t1} = 159,000.00 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}$
Relación de la capacidad calorífica	$\gamma = 1.4$
Velocidad del sonido	$a = 234.00 \text{ m s}^{-1}$

El fluido entra al ducto como supersónico y por consiguiente las variables de flujo se especificaron anteriormente como  $\rho_1, u_1, e_{t1}$  y  $p_1$  que estas serán las condiciones de frontera a la entrada, el flujo en la salida es subsónico por lo tanto, una de las condiciones de frontera analíticas se especifica siendo la velocidad y las otras variables dependientes del flujo se determinan mediante una extrapolación implícita, de ahí que, se emplearán las siguientes ecuaciones

$$\rho_{NP}^{n+1} = 2 \rho_{NP-1}^{n+1} - \rho_{NP-2}^{n+1}$$

$$e_{tNP}^{n+1} = 2 e_{tNP-1}^{n+1} - e_{tNP-2}^{n+1}$$

Para obtener la solución estacionaria se discretiza el dominio, igualmente los intervalos de los nodos del dominio en la dirección axial, siendo de  $\Delta x = 0.03448 \text{ m}$  e intervalo del tiempo inicial de  $5.0 \text{ E-}07 \text{ seg}$ . Una vez fijadas todas las variables del flujo en el dominio interno a los valores de la entrada se realiza una aplicación de condición en la dirección axial donde la velocidad en la salida cambia a un flujo subsónico. Después se realiza un proceso de iteración hasta alcanzar el criterio de convergencia dado por la ec. (2.4.2), de

esta manera la solución numérica se ha obtenido después de 1550 iteraciones aproximadamente y con un nivel de tiempo de 7.555 E-04 seg.

TABLA 1

**DATOS DE LA SOLUCION ANALITICA PARA UN DUCTO DIVERGENTE  
CON FLUJO SUPERSONICO EN LA ENTRADA Y UN FLUJO SUPERSONICO  
EN LA SALIDA**

X (m)	A (m <sup>2</sup> )	P (N/m <sup>2</sup> )	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Mach
0.0	1.0512	47,892.92	1.22	1.500
3.0	1.0782	45,186.78	1.17	1.540
4.2	1.2020	35,090.99	0.978	1.710
4.8	1.3290	28,781.13	0.850	1.840
5.6	1.5528	21,451.14	0.688	2.030
6.8	1.7081	17,775.38	0.603	2.150
8.0	1.7393	17,365.90	0.591	2.165
10.0	1.7448	17,241.37	0.588	2.170

TABLA 2

**DATOS DE LA SOLUCION ANALITICA PARA UN DUCTO DIVERGENTE  
CON FLUJO SUPERSONICO EN LA ENTRADA Y UN FLUJO SUBSONICO  
EN LA SALIDA**

X (m)	A (m <sup>2</sup> )	P (N/m <sup>2</sup> )	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Mach
0.0	1.0512	47,892.72	1.22	1.50
3.0	1.0782	45,186.78	1.17	1.54
4.2	1.2020	35,090.55	0.990	1.71
5.0	1.3980	25,842.91	0.788	1.91
5.01	1.3980	105,680.07	1.990	0.59
6.0	1.6284	114,976.05	2.114	0.47
7.0	1.7178	117,102.49	2.139	0.44
10.0	1.7448	117,796.93	2.150	0.43

## CAPITULO IV

## COORDENADAS GENERALIZADAS

## 4.1 Transformación de las Metrics

Se implementara a las ecuaciones de Euler transformaciones del plano físico al plano computacional, a estas transformaciones se les conoce como coordenadas generalizadas, ya que estas transformaciones simplifican drásticamente las manipulaciones de las condiciones de frontera y permite que los puntos del dominio se agrupen en regiones donde las variables de flujo sufren altos gradientes. El dominio computacional tiene una configuración rectangular que se divide en un sistema de malla con iguales espaciamientos en los nodos.

Las ecuaciones de Euler se transforman de las coordenadas cartesianas a coordenadas generales curvilíneas por,

$$\tau = \tau(t, x) \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon(t, x) \quad (4.1.1)$$

Las transformaciones son elegidas así que los espacios de la malla en el espacio curvilínea es uniforme y de longitud unitaria. Este procedimiento sobre el plano computacional  $\varepsilon$ , la cual es un dominio rectangular y es una malla uniformemente regular, así que se puede usar en la formulación numérica. Los espacios cartesianos originales serán referidos como el dominio físico considerado, mientras que el plano transformado será llamado dominio computacional.

Realizando la derivación de las transformaciones de coordenadas mediante el uso de la regla de cadena se tiene que,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \quad (4.1.3)$$



donde las derivadas parciales serán denotas por las notaciones  $\partial \varepsilon / \partial x = \varepsilon_x$ ,  $\partial \varepsilon / \partial t = \varepsilon_t$ , y las derivadas  $\partial \tau / \partial t = 1$ ,  $\partial \tau / \partial x = 0$ . Por consiguiente, las ecs. (4.1.2) y (4.1.3) quedan expresadas de la siguiente manera,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon_t \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tag{4.1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon_x \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tag{4.1.5}$$

Los términos  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_t$  que aparecen en las ecs. (4.1.4) y (4.1.5), son las derivadas de transformación. Se definen como la transformación de metrics ó simplemente como metrics, que su interpretación es la siguiente aproximación  $\varepsilon_x = \partial \varepsilon / \partial x \cong \Delta \varepsilon / \Delta x$ . Esta expresión nos indica la relación del arco de longitud en el plano computacional al plano físico.

Por otro lado tenemos las derivadas totales de las coordenadas dadas por (4.1.1)

$$d\tau = \tau_t dt + \tau_x dx \tag{4.1.6}$$

$$d\varepsilon = \varepsilon_t dt + \varepsilon_x dx \tag{4.1.7}$$

Como  $\tau$  no depende de la coordenada  $\varepsilon$  se anula y realizando una expresión matemática en forma compacta vectorial tenemos que,

$$\begin{pmatrix} d\tau \\ d\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_t & 0 \\ \varepsilon_t & \varepsilon_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} \tag{4.1.8}$$

y las transformaciones de coordenadas inversas son,

$$t = t(\tau, \varepsilon) \quad , \quad x = x(\tau, \varepsilon) \tag{4.1.9}$$

análogamente como se obtuvo en (4.1.8) encontramos,

$$\begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_\tau & 0 \\ x_\tau & x_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ d\varepsilon \end{pmatrix} \tag{4.1.10}$$

Sustituyendo la ec. (4.1.8) en (4.1.10), llegamos a esto

$$\begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_\tau & 0 \\ x_\tau & x_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_t & 0 \\ \varepsilon_t & \varepsilon_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} \tag{4.1.11}$$

Ahora definamos a  $W, C, B$  como

$$W = \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} t_\tau & 0 \\ x_\tau & x_\epsilon \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \tau_t & 0 \\ \epsilon_t & \epsilon_x \end{pmatrix}$$

Si el sistema es  $W = CW$  con  $C = AB$  y dado que  $W \neq 0$  entonces  $C = I$ , donde  $B = A^{-1}$ . Calculando directamente la inversa de  $A$  resulta

$$A^{-1} = \frac{1}{t_x x_\epsilon} \begin{pmatrix} x_\epsilon & 0 \\ -x_\tau & t_\tau \end{pmatrix} \tag{4.1.12}$$

igualando la ec. (4.1.12) con  $B = A^{-1}$  resulta

$$\begin{pmatrix} \tau_t & 0 \\ \epsilon_t & \epsilon_x \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_\epsilon & 0 \\ -x_\tau & t_\tau \end{pmatrix} \tag{4.1.13}$$

Donde  $J^{-1} = t_\tau x_\epsilon$ , dado que  $J$  es la razón del área del plano físico al plano computacional; por consiguiente, realizando las operaciones correspondientes de la ec. (4.1.13) encontramos los términos de las metrics siendo las siguientes

$$t_\tau = J \epsilon_x, \quad \tau_t = J x_\epsilon, \quad \epsilon_t = 0 \tag{4.1.14}$$

Observando que para un sistema de malla estable  $\epsilon_t = 0$  y  $\tau_t = 1$ , de ahí que, las metrics se obtienen,

$$\epsilon_x = J, \quad x_\epsilon = \frac{1}{J}, \quad \epsilon_t = 0 \tag{4.1.15}$$

## 4.2 Aplicación de las Coordenadas Generalizadas a las Ecuaciones de Euler

Regresando a la ec. (2.1.3) se le aplicarán coordenadas generalizadas de esta manera, sustituimos las ecs. (4.1.4) y (4.1.5) en la ec. (2.1.3) como resultado es,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (S Q) + \epsilon_x \frac{\partial E}{\partial \epsilon} - H = 0 \tag{4.2.1}$$

Como  $S$  no es una función dependiente del tiempo resulta entonces que,

$$S \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \varepsilon_x \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} - H = 0 \quad (4.2.2)$$

dividiendo esta última ecuación por  $J$  jacobiana y reacomonando términos nos resulta así,

$$S \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon} - \bar{H} = 0 \quad (4.2.3)$$

donde

$$\bar{Q} = \frac{Q}{J}, \quad \bar{E} = E, \quad \bar{H} = \frac{H}{J}$$

La linealización y el método numérico es análogamente al que se empleó en el capítulo dos, véase el apéndice D que se presentará en una forma compacta el desarrollo de la ecuación (4.2.3).

Las evaluaciones de las metrics para la transformación de coordenadas generalizadas serán evaluadas numéricamente mediante el uso de aproximaciones con diferencias finitas centrales de primer orden.

### 4.3 Generación de un Sistema de Malla

La generación de un sistema de malla, con espacios uniformes es un ejercicio sencillo dentro de un dominio físico rectangular. Los puntos de la malla pueden especificarse como coincidente con las fronteras del dominio físico, de esta manera hacemos la especificación de las condiciones de frontera considerablemente menos complejas. Desafortunadamente, la mayor parte de los dominios físicos de interés no son rectangulares. Por consiguiente, imponer un dominio computacional rectangular sobre un dominio físico necesitará algunos tipos de interpolación para la implementación de las condiciones de frontera. Puesto que las condiciones de frontera tienen una influencia en la solución de las ecuaciones, tales interpolaciones causan errores en los lugares de máxima sensibilidad. Además, los espacios de la malla desiguales cercanos a las fronteras crean complicaciones más adelante con las ecuaciones en diferencias finitas (EDF) entonces las aproximaciones con tamaño de etapas iguales pueden usarse. Esta forma de las EDF cambian de nodo a nodo, creando programas difíciles de manejar.

Para superar estas dificultades, una transformación del plano físico al plano computacional se introduce. Esta transformación se logra mediante una especificación a un sistema de coordenadas generalizadas lo cual será un mapeo al sistema de malla no

rectangular en el plano físico a una malla de espacios uniformes en el plano computacional.

Las técnicas para la generación de malla se clasifican como: (1) método algebraico, (2) métodos de diferenciales parciales. Además, el sistema de malla puede ser categorizado como estable ó adaptive. Evidentemente un sistema de malla estable es generado antes de la solución de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido y restante de la solución independiente. Por otro lado, un sistema de malla adaptive entra como un resultado de la solución de las ecuaciones de movimiento, es decir, los puntos pueden moverse hacia las regiones de altos gradientes tales como, en la proximidad de una onda de choque.

La técnica más sencilla para la llevar a cabo la generación de un sistema de malla es el método algebraico, la ventaja de este método es la velocidad con la cual una malla puede generarse. Este método se utiliza para relacionar los puntos de la malla en el plano computacional a aquellos del plano físico, como un ejemplo es para el caso de dos dimensiones que se representan en las figuras 3 y 4. En nuestro caso particular, es una malla con agrupamientos de nodos desiguales en el plano físico en la dirección axial y para el plano computacional es una malla con iguales espaciamentos en la dirección  $\xi$  que va de 0 a 1. Por consiguiente, para el segundo caso que se consideró donde el flujo entraba como supersónico y salía como subsónico en el ducto divergente y se formaba una onda de choque ocasionando un incremento de presión a través de la onda en una distancia axial aproximadamente de 5 mts.

La exactitud calculada de gradientes de flujo en estas regiones se requiere muchos puntos dentro del dominio. Más bien que usando una distribución de malla aproximadamente uniforme en el dominio físico, los puntos de la malla pueden agruparse en la regiones donde las variables de flujo sufren altos gradientes, la cual reduce el número total de los puntos de la malla y así aumentar la eficiencia. De esta manera utilizaremos la siguiente geometría para el plano físico [Hoffmann (1989) J] donde se agrupen los puntos en el interior del dominio, siendo la siguiente relación,

$$x_i = D \left\{ 1 + \frac{\sinh[\beta(\xi_i - A)]}{\sinh(\beta A)} \right\} \quad (4.3.1)$$

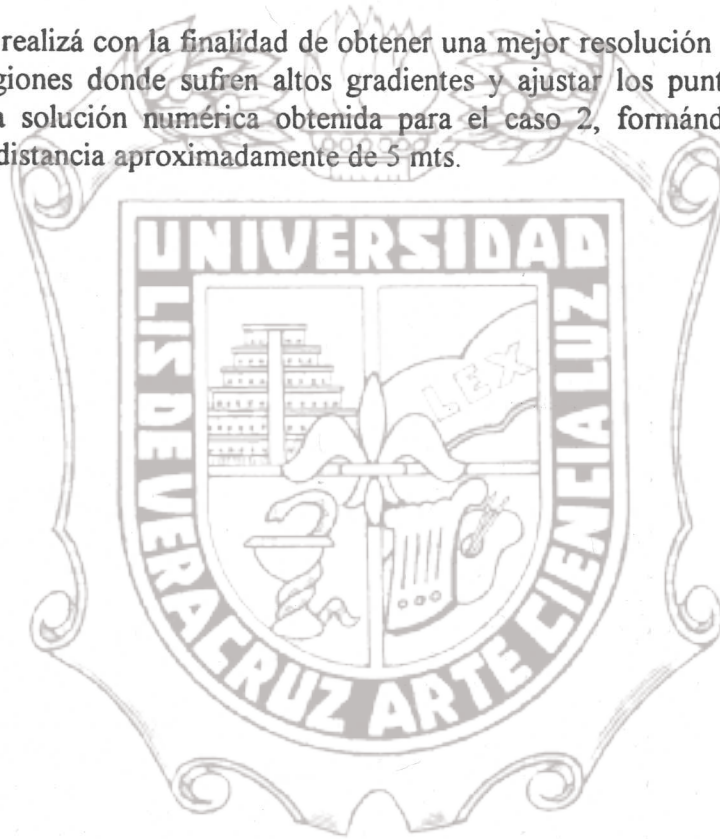
Donde A es una constante y esta definida como,

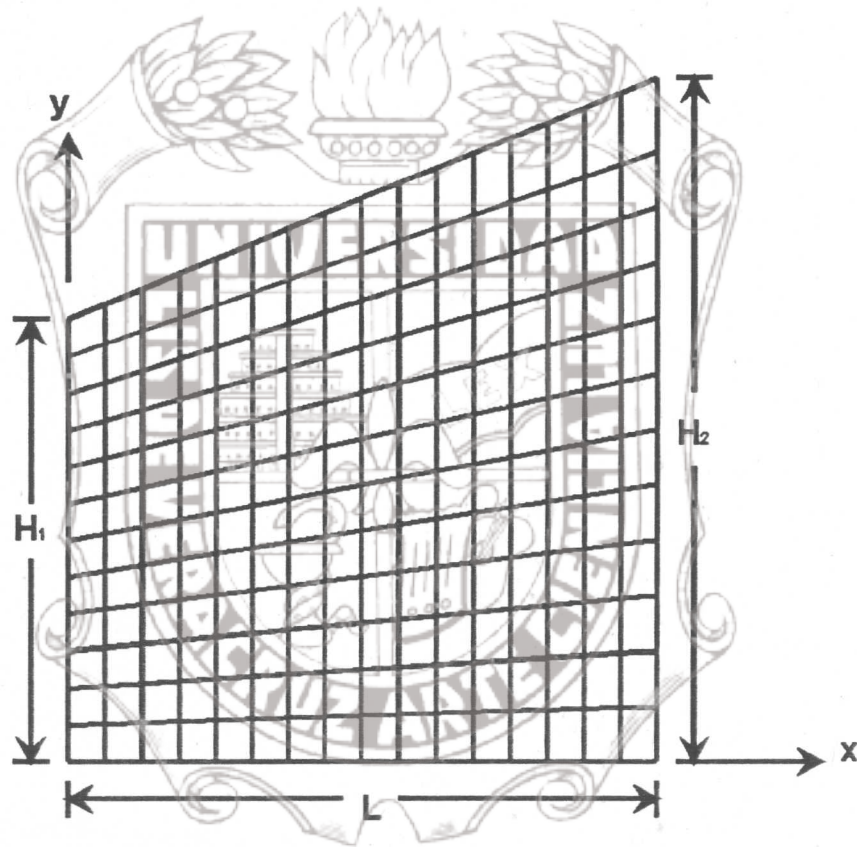
$$A = \frac{1}{2\beta} \ln \left[ \frac{1 + (e^\beta - 1)(D/L)}{1 + (e^{-\beta} - 1)(D/L)} \right] \quad (4.3.2)$$

Donde  $A$  es una constante de la transformación de la coordenada en la dirección axial,  $D$  es el parámetro del punto físico del dominio, donde se requiere el agrupamiento de los nodos,  $L$  es la longitud del dominio físico y  $\beta$  es el parámetro de agrupamiento del dominio. El número deseado de los puntos de la malla se definen por  $NP - 1$  (el número máximo de los puntos en  $\varepsilon$ ). Los espaciamientos iguales de la malla en el plano computacional es el siguiente,

$$\Delta \varepsilon = \frac{1.0}{(NP - 1)} \quad (4.33)$$

Esto se realizó con la finalidad de obtener una mejor resolución de las variables de flujo en las regiones donde sufren altos gradientes y ajustar los puntos de la solución analítica con la solución numérica obtenida para el caso 2, formándose una onda de choque en una distancia aproximadamente de 5 mts.





Plano físico donde se trasforma a un plano computacional rectangular uniforme.

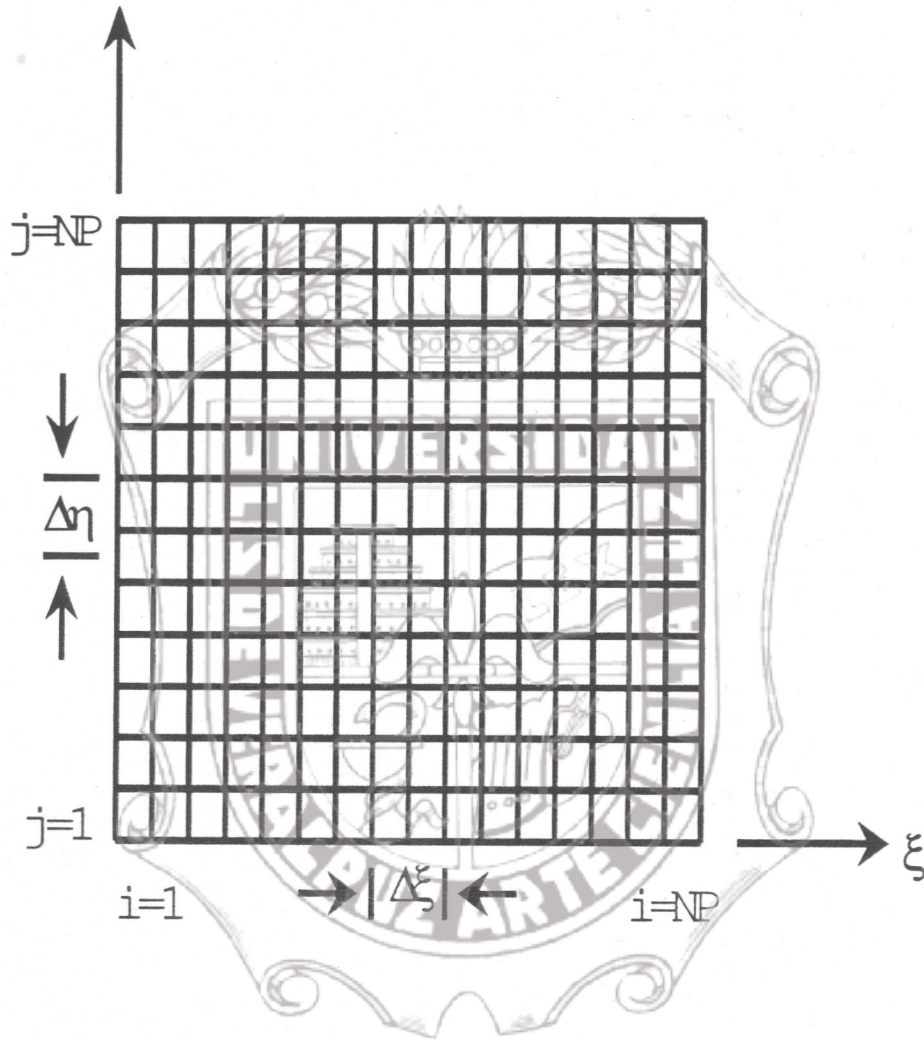


Figura 4. Plano computacional rectangular con espaciamentos de la malla uniforme

## CAPITULO V

## RESULTADOS

## 5.1 Discusión de resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la simulación numérica del programa de computo desarrollado para las ecuaciones de conservación, momento y energía, en un ducto divergente en el que circula un gas. La solución de las ecuaciones proporciona las distribuciones de presión, densidad, número de Mach y energía interna total del gas. El gas se sometió bajo las siguientes condiciones de flujo: en la entrada, el flujo es supersónico y abandona el ducto (salida) como (1) supersónico, (2) subsónico. Los resultados obtenidos de las soluciones numéricas de las ecuaciones de Euler en una dimensión, se presentan mediante las distribuciones de presión, densidad, número de Mach y energía interna total representadas por las figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

La Figura 5 representan las distribuciones de presión y el número de Mach. La solución numérica obtenida se comparó con los resultados de los datos analíticos que se obtuvieron de los valores reportados [Hoffmann (1989) K], y que se encuentran resumidos en la tabla 1 del capítulo tres. Su interpretación es la siguiente, como el fluido tiene una velocidad supersónica a la entrada, éste se acelera más a través del ducto divergente, disminuyendo su presión e incrementando el número de Mach, de ahí que, las propiedades del fluido no presenten discontinuidades. En este caso presenta propiedades isentrópicas. En la misma figura se muestran los datos analíticos de la presión del gas con círculos negros obtenidos de la tabla 1 y la correspondiente solución numérica se representa con la línea continua. Para el número de Mach los símbolos de triángulos son los datos analíticos y la línea discontinua es la solución numérica.

En la Figura 6 se presentan las distribuciones de densidad y la energía interna total, para el caso 1, el fluido posee una velocidad supersónica a la entrada. De la figura se observa que la densidad disminuye al aumentar la velocidad, incrementandose la energía interna total. Los círculos negros son los datos analíticos para densidad obtenidos de la tabla 1 y la línea continua es la solución numérica. La solución numérica de la energía interna total es la línea discontinua.



La Figura 7, muestra la evolución para la distribución de presión en los diferentes niveles de tiempo, donde el tiempo inicial es de 0.000001 s y el tiempo final es de 0.0004 s cuando se alcanza la solución de estado estacionario. Las soluciones intermedias de los diferentes niveles se reportan a los tiempos: 0.00005, 0.0001, 0.00015, 0.0002 segundos. Es evidente que estas soluciones no tienen ningún sentido físico simplemente indican como se obtiene la solución estacionaria. Sin embargo, se observa que si los perfiles iniciales suministrados fueran exactos, la solución en diferentes tiempos representaría la solución transiente y por lo tanto, la solución en los diferentes niveles de tiempos indicaría la evolución temporal. También podemos observar los cambios drásticos ocurridos durante las primeras iteraciones; posteriormente la solución gradualmente se aproxima a la solución estacionaria. Es claro que como la etapa axial disminuye, el número de los nodos del dominio aumentan, lo cual incrementan el número de iteraciones requeridas para una solución convergente.

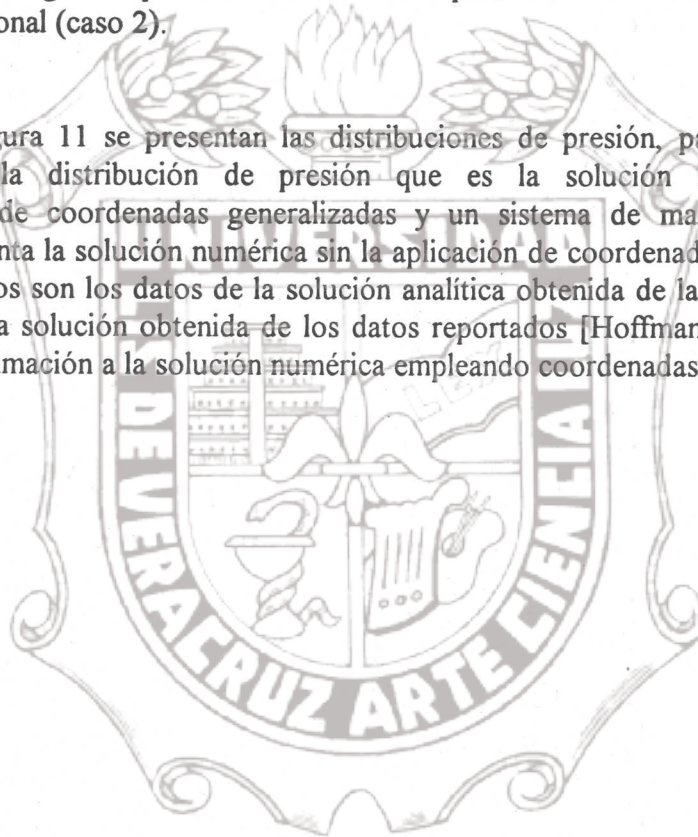
Para esta aplicación donde no aparecen las ondas de choque dentro del dominio los efectos de la no linealidad son débiles. El análisis de estabilidad numérica, indican no restricciones en los tamaños de las etapas de tiempo para el método implícito utilizado para las ecuaciones de Euler. La solución analítica se obtuvo de los valores reportados [Hoffmann (1989) K], se utilizaron para validar el código computacional desarrollado para la solución de las ecuaciones de Euler unidimensionales para el caso 1.

En la Figura 8 se muestran las distribuciones de presión y el número de Mach de la solución numérica obtenida y su comparación con los datos analíticos que se obtuvieron de los valores reportados, los cuales se encuentran resumidos en la tabla 2 del capítulo tres. El flujo es supersónico en la entrada del ducto, desacelerándose hasta alcanzar la distancia axial 2.8 m, el flujo pasa a ser subsónico. Se observa en la misma figura un salto grande en la línea de distribución de presión lo que indica una formación de onda de choque y una disminución con respecto al número de Mach. La solución numérica se representa por la línea sólida y los círculos negros son los datos analíticos para la presión del gas. Para el número de Mach la línea discontinua representa la solución numérica y los triángulos los datos analíticos.

En la Figura 9 se presentan las distribuciones de densidad y la energía interna total de la solución numérica obtenida. Además, de la figura se muestran las predicciones correspondientes hechas con el código computacional que se desarrollo para el caso 2. El flujo es supersónico en la entrada, desacelerándose hasta alcanzar la condición subsónica hasta la salida como se puede ver en la figura. Una onda de choque ocasiona que el perfil de densidad aumente y disminuya la energía interna total. Por consiguiente, las propiedades del fluido cambien totalmente. En la misma figura se observa que la solución numérica presenta una discrepancia con los datos analíticos. La solución numérica es la línea sólida y los datos analíticos son los círculos negros de la densidad del gas y la línea punteada es la energía interna total.

En la Figura 10 representa la evolución para la distribución de presión en los diferentes niveles de tiempo, donde el tiempo inicial es de  $5.00 \text{ E-}07 \text{ s}$  y el tiempo final es de  $7.555 \text{ E-}04 \text{ s}$ . Las soluciones intermedias de los diferentes niveles se reportan a los tiempos:  $0.000025$ ,  $0.0001$ ,  $0.000125$  y  $0.0004$  segundos. Es evidente que estas soluciones no tienen ningún sentido físico simplemente indican como se obtiene la solución estacionaria. Donde aparece la onda de choque dentro del dominio, el número de iteraciones es más grande que para caso 1. Para ésta aplicación, los efectos de la no linealidad son fuertes. Con los datos analíticos proporcionados por las [Hoffmann (1989) L], se validó el código computacional desarrollado para la solución de las ecuaciones de Euler unidimensional (caso 2).

En la Figura 11 se presentan las distribuciones de presión, para la línea sólida corresponde a la distribución de presión que es la solución numérica con la implementación de coordenadas generalizadas y un sistema de malla fina. La línea punteada representa la solución numérica sin la aplicación de coordenadas generalizadas y los círculos negros son los datos de la solución analítica obtenida de la tabla 2. Como se puede observar la solución obtenida de los datos reportados [Hoffmann (1989) L] tiene una mayor aproximación a la solución numérica empleando coordenadas generalizadas.



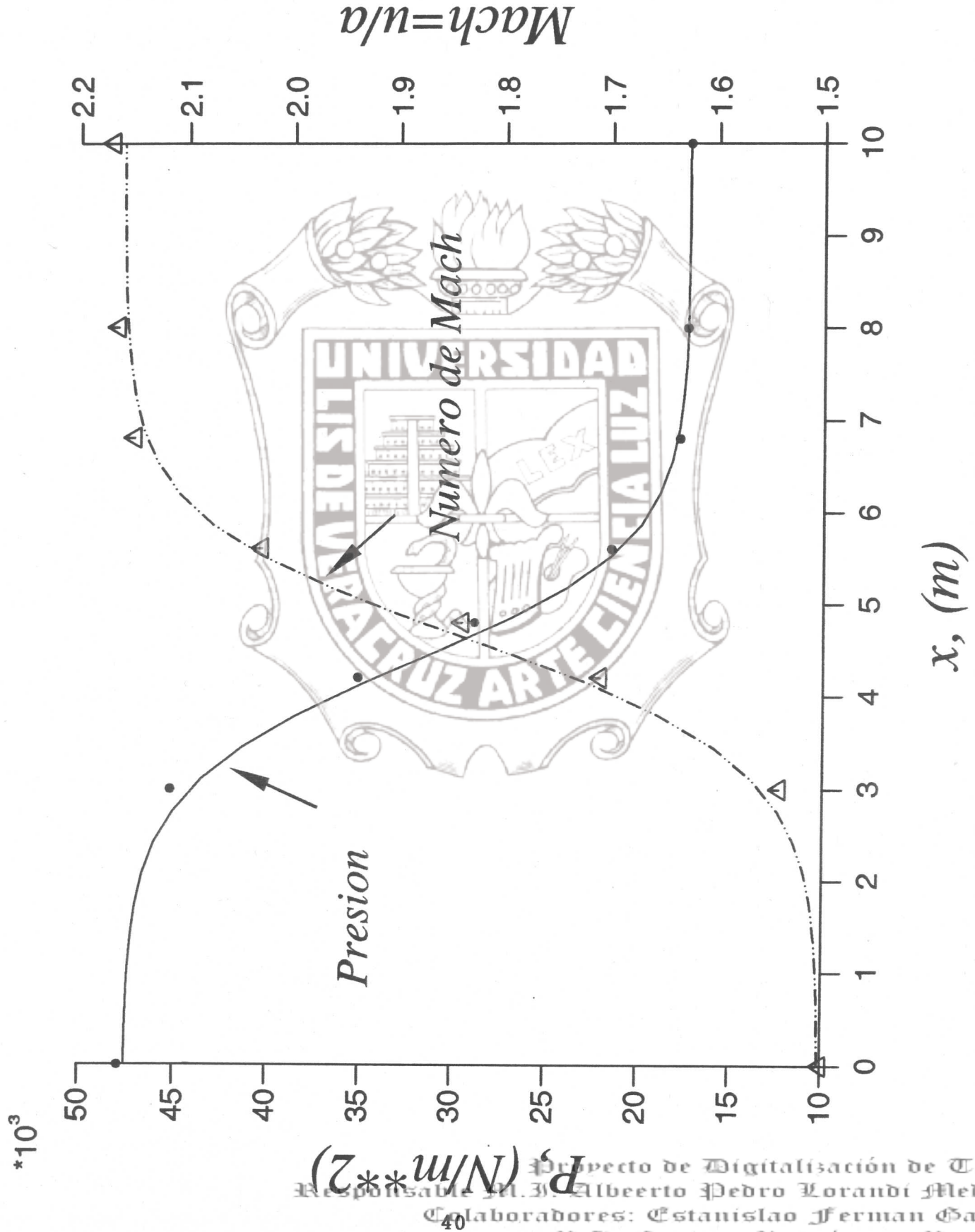


FIG. 5. DISTRIBUCIONES DE PRESION Y NUMERO DE MACH PARA EL CASO 1.

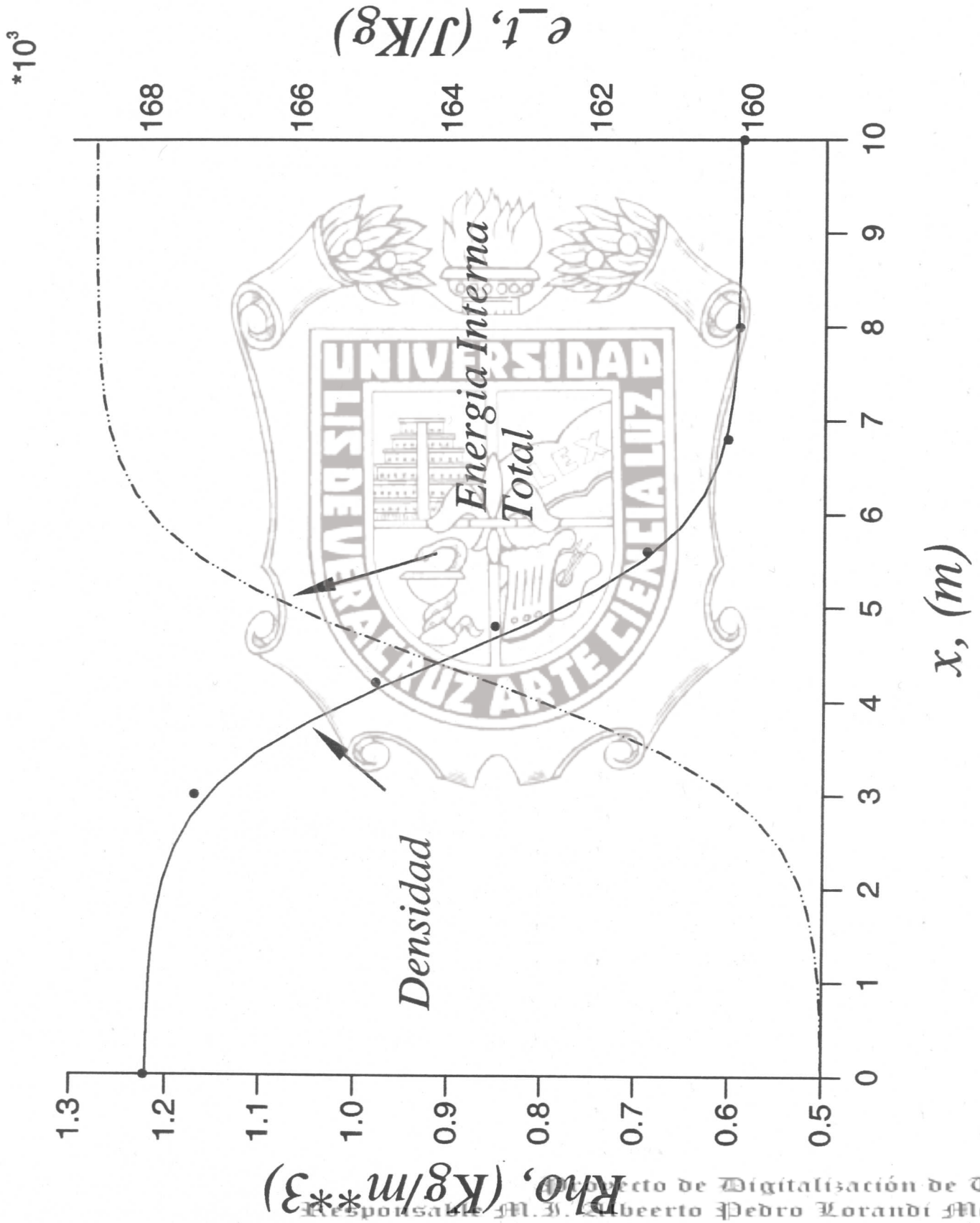


FIG. 6. DISTRIBUCIONES DE DENSIDAD Y ENERGIA INTERNA TOTAL PARA EL CASO 1.

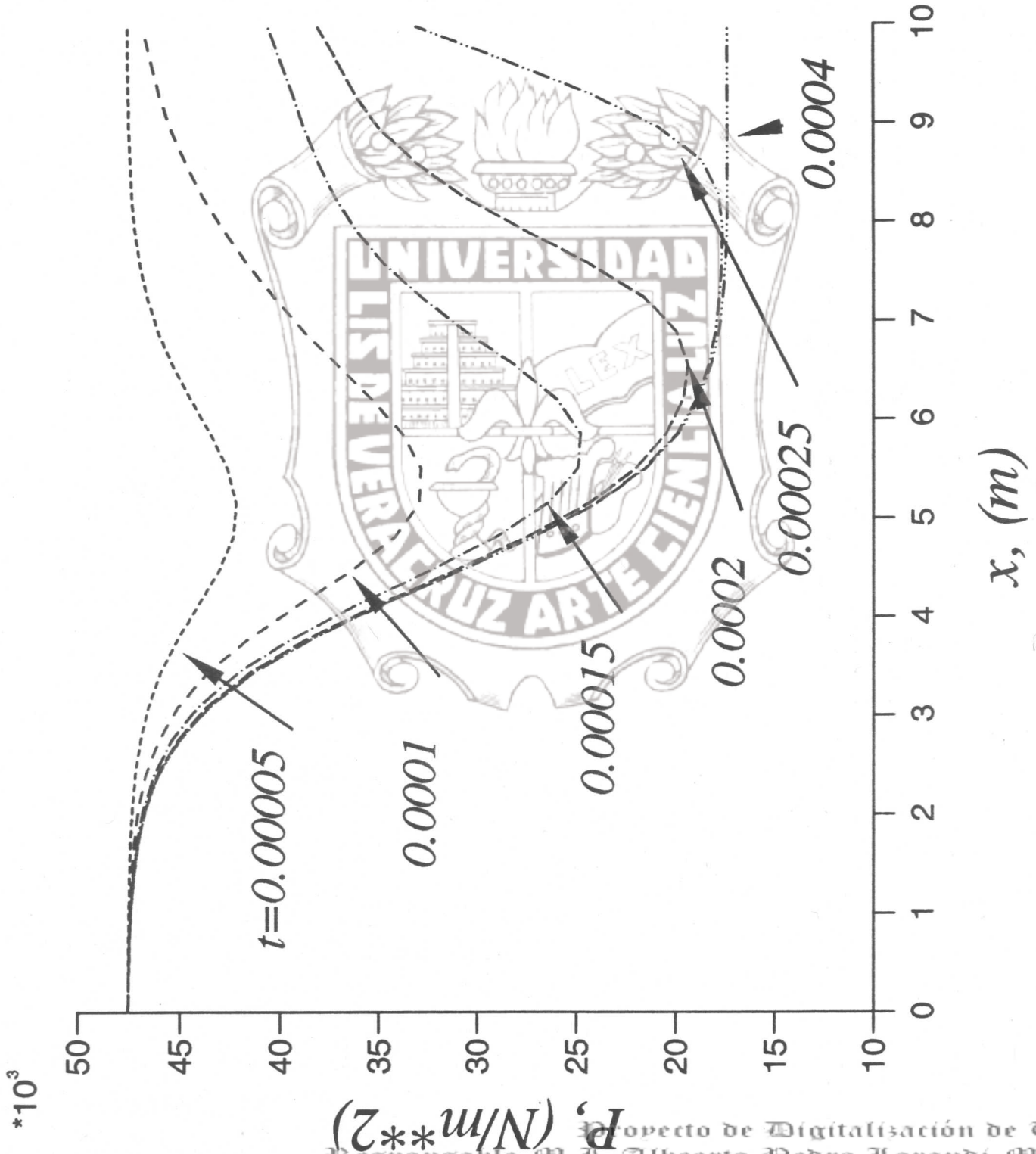


FIG. 7. DISTRIBUCION DE PRESION EN LOS DIFERENTES NIVELES DE TIEMPO PARA EL CASO I.

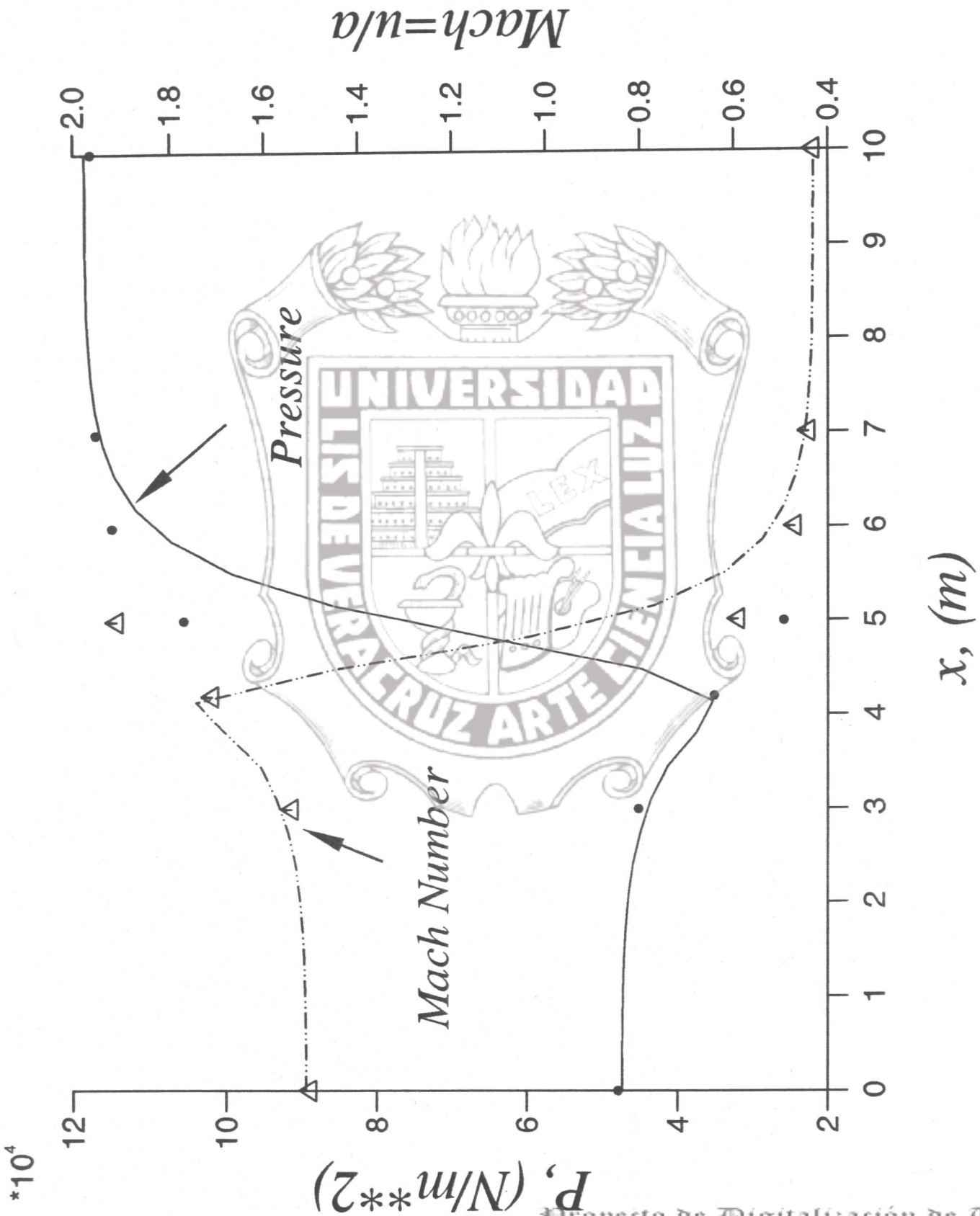


FIG. 8. DISTRIBUCIONES DE PRESION Y NUMERO DE MACH PARA EL CASO 2.

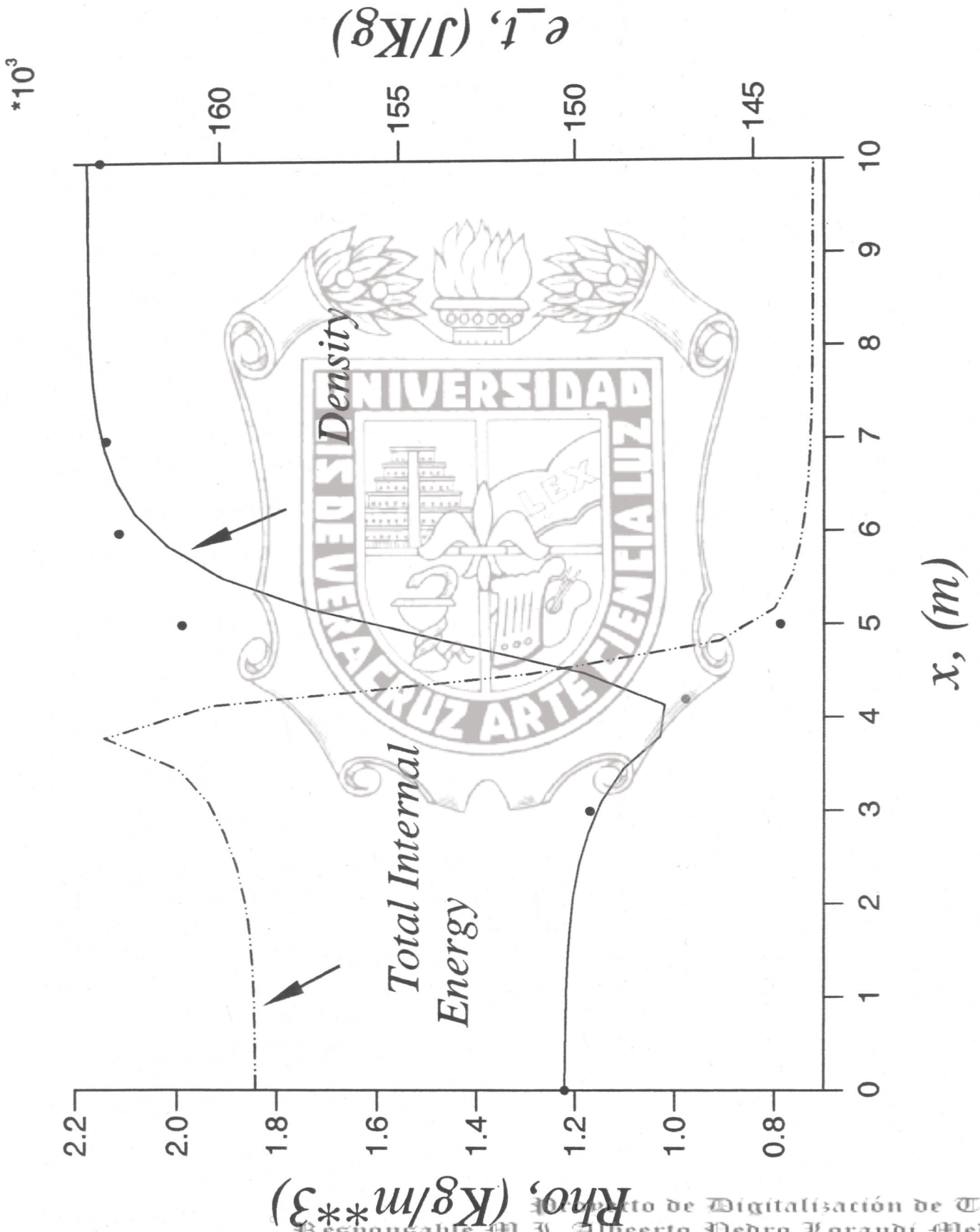


FIG. 9. DISTRIBUCION DE DENSIDAD Y ENERGIA INTERNA PARA EL CASO 2.

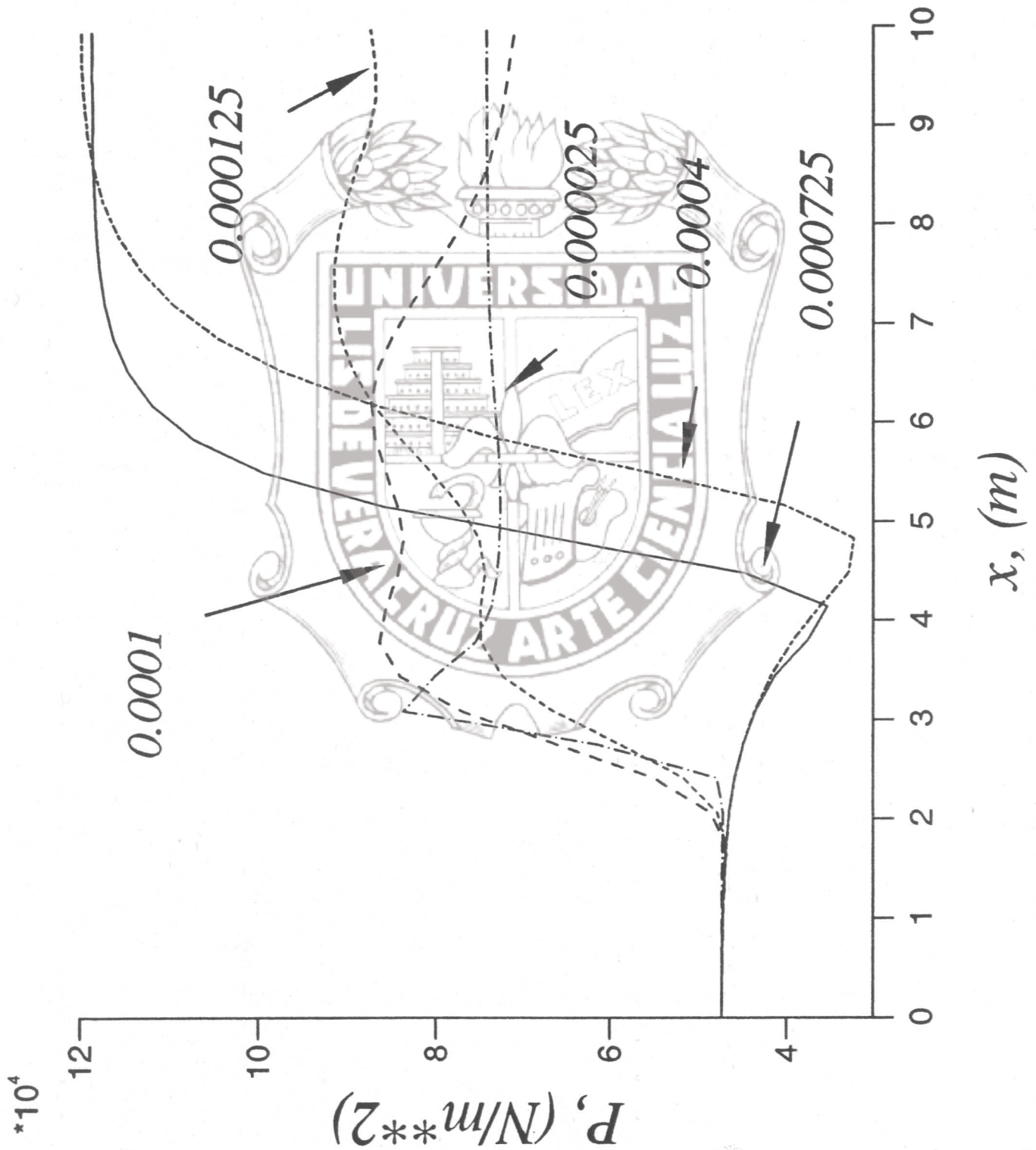


FIG. 10. DISTRIBUCION DE PRESION EN LOS DIFERENTES NIVELES DE TIEMPO PARA EL CASO 2.



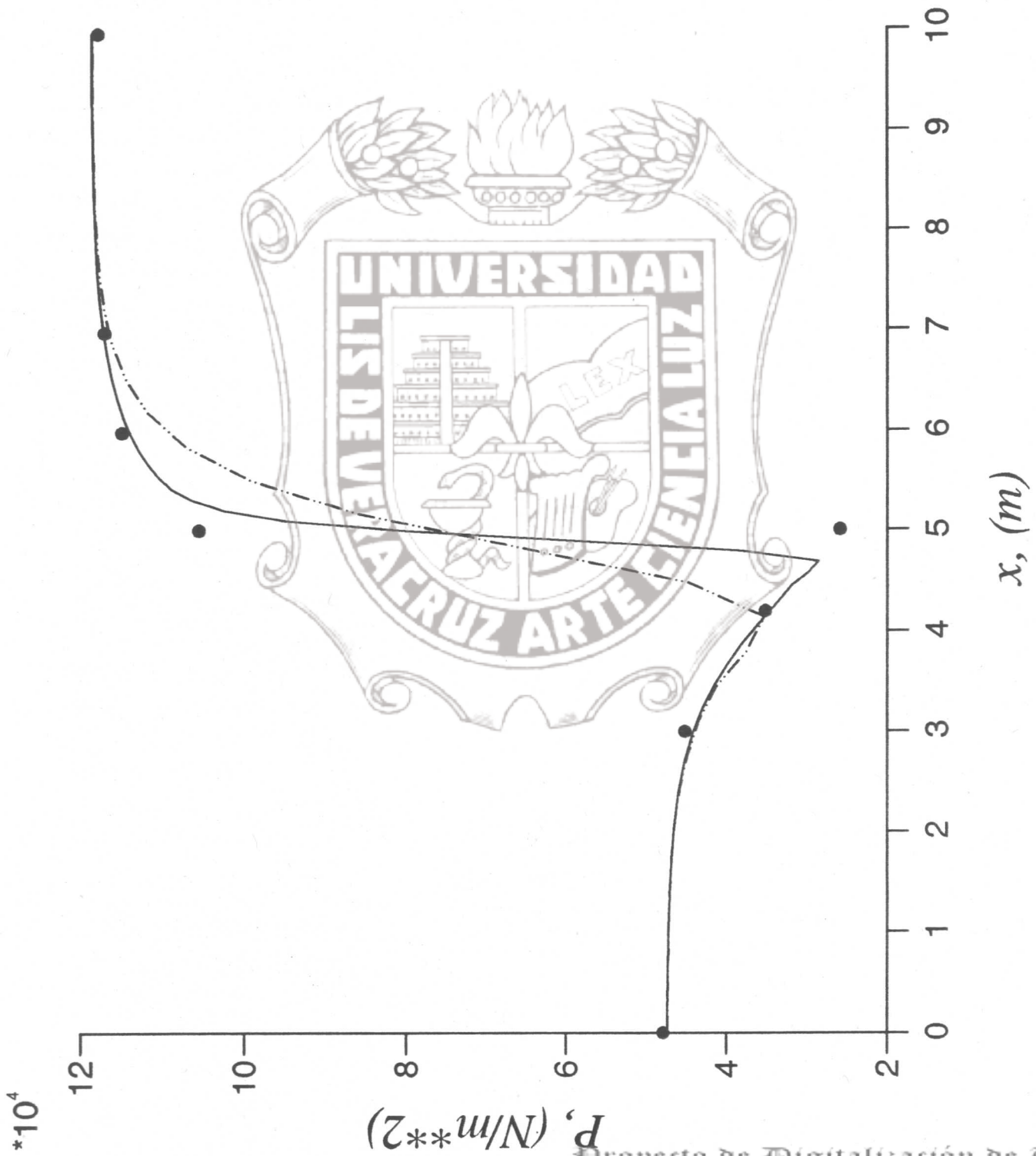


FIG. 11. DISTRIBUCION DE PRESION CON LA IMPLEMENTACION DE COORDENADAS GENERALIZADAS DONDE SE PRESENTA LA ONDA DE CHOQUE.

## CAPITULO VI

## CONCLUSIONES

Se desarrolló un código computacional que permite predecir el comportamiento de un gas a través de un ducto divergente, obteniéndose las distribuciones de densidad, presión, número de Mach y energía interna total. Las predicciones muestran que al utilizar el método implícito con el algoritmo de la formulación delta, una excelente aproximación resulta al validar los códigos computacionales, para los dos casos considerados en este trabajo de investigación.

Por lo que concierne, al método implícito es un método elegante ofrece gran ventaja de estabilidad numérica sobre las ecuaciones diferenciales discretizadas. Una ventaja importante es que permite tomar incrementos de tiempo grande, sin embargo, la selección del aumento esta limitado debido a la exactitud de error de redondeo de la computadora. Estos métodos son empleados en forma más frecuente que los métodos explícitos y brindan grandes ventajas computacionales. Es decir, en las formulaciones explícitas, solamente aparece una incógnita y se resuelve directamente en cada nodo de la malla; mientras para las formulaciones implícitas se tienen que resolver un sistema de ecuaciones algebraicas para todos los nodos de la malla, y dando origen a un sistema tridiagonal de bloques para ser resueltas simultáneamente. Este procedimiento se usó para aumentar la eficiencia, obteniéndose magníficos resultados, por otro lado, se requirió menor tiempo de CPU.

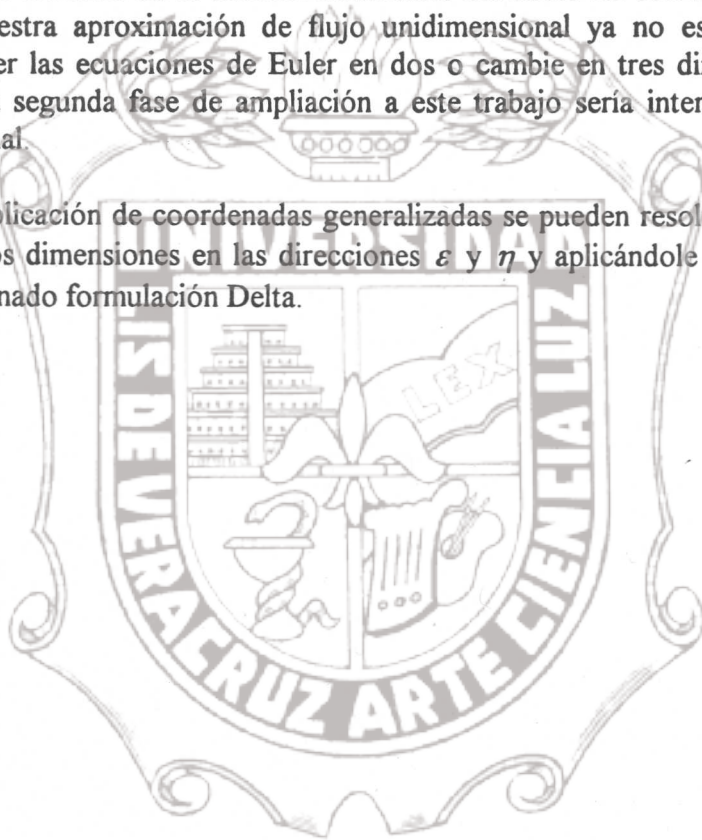
Para el caso 1, la solución numérica presentó una discrepancia mínima al ser comparada con los datos analíticos reportados en la literatura, es decir, la solución numérica tuvo el mismo comportamiento que los datos analíticos. El comportamiento del fluido que circula a través del ducto divergente, no presentó discontinuidades debido a que se comporta isoentrópicamente y los efectos de no linealidad resultaron débiles. Mientras para el caso 2, el comportamiento del fluido cambia totalmente ya que se originó una onda de choque, en la dirección axial aproximadamente de 5 m de la entrada al ducto y los efectos de no linealidad resultaron fuertes. Los efectos anteriores para el caso 1 y 2 estan dictados por las condiciones de frontera.

Además, en el caso 2 la solución numérica obtenida se comparó con datos analíticos, observándose que no se ajustaban con la solución numérica y por lo tanto, fue necesario implementarle a las ecuaciones de Euler unidimensionales en coordenadas

generalizadas. Es decir, transformaciones del plano físico al plano computacional, ya que estas transformaciones simplificaron drásticamente las manipulaciones de las condiciones de frontera. Debido a la presencia de la onda de choque fue necesario generar una malla fina para que se agruparan los nodos en las regiones donde las variables del flujo sufrían altos gradientes. Las predicciones obtenidas para este caso resultaron satisfactorios como se muestra en la Figura 11.

Es importante aclarar que el análisis desarrollado en esta investigación, solo es válido cuando los cambios de la sección transversal del ducto no son muy pronunciados. De serlo así nuestra aproximación de flujo unidimensional ya no es correcta y sería necesario resolver las ecuaciones de Euler en dos o cambie en tres dimensiones. Por lo tanto, como una segunda fase de ampliación a este trabajo sería interesante concluir el caso bidimensional.

Con la aplicación de coordenadas generalizadas se pueden resolver las ecuaciones de Euler para dos dimensiones en las direcciones  $\xi$  y  $\eta$  y aplicándole el mismo método implícito denominado formulación Delta.



## APENDICE A

### OBTENCION DE LA ENERGIA INTERNA Y LA VELOCIDAD DEL SONIDO

La definición de la primera ley de la termodinámica para un sistema cerrado, es la transferencia neta de calor suministrado al sistema en un proceso menos la transferencia neta de energía desarrollada por este como trabajo, que debe ser igual al incremento neto de energía  $E$  del sistema y matemáticamente se expresa como

$$de = dQ - dW \quad (\text{A-1})$$

puesto que el proceso es adiabático, la primera ley de la termodinámica establece que,

$$de = -dW \quad (\text{A-2})$$

de la definición de trabajo en termodinámica, tenemos que  $W = pdV$ , y combinando esta definición en (A-2) se tiene que,

$$de = -pdV \quad (\text{A-3})$$

Una ecuación de estado termodinámica para un proceso isentrópico, que es la relación entre la presión y el volumen del gas se define de la siguiente manera,

$$K = pV^\gamma \quad (\text{A-4})$$

Sustituyendo la ec. (A-4) en (A-3) se obtiene la forma diferencial para la energía interna esto es,

$$de = -K \frac{dV}{V^\gamma}$$

y efectuando la integración de esta última ecuación resulta que,

$$e = -K \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} + C \quad (\text{A-5})$$

$$e = -\frac{pV}{-\gamma+1} + C \quad (\text{A-6})$$

Como  $V$  es el volumen específico del gas,  $V = 1/\rho$ , lo sustituimos en la ec. (A-6)

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + C \quad (\text{A-7})$$

Si las condiciones iniciales para la presión y la energía interna son cero, por lo tanto, la constante de integración será cero. De esta manera se obtiene la energía interna para un proceso adiabático que se escribe matemáticamente como,

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} \quad (\text{A-8})$$

### Velocidad del sonido

De acuerdo a la definición de la velocidad del sonido, que es la velocidad a la que viaja una perturbación infinitesimal de presión a través de un fluido, se tiene la siguiente expresión para un proceso adiabático

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (\text{A-9})$$

donde el subíndice  $S$  indica  $\frac{\partial p}{\partial \rho}$  es una derivada parcial evaluada para un proceso isoentrópico. Ahora se determinará la velocidad del sonido para un gas ideal. Partiendo de la termodinámica [Oswatitsch (1956) M] se puede demostrar que la siguiente relación entre la presión y la densidad se aplica a un proceso isoentrópico,  $K = \frac{p}{\rho^\gamma}$ . esta se sustituye en (A-9) resultando esto,

$$a^2 = \left( \frac{\partial K \rho^\gamma}{\partial \rho} \right) \quad (\text{A-10})$$

realizando la derivación en (A-10) se obtiene lo siguiente

$$a^2 = K \gamma \rho^{\gamma-1} \quad (\text{A-11})$$

Ahora sustituyendo el valor de  $K$  en (A-11) se obtiene la velocidad del sonido para un gas ideal que se expresa matemáticamente como

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (\text{A-12})$$

donde  $\gamma$  es definida por  $C_p/C_v$ . Que es la razón de las capacidades caloríficas, es decir, la razón de la capacidad calorífica a presión constante entre capacidad calorífica a volumen constante.



## APENDICE B

## DETERMINACION DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS DE LA MATRIZ JACOBIANA DEL FLUJO A

Este apéndice describe el método estandar para la obtención de los valores y vectores propios que demanda en la ecuación.

$$AX = \lambda X \quad (B-1)$$

Los valores de  $\lambda$  para los que la ecuación (B-1) tiene soluciones no triviales, se llaman valores propios de A; los vectores correspondientes X son los vectores propios de A. Para encontrar los valores y vectores propios se escribe la ecuación (B-1) en la forma de  $(A - \lambda I)X = 0$ . Condición para que este sistema homogéneo de ecuaciones tengan soluciones no triviales que es,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (B-2)$$

La ecuación (B-2) proporciona los valores propios  $\lambda$ ; cuando  $\lambda$  es un valor propio. Cuando menos una de las ecuaciones (B-1) es redundante y el sistema tiene una solución no trivial.

Para encontrar los valores propios de la matriz jacobiana del flujo A que esta definida por la ecuación (2.2.12), por lo tanto, la ecuación (B-2) adquiere la forma siguiente,

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)u^2 & (3-\gamma)u - \lambda & (\gamma-1) \\ -\frac{a^2u}{(\gamma-1)} + \left(\frac{1}{2}\gamma-1\right)u^3 & \frac{a^2}{(\gamma-1)} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u^2 & \gamma u - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (B-3)$$

La solución del determinante dado por la ecuación (B-3) requiere bastante álgebra. Para simplificar su tratamiento le asignaremos un valor arbitrario a  $\gamma$ . El valor que se selecciona es de  $3/2$ , con dicho valor se obtiene una ecuación de tercer grado que se presenta de la siguiente manera,

$$-\lambda \left[ \left( \frac{3}{2}u - \lambda \right)^2 - a^2 \right] + \frac{3}{4}u^2 \left( \frac{3}{2}u - \lambda \right) - a^2 u - \frac{u^3}{8} = 0 \quad (B-4)$$

La ecuación (B-4) tiene como solución tres raíces que son las siguientes  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u + a$  y  $\lambda_3 = u - a$ . Estas raíces se llaman valores propios de la matriz jacobiana del flujo A.

La determinación de los vectores propios de la matriz A se obtienen a partir de la ecuación (B-1) donde esta ecuación se transforma en,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\frac{a^2}{(\gamma-1)} + \left(\frac{1}{2}\gamma-1\right)u^2 & \frac{a^2}{(\gamma-1)} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (B-5)$$

Resolviendo la ecuación (B-5) que nos representa un sistema homogéneo de ecuaciones lineales y teniendo como soluciones infinita, despejando  $x_2 = ux_1$  y le asignamos un valor arbitrario a  $x_1 = 1$ , entonces  $x_2 = u$ . Con los valores de  $x_1$  y  $x_2$  se obtienen el siguiente valor de  $x_3$ , dando como resultado los vectores propios de la matriz A que son los siguientes,

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u+a \\ \frac{u^2}{2} + au + \frac{a^2}{(\gamma-1)} \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u-a \\ \frac{u^2}{2} - au + \frac{a^2}{(\gamma-1)} \end{bmatrix} \quad (B-6)$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana







$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & & & & & \\ A_3 & \alpha_3 & & & & \\ & A_4 & \alpha_4 & & & \\ & & & A_{NP-2} & \alpha_{NP-2} & \\ & & & & A_{NP-1} & \alpha_{NP-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_{NP-2} \\ Y_{NP-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_{NP-2} \\ R_{NP-1} \end{bmatrix}$$

la cual determinamos

y

$$Y_2 = \alpha_2^{-1} R_2$$

$$Y_i = \alpha_i^{-1} (R_i - A_i Y_{i-1}) \quad \text{para } i = 3, 4, 5, \dots, NP-1$$

La ecuación (C-5) se expresa como

$$\begin{bmatrix} I & & & & & \\ & \beta_2 & & & & \\ & I & \beta_3 & & & \\ & & I & \beta_4 & & \\ & & & I & \beta_{NP-2} & \\ & & & & I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Q_{NP-2} \\ \Delta Q_{NP-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_{NP-2} \\ Y_{NP-1} \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta Q_{NP-1} = Y_{NP-1}$$

$$\Delta Q_i = Y_i - \beta_i \Delta Q_{i+1} \quad \text{para } i = NP-1, NP-2, \dots, 3, 2$$

Para la solución de éste sistema tridiagonal de bloques, se utilizó una subrutina que fue obtenida por el Laboratorio Lawrence Livermore [Hindmarsh (1977) N]. Por lo tanto, esta subrutina se implementó al código computacional (Hiperbólico).

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## APENDICE D

## APLICACION DE COORDENADAS GENERALIZADAS A LAS ECUACIONES DE EULER

En este apéndice se trata de explicar en una forma breve y compacta la aplicación de coordenadas generalizadas a las ecuaciones de Euler para un flujo unidimensional. Por consiguiente, procedemos aplicar una formulación implícita del tipo delta y realizando la discretización a la ecuación (4.1.17) mediante una aproximación de diferencia finita de primer orden hacia adelante resulta esto,

$$S \frac{\partial \bar{Q}^{n+1} - Q^n}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon} \right)^{n+1} - \bar{H}^{n+1} = 0 \quad (D-1)$$

donde el cambio de las propiedades del flujo lo definimos como

$$\Delta \bar{Q} = Q^{n+1} - Q^n \quad (D-2)$$

Si sustituimos la ec.(D-2) en (D-1) obtenemos

$$S \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon} \right)^{n+1} - \bar{H}^{n+1} = 0 \quad (D-3)$$

Recordemos que el vector solución  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$  fueron definidos en el capítulo dos.

Como la ecuación (D-3) es no lineal en  $\bar{Q}$ , además,  $\bar{E}(\bar{Q})$  son funciones no lineales en  $\bar{Q}$ , se realiza un proceso de linealización que será implementado mediante funciones de expansión en serie de Taylor de lo cual tenemos

$$\bar{E}^{n+1} = \bar{E}^n + \frac{\partial \bar{E}^n}{\partial \tau} \Delta \tau + O(\Delta \tau)^2 \quad (D-4)$$

$$\bar{H}^{n+1} = \bar{H}^n + \frac{\partial \bar{H}^n}{\partial \tau} \Delta \tau + O(\Delta \tau)^2 \quad (D-5)$$

Como  $\bar{E} = \bar{E}(S, \bar{Q})$ , aplicando la regla de la cadena similarmente como el capítulo dos resulta esto,

$$\bar{E}^{n+1} = \bar{E}^n + \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} \right) \Delta \bar{Q} + O(\Delta \tau)^2 \quad (D-6)$$

El último término de la ecuación es de orden de magnitud dos, eliminando términos de orden superior resulta que

$$\bar{E}^{n+1} = \bar{E}^n + \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} \right) \Delta \bar{Q} \quad (D-7)$$

de la misma manera se obtiene

$$\bar{H}^{n+1} = \bar{H}^n + \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{Q}} \right) \Delta \bar{Q} \quad (D-8)$$

A los términos  $(\partial \bar{E} / \partial \bar{Q})$  y  $(\partial \bar{H} / \partial \bar{Q})$  se aplicará la regla de la cadena para obtener lo siguiente

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \bar{Q}} \quad \text{como } \bar{E} = E \text{ y } \bar{Q} = Q/J \therefore Q = \bar{Q}J \text{ de ahí resulta que,}$$

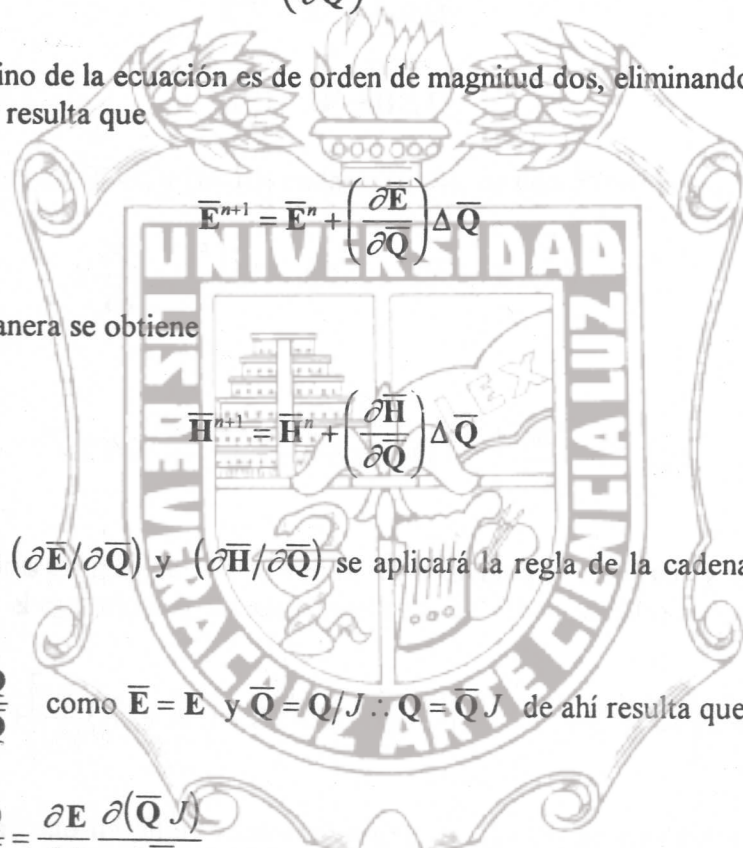
$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial E}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial E}{\partial Q} \frac{\partial(\bar{Q}J)}{\partial \bar{Q}}$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial E}{\partial Q} J \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{Q}} = J \frac{\partial E}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} = J \frac{\partial E}{\partial Q} \text{ ahora definamos } \bar{A} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Q}} \text{ y } A = \frac{\partial E}{\partial Q} \therefore \bar{A} = A J$$

Para el segundo término tenemos,

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial(\bar{Q}J)}{\partial \bar{Q}} = J \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \quad \text{como } \bar{H} = H/J$$



por lo tanto,  $\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q}$  entonces  $B = \frac{\partial H}{\partial Q}$ . Donde se definen las matrices jacobianas

del flujo como  $\bar{A} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial Q}$   $B = \frac{\partial H}{\partial Q}$  con esta notación las ecs. (D-7) y (D-8) se transforman respectivamente las ecuaciones.

$$\bar{E}^{n+1} = \bar{E}^n + \bar{A} \Delta Q \quad (D-9)$$

$$\bar{H}^{n+1} = \bar{H}^n + B \Delta Q \quad (D-10)$$

sustituyendo las ecs. (D-9) y (D-10) en la ec.(D-3), de ésta última se obtiene lo siguiente,

$$S \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\bar{E}^n + \bar{A} \Delta Q) - (\bar{H}^n + B \Delta Q) = 0 \quad (D-11)$$

que equivale a:

$$\left\{ S I + \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varepsilon} \right) \Delta \tau - B \Delta \tau \right\} \Delta Q = - \left( \frac{\partial \bar{E}^n}{\partial \varepsilon} - \bar{H}^n \right) \Delta \tau \quad (D-12)$$

Donde los valores propios de  $\bar{A}$  y el vector  $\bar{E}$  se dividen en positivos y negativos como se encontraron en el capítulo dos, se sustituyen en la ec. (D-3), quedando así

$$\left\{ S I + \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\bar{A}^+ + \bar{A}^-) - B \right] \Delta \tau \right\} \Delta Q = - \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\bar{E}^+ + \bar{E}^-) - \bar{H} \right) \Delta \tau \quad (D-13)$$

Aplicando el método de diferencias finitas a la ec. (D-13) se encuentra que al usar una diferencia de primer orden hacia adelante para los términos negativos de los valores propios asociados y una diferencia de primer orden hacia atrás para los términos positivos de los valores propios asociados resulta esto,

$$\left\{ S I + \left[ \frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} (\bar{A}_i^+ - \bar{A}_{i-1}^+ + \bar{A}_{i+1}^- - \bar{A}_i^-) - B \Delta \tau \right] \right\} \Delta Q = - \Delta \tau \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\bar{E}_i^+ - \bar{E}_{i-1}^+ + \bar{E}_{i+1}^- - \bar{E}_i^-) - \bar{H} \right) \quad (D-14)$$

Reacomodando términos tenemos que

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} \bar{\mathbf{A}}_{i-1}^+\right) \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{i-1} + \left[ S \mathbf{I} + \frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} (\bar{\mathbf{A}}_i^+ - \bar{\mathbf{A}}_i^-) - \mathbf{B}_i \Delta \tau \right] \Delta \bar{\mathbf{Q}}_i \\
 & + \frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} (\bar{\mathbf{A}}_{i+1}^-) \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{i+1} = -\frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} (\bar{\mathbf{E}}_i^+ - \bar{\mathbf{E}}_{i-1}^+ + \bar{\mathbf{E}}_{i+1}^- - \bar{\mathbf{E}}_i^-) + \bar{\mathbf{H}}_i \Delta \tau \quad (D-15)
 \end{aligned}$$

Escribiendo esta ecuación en una forma más conveniente, se define los siguientes términos,



$$\begin{aligned}
 AM &= -\frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} \bar{\mathbf{A}}_{i-1}^+ \\
 AA &= \left[ S \mathbf{I} + \frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} (\bar{\mathbf{A}}_i^+ - \bar{\mathbf{A}}_i^-) - \mathbf{B}_i \Delta \tau \right] \\
 AP &= \frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} \bar{\mathbf{A}}_{i+1}^- \\
 RHS &= -\frac{\Delta \tau}{\Delta \varepsilon} (\bar{\mathbf{E}}_i^+ - \bar{\mathbf{E}}_{i-1}^+ + \bar{\mathbf{E}}_{i+1}^- - \bar{\mathbf{E}}_i^-) + \bar{\mathbf{H}}_i \Delta \tau
 \end{aligned}$$

Con estos resultados el sistema de ecuaciones tridiagonal de bloques para los nodos sobre el eje  $\varepsilon$  se escribe de la siguiente forma,

$$AM_i \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{i-1} + AA_i \Delta \bar{\mathbf{Q}}_i + AP_i \Delta \bar{\mathbf{Q}}_{i+1} = RHS_i \quad (D-16)$$

Por consiguiente esta ecuación se resolverá en un dominio computacional y se implementará un sistema de malla fina para obtener una mejor resolución de flujo en la cercanía de los altos gradientes. Las condiciones de frontera son las mismas para las que fueron utilizadas en el capítulo dos. Esto se aplicará para el caso 2, que se consideró un flujo supersónico a la entrada y un flujo subsónico a la salida del ducto divergente. Una vez que es aplicada la ecuación (D-16) a todos los puntos nodales se forma un sistema tridiagonal de bloques que se resolverá mediante el método de descomposición  $L \cdot U$  Como se explica en el apéndice C.

## BIBLIOGRAFIA

- A. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 391-397, 1989.
- B. HOFFMANN KLAUS A., "Scalar Representation of the Navier- Stokes Equations" Chapter 7. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 216-217, 1989.
- C. WHITE FRANK M., "Differential Relations for a Fluid Particle" Chapter 4. FLUID MECHANICS. Mc Graw-Will. pp. 223, 1993.
- D. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 373, 1989.
- E. SHOICHIRO NAKUMURA., "Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas" Capítulo 13. METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFFWARE. Prentice- Hall. pp. 234, 1992.
- F. STEGER, J.L. AND WARMING, R F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamic Equatios with Appication to Finite Difference Methods". NASA TM 78605, July 1979.
- G. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 387-388, 1989.
- H. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 386, 1989.
- I. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 389, 1989.
- J. HOFFMANN KLAUS A., "Grid Generation" Chapter 8. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 243-303, 1989.



## BIBLIOGRAFIA

---

- K. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 391, 1989.
- L. HOFFMANN KLAUS A., "Euler Equations" Chapter 10. COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS FOR ENGINEERS. The University of Texas of Austin. pp. 397, 1989.
- M. OSWATITSCH, K., "Gas Dynamics" Trans. G. Kuerti. Academemec Press. Inc., New York, 1956.
- N. HIDMARSH A.C., "Solution Of Block- Tridiagonal Systems Of linear Algebraic Equations". LAWRENCE LIVERMORE LABORATORY. pp.1-23, Febraury 1977.

