

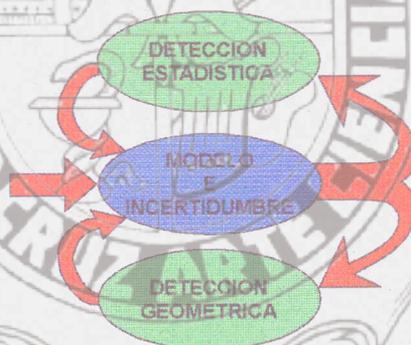
UNIVERSIDAD VERACRUZANA



INSTITUTO DE INGENIERIA

DETECCION DE FALLAS EN
SISTEMAS DINAMICOS.

FALLAS
Y
CAMBIOS
ABRUPTOS



TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA ELECTRICA
OPCION CONTROL

PRESENTA:
RICARDO GUSTAVO ESPINOZA SALVADÓ

H. VERACRUZ, VER.

MAYO DE 1995

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Tesis de Maestría



UNIVERSIDAD VERACRUZANA
INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., Abril 7 de 1995.
SI646/95.

Al candidato al Grado señor:
ING. RICARDO GUSTAVO ESPINOZA SALVADO
P R E S E N T E:

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Dr. Yu Tang Xu, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería en el área de Ingeniería Eléctrica Opción Control:

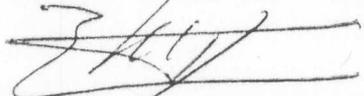
T E M A:

"DETECCION DE FALLAS EN SISTEMAS DINAMICOS"

- Prológo
- I.- Introducción
- II.- Propiedades de los Algoritmos de Detección de Falla
- III.- El problema de Detección de Fallas en el Enfoque Estadístico
- IV.- El problema de Detección de Fallas en el Enfoque Geométrico
- V.- Simulación
- VI.- Conclusiones
- Bibliografía

Sin otro particular, me es grato reiterarle la seguridad de mi más atenta y distinguida consideración.

A T E N T A M E N T E
"LIS DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"


DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ
DIRECTOR

INSTITUTO DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD VERACRUZANA
VERACRUZ

ccp. minutarío.
ccp. archivo.
EMG/lrl.

Proyecto de Digitalización de Tesis
Responsable M.B. Alberto Pedro Lorandi Medina
Colaboradores: Estanislao Ferman García
M.B. Enrique Rodríguez Magaña

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Doy gracias a Dios por todo lo que soy y por lo que me ha dado; Por haberme ayudado a culminar este escalón en mi carrera profesional, y

... para que en todo sea Dios Glorificado.

DEDICATORIAS

Dedico esta tesis:

A mi Amada Esposa:

Mirna Elizabeth López de Espinoza

A mis Hijos:

Ricardo Josué

Andrés Bernardo

Pablo Samuel

A mis Queridos Padres:

Ricardo Espinoza Carballo

Hada Marina Salvadó de Espinoza

Por haberme inculcado el hábito del trabajo y la perseverancia,
Por sus sacrificios, apoyo y amor.

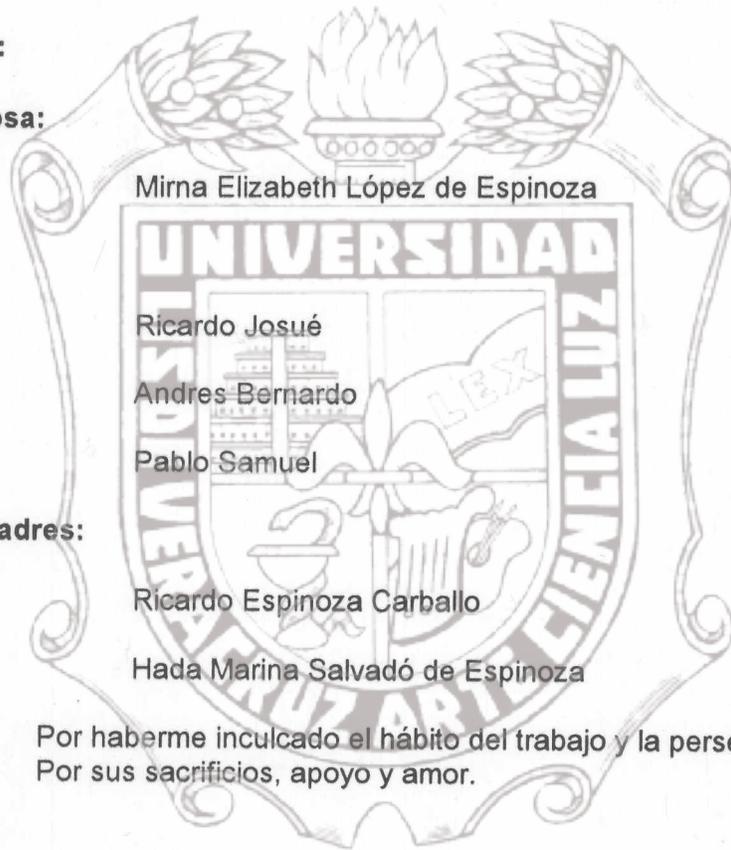
A mis Hermanos:

Iván Alfonso

Edgardo Francisco

Christian Salvador (†)

Jessica Carolina



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor el Dr. Yu Tang Xu, por el apoyo que me brindó para realizar este trabajo.

Agradezco a mis profesores del Instituto de Ingeniería por experiencia académica que me transmitieron a lo largo de toda mi especialidad.

Agradezco a los señores del Jurado Calificador de esta tesis: Dr. Enrique A. Morales González, Dr. Yu Tang Xu y M. I. Alberto Pedro Lorandi Medina, por su atinada labor de revisión.

Agradezco a todas las personas que me brindaron su ayuda, mientras realicé mi estudios en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Veracruzana.

Agradezco a todos aquellos que ayudaron a la realización del presente trabajo.

RECONOCIMIENTO

A la Secretaria de Relaciones Exteriores del Gobierno de México, por haberme otorgado la beca que me permitió realizar los estudios de Maestría.

CONTENIDO

LISTA DE ABREVIATURAS

TABLAS DE REFERENCIA

NOMENCLATURA

PROLOGO

CAPITULO I : INTRODUCCION	1
1.1 APLICACION Y NECESIDAD DE LA DETECCION Y DIAGNÓSTICO DE FALLAS.....	1
1.2 CONTENIDO DE LA TESIS.....	2
1.2.1 OBJETIVOS.....	2
1.2.2 ORGANIZACION GENERAL.....	3
1.3 ACERCA DE LA CLASIFICACION EN FALLAS O CAMBIOS ABRUPTOS.....	4
1.3.1 EL PROCESO DE DIAGNOSTICAR UNA FALLA.....	4
1.3.2 NATURALEZA DE LAS FALLAS.....	6
1.4 CLASIFICACION DE LA METODOLOGIA EN EL PROBLEMA DE DETECCION DE FALLAS.....	9
1.4.1 METODOS DE DETECCION QUE NO HACEN USO DE MODELOS.....	9
1.4.2 METODOS DE DETECCION QUE HACEN USO DE MODELOS.....	10
1.4.3 ¿ EL PORQUE DE UN MODELO ?.....	10
1.5 PRELIMINARES SOBRE LOS ENFOQUES ESTADISTICOS Y GEOMETRICOS.....	11
1.5.1 ENFOQUE GEOMETRICO.....	12
1.5.2 ENFOQUE ESTADISTICO.....	12

CAPITULO II: PROPIEDADES DE LOS ALGORITMOS DE DETECCION DE

FALLA	15
2.1 REDUNDANCIA ANALITICA Y RESIDUALES.....	15
2.2 SENSITIVIDAD Y ROBUSTEZ.....	17
2.3 INNOVACION Y DETECTABILIDAD.....	20

CAPITULO III: EL PROBLEMA DE DETECCION DE FALLA EN EL ENFOQUE ESTADISTICO.....22

PARTE I.- HERRAMIENTAS ESTADISTICAS PARA DETECCION DE CAMBIOS ABRUPTOS

3.1 FORMAL DEFINICION DE CRITERIOS.....	22
3.1.1 DETECCION DE UN CAMBIO ON-LINE.....	22
3.1.2 MODELOS DE SISTEMAS Y SEÑALES, Y SU RELACION CON FALLAS.....	24
3.1.3 FUNCIONES DE DECISION ESTADISTICA.....	26

PARTE II .- DESCRIPCION DE LOS ALGORITMOS DE DETECCION.	29
3.2 ALGORITMOS ELEMENTALES	29
3.2.1 CARTA DE CONTROL DE SHEWHART.....	29
3.2.2 EL ALGORITMO DEL MOVIMIENTO PROMEDIO GEOMETRICO	33
3.2.3 EL ALGORITMO DEL MOVIMIENTO PROMEDIO FINITO.....	34
3.2.4 ALGORITMO DE FILTRADO-DERIVACION	35
3.3 ALGORITMOS CUSUM	37
3.4 RESUMEN DE LOS ALGORITMOS ESTADISTICOS	39

CAPITULO IV: EL PROBLEMA DE DETECCION DE FALLAS EN EL ENFOQUE GEOMETRICO

.....	41
4.1 PRESENTACION GENERAL DE LAS TECNICAS	41
4.2 GENERACION DE RESIDUALES POR REDUNDANCIA ANALITICA	44
4.2.1 UNA APLICACION BASICA	44
4.2.2 HERRAMIENTAS MATEMATICAS	48
4.3 ALGORITMOS ROBUSTOS PARA DETECCION DE FALLAS. UMBRALES DINAMICOS	51
4.3.1 EL SELECTOR DE UMBRAL Y ANALISIS DE UMBRALES DINAMICOS	51
4.3.1.1 INTRODUCCION	52
4.3.1.2 FORMULACION DEL PROBLEMA	52
4.3.1.3 EFECTO DE LA INCERTIDUMBRE DEL MODELADO EN LA DETECCION DE FALLA.....	56
4.3.1.4 RESULTADOS PRINCIPALES	60
4.3.1.5 EJEMPLO ILUSTRATIVO	62
4.3.1.6 COMENTARIOS ADICIONALES	65
4.3.2 UMBRAL DINAMICO PARA DETECCION DE FALLA, EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	66
4.3.2.1 INTRODUCCION	66
4.3.2.2 FORMULACION DEL PROBLEMA	67
4.3.2.3 RESULTADOS PRINCIPALES	74
4.3.2.4 COMENTARIOS ADICIONALES	78
4.3.3 UMBRAL DINAMICO PARA DETECCION DE FALLA, EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	80
4.3.3.1 INTRODUCCION	80
4.3.3.2 FORMULACION DEL PROBLEMA	81
4.3.3.3 RESULTADOS PRINCIPALES	83
4.3.3.4 COMENTARIOS ADICIONALES	90
4.4 FILTROS DETECTORES DE FALLA	91
4.4.1 INTRODUCCION	91
4.4.2 FORMULACION DEL PROBLEMA	91
4.4.2.1 MODELO MATEMATICO.....	91
4.4.2.2 DEFINICIONES Y LEMAS	93
4.4.3 RESULTADOS PRINCIPALES.....	97
4.4.3.1 CONSTRUCCION DE UN ESPACIO DE DETECCION DE DOS DIMENSIONES	97
4.4.4 COMENTARIOS ADICIONALES.....	102
4.5 RESUMEN DE LAS TECNICAS GEOMETRICAS Y COMPARACIONES CON EL ENFOQUE ESTADISTICO	104
4.5.1 SUMARIO DE LAS TECNICAS DE DETECCION DE FALLAS EN EL ENFOQUE	

GEOMETRICO 104
4.5.2 ALGUNAS RELACIONES Y EQUIVALENCIAS ENTRE AMBOS ENFOQUES 107

CAPITULO V: SIMULACION 109

5.1 SIMULACION No. 1 EN SIMNON
UMBRALES DINAMICOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO 110
5.2 SIMULACION No. 2 EN SIMNON
ALGORITMO FILTRADO-DERIVATIVO 114
5.3 SIMULACION No. 3 EN SIMNON
COMPARACION ENTRE EL ALGORITMO GEOMETRICO Y ESTADISTICO 117
5.4 SIMULACION No. 4 EN MATLAB
EL SELECTOR DE UMBRAL 120

CAPITULO VI: CONCLUSIONES 123

6.1 ACERCA DE LAS SIMULACIONES 123
6.2 ASPECTOS RELEVANTES EN LAS TECNICAS DE DETECCION DE FALLAS 124
6.3 NOTA FINAL 126
BIBLIOGRAFIA 128



LISTA DE ABREVIATURAS

FDI	Detección e Identificación de Fallas
ARL	Función de Decisión para evaluar Algoritmos Estadísticos
LCD	Detector de Checar Límite
GMA	Movimiento Promedio Geométrico
FMA	Movimiento Promedio Finito
FD	Filtrado - Derivación
CUSUM	Suma Acumulada
FDF	Filtros Detectores de Falla
SISO	Una Entrada - Una Salida
DIA	Detección, Aislamiento y Acomodamiento de la Falla
LIT	Lineal e Invariante en el Tiempo
P(FA)	Probabilidad de ocurrencias de falsas Alarmas
P(FP)	Probabilidad de Detecciones Perdidas (Fallas que no logran ser detectadas)

LISTA DE TABLAS

TABLA 3.1.a	Resumen de las Ecuaciones principales de cada Algoritmo Estadístico
TABLA 3.1.b	
TABLA 4.1	Normas de Vectores, Funciones y Matrices
TABLA 4.2.a	Resumen de la Ecuaciones Principales de cada Algoritmo Geométrico
TABLA 4.2.b	

NOMENCLATURA

PARTE ESTADÍSTICA

θ	Variable del Cambio (Ejem. la medida de una señal)
P_θ	Densidad de Probabilidad
t_a	Tiempo de Alarma
t_θ	Tiempo de Cambio
$(Y_k)_{k \geq 1}$	Vector o Escalar aleatorio de Observación
$s(y)$	Logaritmo de la Razón de Probabilidad, entre despues y antes del cambio
g_k	Función de Decisión para Algoritmos Estadísticos
h	Valor Umbral Estadístico

PARTE GEOMÉTRICA

\hat{y}	Estimado de la variable y
$r(s)$ y $r(t)$	Residual en el Dominio de la Frecuencia y el Tiempo Respectivamente
$\sigma(A)$	Valor Singular de la Matriz A
$v(s)$ y $v(t)$	Innovación en el Dominio de la Frecuencia y el Tiempo Respectivamente
$J(\tau)$	Función de la Evaluación del Residual
$J_{th}(s)$ y $J_{th}(t)$	Valor de Umbral en el Dominio de la Frecuencia y el Tiempo respectivamente
τ	Tamaño de la Ventana de Detección
$f_{of_{min}}$	Falla Mínima Detectable
$\ \cdot\ $	Norma de un Operador Lineal
H_2	Norma Euclidiana

Tesis de Maestría

H_∞	Norma Infinita
$P_o(s)$	Modelo Nominal de la Planta
$\Delta(s)$	Bloque de Incertidumbre del Modelado de la Planta
$\lambda_i(A)$	Eigenvalor $-i$ de la Matriz A
l_i	Orden del Espacio de Detección de la Falla f_i

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana



PROLOGO.

Sobre los últimos 20 años ha sido significativo el incremento de problemas reales relacionados con la Detección e Identificación de Fallas. Los proyectos de alta tecnología hacen necesario la creación de sofisticados procedimientos de detección rápida y precisa de fallas, y una predicción confiable de las mismas.

Un ejemplo de lamentables consecuencias fue el desastre de Transbordador Espacial CHALLENGER, no pocos nos preguntamos ¿ como pudo haber ocurrido esto?.

"Un empaque de una de las válvula de combustible, que alimenta al tanque principal se subestimó su resistencia, y cambios bruscos de temperatura provocaron que una fisura ocurriera, y de ahí su consecuencia".

Como lo anterior hay innumerables ejemplos que evidencian la importancia de un adecuado diseño Robusto y Sensible, de Detección y Diagnóstico de Falla.

La idea central de este trabajo de tesis, es estudiar las Técnicas de Detección de Fallas más recientes y de mayor aplicación en sistemas de control, analizado mediante dos Enfoques principales: El Estadístico y el Geométrico.

El primero con aplicación para sistemas inmersos en un ambiente ruidoso y, el segundo con propiedades de Robustez a la incertidumbre del modelo.

Los primeros dos capítulos nos ubican en este tema y nos proporcionan algunas herramientas necesarias para la comprensión de los capítulos principales.

El capítulo III abarca el Enfoque Estadístico y el capítulo IV el correspondiente Enfoque Geométrico.

El capítulo V está dedicado a la Simulación: Tres Algoritmos representativos de ambos Enfoques, son utilizados para realizar comparaciones y evaluar su Rendimiento, con respecto al Tiempo de Detección y la Falla Mínima que pueden detectar.

El capítulo VI presenta los aspectos concluyentes de la Tesis. Se incluye al final una amplia bibliografía de lo más importante en libros, artículos y documentos sobre este tema.

CAPITULO I.

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se describen el propósito y el contenido de esta tesis. Un estudio actualizado de las principales técnicas y Algoritmos de Detección de Fallas, en base a modelos Determinísticos y Estadísticos, definen el objetivo principal.

La sección 1.2 nos presenta los objetivos y la organización del contenido de esta tesis.

La importancia y aplicación del estudio sobre la detección de fallas se da en la sección 1.1. La sección 1.3 nos desarrolla una Clasificación de las Fallas; y la Metodología del problema de Detección, Aislamiento y Diagnostico de falla, se presentan en la sección 1.4.

La sección 1.5 tiene como objetivo, introducirnos a los Enfoques Estadísticos (Procesos Estocásticos) y Geométricos (Procesos Determinísticos con ruido acotado). Estos enfoques forman la clasificación principal del desarrollo de este trabajo.

1.1 APLICACION Y NECESIDAD DE LA DETECCION Y DIAGNOSTICO DE FALLAS.

En los últimos 20 años ha sido significativo la necesidad de resolver problemas relacionados con las siguientes áreas:

- Detección y diagnósticos de fallas.
- Mantenimiento y supervisión de procesos industriales de alto riesgo.
- Seguridad en sistemas complejos (aviones, transbordador espacial, cohetes, plantas nucleares, industrias de procesos químicos).
- Control de Calidad.
- Predicción de cambios abruptos (catástrofes naturales, desgaste y decaimiento en sistemas, etc.).
- Monitoreo en biomedicina.
- Producción en masa de equipo de consumo (automóviles, artículos para el hogar).

Estos problemas son el resultado del incremento en la complejidad de muchos procesos tecnológicos.

La característica común de los problemas mencionados anteriormente, es la detección de uno o varios Cambios Abruptos, ocurriendo en alguna de las propiedades características del objeto considerado. La dificultad consiste en la detección de estos cambios, que no son necesariamente observados directamente, y la mayoría de las veces son medidos junto con otro tipo de perturbaciones (ruidos, vibraciones, etc.).

Veamos algunas aplicaciones de lo anterior:

EL CONTROL DE CALIDAD

Una de las aplicaciones de la detección de cambios es el problema del control de calidad. Considere un proceso de producción que puede estar " bajo control " o " fuera de control ".

Estas situaciones cuando el proceso deja de estar bajo control y entra fuera de control son denominados " desordenes ". Por muchas razones es necesario detectar el desorden y estimar su tiempo de ocurrencia. esta puede ser la pregunta de la seguridad del proceso, calidad de la producción o clasificación de los artículos de la producción.

Para todos estos problemas la mejor solución es *la detección rápida del desorden con pocas falsas alarmas como sea posible*. Este criterio es usado porque el retardo para la detección es un periodo de tiempo, durante el cual el proceso está fuera de control sin acción del monitoreo del sistema.

Las falsas alarmas son un gran inconveniente desde cualquier punto de vista, sin embargo, una falla no detectada a tiempo, o detectada con retardo puede ocasionar daños irreparables. La solución óptima de acuerdo a lo mencionado arriba es un compromiso entre detección rápida y pocas alarmas falsas, usando una comparación entre las pérdidas que implican ambos aspectos.

Para resolver este problema, una alternativa es el Enfoque Estadístico que nos permitirá ver las mediciones como un proceso aleatorio. Un comportamiento diferente de la media estimada y desviación estándar, nos conducirá a la posibilidad de la presencia de una falla, y que será considerada como tal al atravesar un umbral de seguridad establecido previamente.

Como el Problema de Detección de Fallas está incluido dentro de la detección de Cambios Abruptos, es común manejar ambos términos. Definimos un *Cambio Abrupto*, a cualquier cambio en los parámetros del sistema que ocurre ya sea instantáneamente o al menos muy rápido con respecto al periodo de muestreo de las mediciones. Cambios abruptos no se refiere necesariamente a cambios con gran magnitud, por lo contrario, en muchas aplicaciones el principal problema es detectar pequeños cambios, mas aún, en algunas aplicaciones los primeros indicios de pequeños (y no necesariamente rápidos o grandes) cambios son de interés crucial en orden para evitar daños como resultado de una acumulación de pequeños cambios.

La *Detección de Cambios Abruptos*, se refiere a las herramientas que nos ayudan a decidir si un cambio ha ocurrido en las características del objeto considerado.

1.2 CONTENIDO DE LA TESIS

1.2.1 OBJETIVOS

Habiéndose realizado una revisión acuciosa sobre el Problema de Detección de Fallas en sistemas y procesos, nos encontramos un amplio material bibliográfico que se encuentra distribuido en dos principales grupos: El Primero, documentos, artículos y libros que tratan el problema FDI con una elevada y rigurosa justificación matemática, enfocado mas a un análisis teórico (" Paper" de IEEE y exclusivamente en Idioma Ingles) adecuado y necesario sin lugar

a dudas, a estudiantes, profesionales e investigadores sobre el área de control, Detección de Fallas y Procesamiento de Señales; y un Segundo grupo con un enfoque informativo, y que permite tener un conocimiento general, vale decir con una tendencia al manejo de software para seguridad industrial.

Sin embargo es poco el material bibliográfico intermedio, que incluya tanto una recopilación teórica sin rigurosidad matemática, como además complementado con información sobre tipos de fallas, clasificaciones y metodología para la detección y propiedades como Detectabilidad y Robustez.

Por consiguiente, los Objetivos Principales de este trabajo de Tesis son:

- I. Realizar un estudio actualizado de las Principales Técnicas y Algoritmos de Detección de Fallas, en base a dos importantes disciplinas sobre este campo: El Geométrico y el Estadístico.
- II. Usando dos Algoritmos representativos de ambos Enfoques, demostrar las siguientes Hipótesis:
 - 1) En presencia de una Falla Grande, y bajo ciertas condiciones de operación, ambos Algoritmos detectan la Falla al mismo tiempo.
 - 2) El Algoritmo Geométrico presenta, si no rapidez, un mejor Rendimiento para el caso de una Falla Pequeña.

METODOLOGIA

El objetivo I es logrado mediante el estudio analítico de las principales Técnicas y Algoritmos de Detección de Fallas, desarrolladas en el capítulo III y capítulo IV

El objetivo II sera validado a través de Simulaciones de dos algoritmos, representativos de cada Enfoque, bajo condiciones similares de operación. La idea es simular la existencia de una falla y observar gráficamente el Rendimiento de cada algoritmo.

Estas simulaciones seran realizadas en SIMNON para MS-DOS y MATLAB para Windows, y la realización de este objetivo está ubicado en el capítulo V.

Un objetivo secundario, es verificar el comportamiento del Umbral de Detección y el valor de la Falla Mínima que puede ser detectada con respecto a la velocidad del Estimador de Estado, el cual suministra la información de la presencia de una falla.

1.2.2 ORGANIZACION GENERAL

El capítulo I está dirigido a " ubicarnos " - sobre el problema de detección de fallas en sistemas dinámicos - contesta implícitamente preguntas como por ejemplo : ¿ de donde surge la necesidad de metodologías para la detección y diagnostico de fallas ? ¿ como se clasifica esta metodología ? y las fallas ¿ como se clasifican ?.

La Robustez y Sensitividad, son propiedades fundamentales que todo algoritmo de detección debe tener y permiten definir la calidad y rendimiento de un algoritmo. El capítulo II está dedicado a desarrollar lo anterior, además de definir los conceptos de Redundancia Analítica, Residuales, Innovación y Detectabilidad.

El capítulo III Y IV constituyen el núcleo principal de este estudio. El Enfoque Estadístico se presenta en el capítulo III, sustentado en cinco tipos de Algoritmos de Detección con propiedad y aplicaciones singulares.

El capítulo IV está dedicado a analizar el Enfoque Geométrico desde una perspectiva de umbrales dinámicos, estudiados en ambos dominios de tiempo y frecuencia. Consideraciones de Optimización para disminuir el compromiso entre "falsas alarmas" y "Detecciones perdidas" son analizadas ampliamente.

El capítulo V contiene las Simulaciones realizadas mediante SIMNON y MATLAB, y el capítulo VI versa sobre las conclusiones y resultados de este trabajo de tesis.

La figura 1.1 nos presenta la Estrategia del Planteamiento de la tesis para Analizar el Problema de Detección.

1.3 ACERCA DE LA CLASIFICACION EN FALLAS O CAMBIOS ABRUPTOS

El problema de detección de falla involucra dos tipos de preguntas. Primero, obviamente la detección de fallas de eventos graves debe ser detectada y diagnosticada; pero en segundo lugar, y a menudo de crucial interés, es la detección de pequeñas fallas " inofensivas " aparentemente, con características repentinas o graduales, las cuales afectan el proceso sin causar un paro inmediato pero que se requiere detectar para prevenir una ocurrencia de eventos catastróficos.

1.3.1 EL PROCESO DE DIAGNOSTICAR UNA FALLA

El problema de Detección e Identificación de Fallas, debe comprender los siguientes tres aspectos fundamentales. (ver [11] pag. 3, para ampliar).

- 1.- **DETECCION DE FALLA:** La indicación de que algo está fallando en el sistema o tiene un comportamiento anormal. Una rápida detección es a menudo de importancia crucial para la reconfiguración de la ley de control.
- 2.- **ESTIMACIÓN DE FALLA:** Está relacionado con el tratamiento de la información obtenida de acuerdo a lo que se requiere. Se puede presentar usualmente dos tipos de fallas: fallas en instrumentación y fallas en el proceso.
- 3.- **DIAGNOSTICO DE FALLA:** Comprende la determinación de la localización exacta de la falla y el tamaño de la misma; incluye determinar la causa física que la genera, a veces se denomina Identificación de la falla.

Existen otros autores que clasifican el problema FDI* en otra forma:

- 1.- Detección de falla.
- 2.- Aislamiento de falla.
- 3.- Identificación de falla.

Pero esencialmente es igual y mas bien depende del tipo de herramienta matemática que se usará.

* La abreviatura FDI se origina del término Failure Detection And Identification, usado ampliamente en la literatura de control.

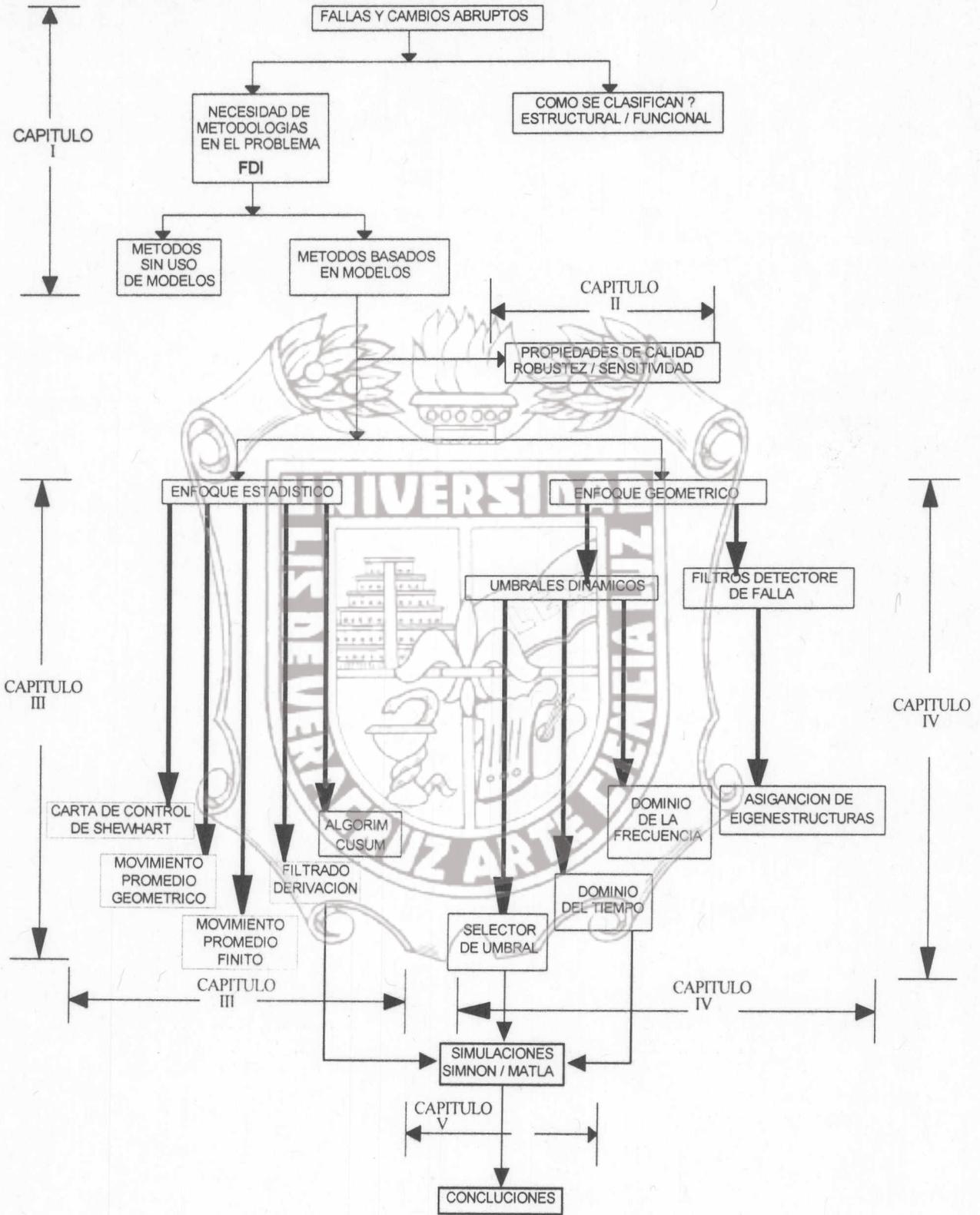


FIG. 1.1 ESTRATEGIA DE PLANTEAMIENTO DE LA TESIS SOBRE EL PROBLEMA DE DETECCIÓN DE FALLAS Y SU METODOLOGIA.

1.3.2 NATURALEZA DE LAS FALLAS

Puede clasificarse la naturaleza de las fallas en diferentes formas, dependiendo del tipo de estructura o enfoque, que se usará para analizar el problema de detección y diagnóstico de la falla. Diferentes métodos y estructuras son expuestos en la sección 1.4.

Por ejemplo en base a métodos de FDI basados en modelos (ver sección 1.4.2), podemos hacer las siguientes clasificación, ([11] pag. 4) :

- 1.- **FALLAS DE MEDICIONES ADITIVAS** .- Son discrepancias entre las mediciones y los valores verdaderos de las variables de Salida y Entrada de la planta; tales fallas describen bien los sensores de polarización.
- 2.- **FALLAS DE PROCESOS ADITIVAS**.- Son disturbios (entradas no medibles) actuando en la planta , las cuales son normalmente cero y causan un cambio en la salida de la planta independiente de los valores de la entrada; tales fallas describen bien las fugas en las plantas.
- 3.- **FALLAS DE PROCESOS MULTIPLICATIVAS**.- Estos son cambios (abruptos o graduales) de los parámetros de la planta; tales fallas describen la deterioración del equipo de la planta.

Las fallas aditivas (ya sea en mediciones o procesos) son distinguibles del ruido. El ruido es considerado aleatorio con media cero.

Las fallas aditivas son consideradas determinísticas, (constante o a la deriva pero conocida) o semideterminísticas, saltos ocurriendo en intervalos aleatorios con amplitudes aleatorias ([11] Pag. 4).

Muchos disturbios no son completamente aditivos y es probable que involucre a varios tipos de fallas.

•Es importante considerar que la existencia de una falla siempre involucra un proceso estadístico por la eventualidad de la ocurrencia.

Desde un punto de vista Estadístico, se puede clasificar los problemas de detección de cambios en:

- 1.- Detección de cambios aditivos.
- 2.- Detección de cambios no aditivos o espectrales.

Intuitivamente podemos reconocer la diferencia entre ellos. En la fig. 1.2 tenemos un salto, a decir un cambio en el valor medio de la señal; en la fig. 1.3 se presenta un cambio en el comportamiento alrededor del nivel medio espectral.

Es fácil concluir que estos dos correspondientes problemas de detección de cambios no representan la misma característica.

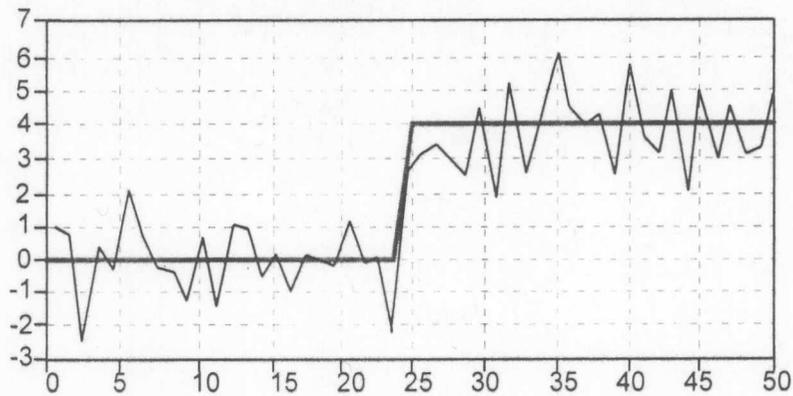


FIG. 1.2 INCREMENTO EN LA MEDIA CON VARIANZA CONSTANTE

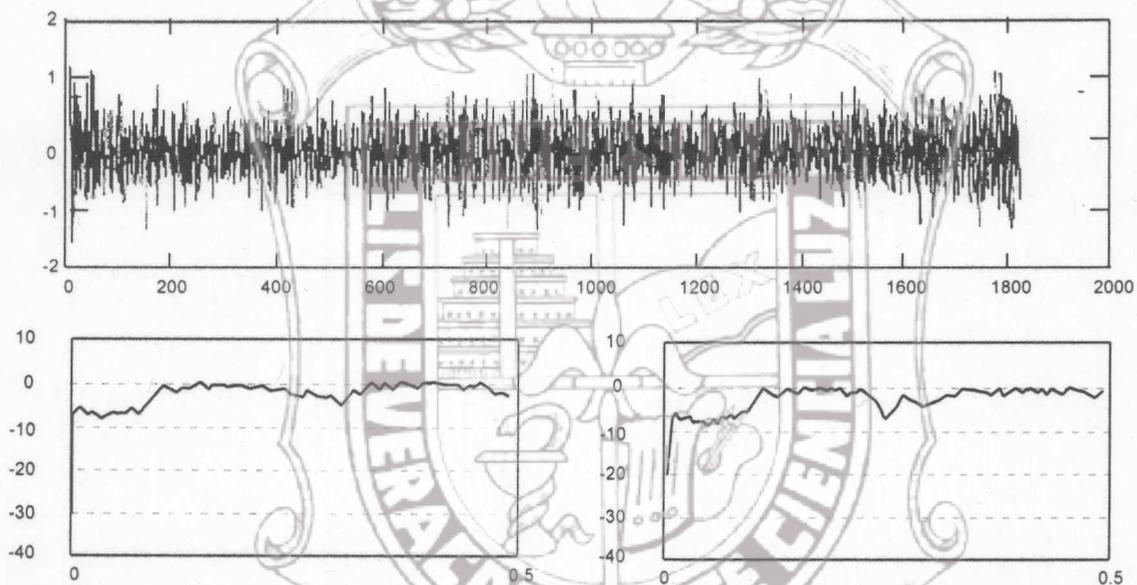


FIG. 1.3 UN CAMBIO ESPECTRAL (tiempo del cambio en 1000), Y DENSIDADES ESPECTRALES ANTES Y DESPUÉS DEL CAMBIO (Escala logarítmica).

CAMBIOS ADITIVOS

Cuando nos referimos a cualquier cambio en una señal o en un sistema lineal que resulta en *-Cambios Solamente En El Valor Medio-* de la secuencia de observaciones (ver [6] sección 6.1 para ampliar).

Consideremos un sistema que nos genere la secuencia de observaciones: Por ejemplo un filtro, cuya función de transferencia sea T . Si un cambio aditivo ocurre en el valor medio θ de la entrada V de este filtro, este cambio no afectara la dinámica de T . En la fig. 1.4 se describen estas características.

CAMBIOS NO ADITIVOS O ESPECTRALES.

Este caso se refiere cuando los cambios ocurren en la varianza, correlación, características espectrales y en la dinámica del sistema o de la señal. En otras palabras estos cambios actúan como cambios multiplicativos en la función de transferencia T .

Dos casos pueden ser distinguidos. en el primer caso, el cambio asumido que ocurre en la energía de la señal de entrada V ; así esto no afecta la dinámica del sistema y el problema de detección permanece sin cambio bajo cualquier transformación.

En el segundo caso los cambios afectan la dinámica del sistema, el problema es mas complejo y por consiguiente se requiere de un procedimiento mas sofisticado para la detección de tales cambios.

MODELO DEL PROCESO ALGORITMO DE DETECCION DE CAMBIO

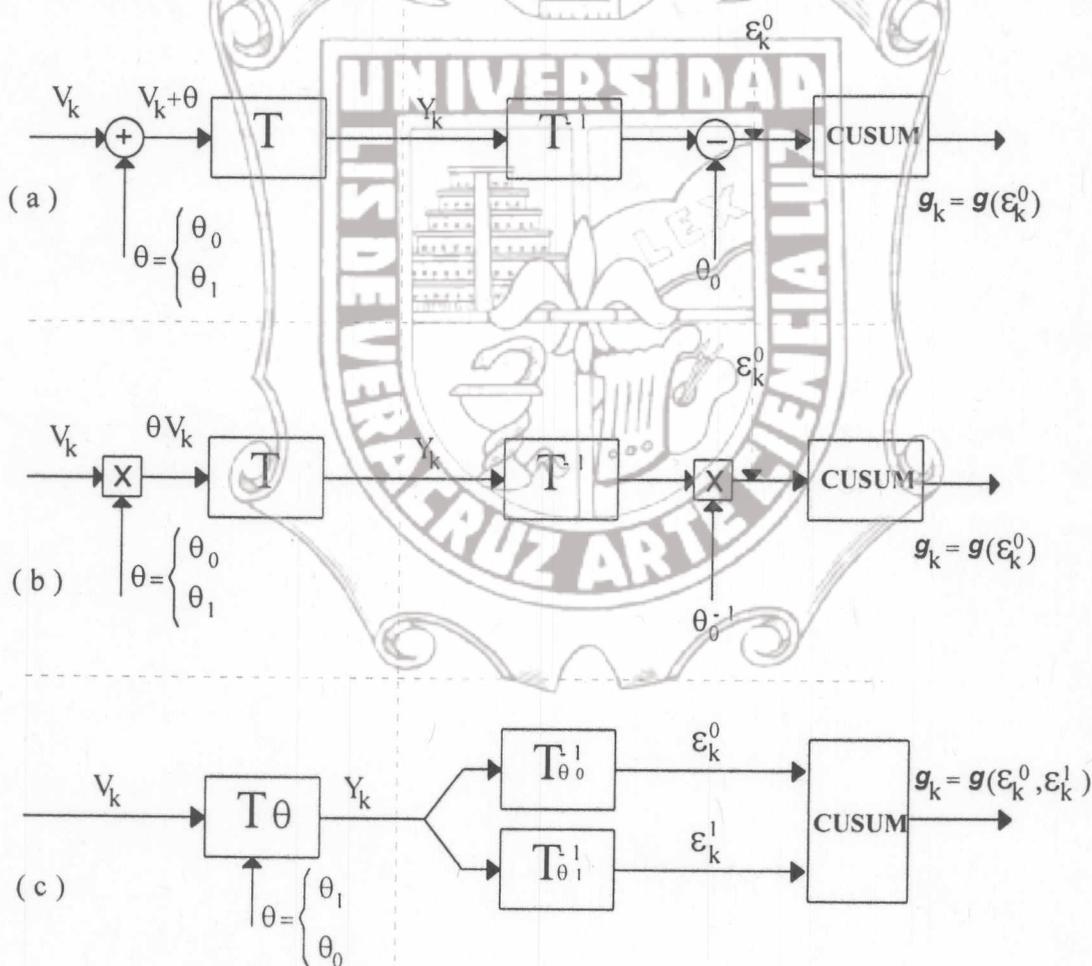


FIG. 1.4 PROPIEDADES DE LOS CAMBIOS ADITIVOS Y NO ADITIVOS

El caso (a) corresponde a Cambios Aditivos; los casos (b) y (c) a los Cambios No Aditivos.

1.4 CLASIFICACION DE LA METODOLOGIA EN EL PROBLEMA DE DETECCION DE FALLAS

Los enfoques al problema de Detección y Aislamiento de Falla se sitúan en los dos principales grupos:

- Métodos que no hacen uso de un modelo de planta o señal.
- Métodos que hacen uso de un modelo de planta o señal.

El objetivo de esta tesis está orientado a Métodos Basados en Modelos.

En esta sección nos referimos brevemente a los métodos *-Libres De Modelos -*, dejando para el capítulo III y IV, profundizar en los *-Basados En Modelos -*.

1.4.1 METODOS DE DETECCIÓN QUE NO HACEN USO DE MODELOS.

A continuación se describen brevemente estos métodos (para ampliar ver [11] pag. 4):

- 1) VERIFICANDO LIMITE : Las mediciones de la planta son comparadas con límites de "seguridad", excediéndose el límite indica una situación de falla. En muchos sistemas hay dos niveles de límite:
 - El primer nivel sirve para precaución, mientras que
 - El segundo nivel dispara la acción de emergencia.
- 2) INSTALACION DE SENSORES ESPECIALES: Estos pueden ser sensores de límites para verificar el Hardware y/o medidas de variables especiales.
- 3) INSTALACION DE MULTIPLES SENSORES (Redundancia Física): Estas mediciones están dirigidas especialmente a detectar y aislar sensores con falla. La medición de algunas variables con diferentes sensores son comparadas, cualquier seria discrepancia es una indicación de la falla de al menos un sensor.
- 4) ANALISIS DE FRECUENCIA: Algunas mediciones de plantas tienen un espectro típico de frecuencia bajo ciertas condiciones de operación normal; cualquier desviación de esto es una indicación de una anomalía. Ciertos tipos de fallas pueden tener una propiedad característica en el espectro que puede ser usada para el aislamiento de la falla.
- 5) SISTEMAS EXPERTOS* : Es ortogonal a los métodos anteriores y está dirigido a evaluar la falla a partir de los síntomas o señales obtenidas por la detección en Hardware o Software. El sistema usualmente consiste de una combinación de reglas lógicas de la forma: IF síntoma AND síntoma THEN conclusión; donde cada conclusión puede llegar a ser una señal o síntoma para la siguiente regla, a menos que la conclusión final (la especificación de la falla) haya sido alcanzada.

* Para profundizar en el tema de Sistemas Expertos aplicado a control y detección de fallas, recomendamos:[8] cap 9 y 14, [15].

1.4.2 METODOS DE DETECCION QUE HACEN USO DE MODELOS

Los Métodos de Detección y Diagnostico de Falla usados en modelos cuentan con la idea de " Redundancia Analítica ", en contraste con la " Redundancia Física " cuando las mediciones de diferentes sensores son comparadas.

Ahora, las mediciones de un mismo sensor son comparadas, mediante un procedimiento analítico, y el resultado de esta comparación se denomina **Residual**. La idea puede ser extendida a la comparación de cantidades generadas analíticamente, cada una obtenida a través de diferentes cálculos. En [11] se da una explicación sobre el desarrollo de estos métodos.

Mientras el residual sea cero en situación ideal, en la practica raramente se da el caso. La desviación de cero es la combinación resultante de ruido y fallas. Si el ruido es despreciable el Residual puede ser analizado directamente; con cualquier ruido significativo presente será necesario un análisis estadístico.

En cualquier caso un patrón lógico es generado, mostrando cuales residuales pueden ser considerados normales y cuales indican falla. Tales " patrones " son llamados " la firma o propiedad " de la falla.

El paso final del procedimiento es el análisis de los patrones lógicos obtenidos de los residuales, con el objetivo de aislar la falla o fallas que provocan esto.

Un primer intento para estructurar la Detección en base a Modelos es propuesto por Chow and Willsky, 1984. Los tres estados del procedimiento de Detección y Aislamiento de una falla, denominados Generación Residual, prueba estadística y análisis lógico matemático, se presentan en la figura 1.5



FIG 1.5 ESTADOS DEL PROCEDIMIENTO DE DETECCIÓN Y AISLAMIENTO

1.4.3 ¿ EL PORQUE DE UN MODELO ?

Hay varias razones importantes:

1.- El disponer de un modelo, de una planta o proceso físico, nos permite realizar una innumerable cantidad de simulaciones de falla, para observar el comportamiento de las variables importantes de la planta.

Ademas obtenemos información sobre, lo que podemos esperar, si la planta está realmente fallando.

II.- El uso de un modelo, permite comparar la salida real de la planta con la salida del modelo. Esta diferencia resultante sería un Residual. En condiciones ideales, libre de ruido, el Residual sería cero si no hay falla, y diferente de cero en caso contrario.

Un caso real, considerando ruido y los errores de modelado, nos obliga a que el Residual sea comparado con un valor Umbral. Si lo excede se declara que hay una falla. La figura 1.6 ilustra lo anterior:

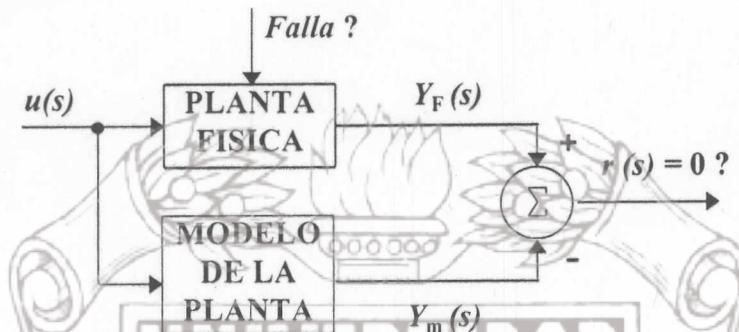


FIG 1.6 GENERANDO UN RESIDUAL BASICO

Claro está que el ejemplo anterior es un procedimiento básico. El uso de Modelos tiene un mayor alcance en la Detección de Falla.

1.5 PRELIMINARES SOBRE LOS ENFOQUES ESTADÍSTICOS Y GEOMÉTRICOS

Las motivaciones que conducen al uso de una metodología y estructura para el problema de detección de cambios abruptos puede ser resumida como sigue:

- Desde el punto de vista teórico permite el tratamiento y proceso de cambios abruptos; nos facilita el manejo desde el punto de vista no adaptivo (un análisis adaptivo solo nos permite el manejo de cambios lentos) y tratar así con fenómenos no estacionarios.
- Desde el punto de vista práctico; las herramientas de decisión estadísticas para la detección y estimación de cambios " sumergidos en un ambiente de ruido " son fundamentales en el tratamiento de las fallas.
- El manejo de incertidumbre del modelo, solo puede ser manejado en una estructura de modelo.

Un posible enfoque para Detección de Fallas consiste en separar el procedimiento de la fig. 1.5 en dos pasos:

1. GENERACIÓN DE RESIDUALES-, los cuales idealmente es cercano a cero en ausencia de cambios, y significativamente diferente después de un cambio.
2. EL DISEÑO DE REGLAS DE DECISION- basado en estos residuales.

Una forma de obtener tales residuales es el uso de *-Redundancia Analítica-* principalmente cuando el ambiente de operación no es muy "ruidoso". Esta técnica conforma junto con otras, el *-Enfoque Geométrico -*.

En un ambiente de excesivo ruido, puede ser usado el *-Enfoque Estadístico-*. En este caso la generación de residuales está incluida en la derivación del mismo algoritmo y no tiene que ser considerada como una tarea separada.

1.5.1 ENFOQUE GEOMETRICO

En la literatura de control se conoce este enfoque como Técnicas de Redundancia Analítica y Espacios de Paridad.

El Enfoque Geométrico es ampliamente analizado por autores como Gertler, 1991; Patton and Chen, 1991; Massumnia y Emani-Naeini, 1989, y mas recientes Khargonekar y Ding, 1993.

Las herramientas principales que las técnicas de Redundancia Analítica utilizan, están basadas en el complemento ortogonal de la matriz de la observabilidad, Factorización Estable de la función de transferencia y diseño de observadores.

En el problema de detección para este método no se usa la información " preliminar " o previa de los parametros que experimentan el cambio.

Se pueden distinguir entre dos clases de métodos.

- En el primer caso se consideran métodos que trabajan básicamente para resolver el problema de detección solamente; están incluidos en este caso los enfoques de Redundancia Directa y Temporal y el Enfoque de Espacios de Paridad.
- En el segundo caso se consideran métodos que solucionan el problema de detección y aislamiento simultáneamente. Este es el caso del Enfoque de Observadores y Filtros Detectores.

1.5.2 ENFOQUE ESTADISTICO

Es importante considerar que la existencia de una falla siempre involucra un proceso estadístico, por la eventualidad de la ocurrencia.

Se puede clasificar la aplicación de la Metodología Estadística en tres problemas generales:

1.- DETECCIÓN DE UN CAMBIO ON-LINE *

El problema puede ser declarado como sigue: sea $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ una secuencia de variables aleatorias observadas, con densidad condicional $P_\theta(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1)$ antes del tiempo de cambio desconocido t_0 , el parámetro de la densidad condicional θ es constante e igual a θ_0 .

Después del cambio, el parámetro es igual a θ_1 . El problema ON-LINE es detectar la ocurrencia del cambio tanto como sea posible, con una pequeña tasa de falsas alarmas antes de t_0 .

Por ejemplo, el parámetro θ del cambio puede ser la Media de la Observación.

2.- PRUEBA DE HIPOTESIS OFF-LINE.

Ahora se consideran las hipótesis "sin cambio" y "con cambio".

Donde:

H_0 : La Hipótesis de "sin cambio"

H_1 : La Hipótesis de "con cambio"

El criterio a usar es un compromiso entre la capacidad de detectar cambios actuales, cuando ellos ocurren (lo cual requiere una gran sensibilidad a los efectos en la alta frecuencia), y la capacidad de no detectar ninguno cuando no ocurren cambios (lo cual requiere una baja sensibilidad a los efectos del ruido).

La idea es maximizar la probabilidad de decisión de H_1 , cuando H_1 es actualmente verdadera; por el contrario H_1 estará restringida a un valor fijo, cuando H_0 sea actualmente verdadera.

3.- ESTIMACIÓN DEL TIEMPO DEL CAMBIO EN OFF-LINE.

Se considera la misma hipótesis que el caso anterior y se asume que un cambio ocurre dentro del muestreo de observaciones. El objetivo es estimar t_0 ; la estimación de t_0 puede posiblemente usar información acerca de θ_0 y θ_1 .

De los tres problemas mencionados arriba solo el primero (ON-LINE) es tratado a profundidad (cap. III), por considerarse el de mayor importancia y de aplicación real en la mayoría de todo proceso dinámico.

Los cinco índices intuitivos del rendimiento para el diseño y evaluación de algoritmos de detección de cambios en el enfoque estadístico son:

*A lo largo de la tesis los terminos ON-LINE Y OFF-LINE por su simpleza y aceptación general, serán usados en vez de su traducción al español.

- 1.- Tiempo medio entre falsas alarmas.
- 2.- Probabilidad de falsas detecciones .
- 3.- Retardo medio para detecciones.
- 4.- Probabilidad de no detecciones.
- 5.- Precisión del tiempo de cambio y estimados de magnitud.

También se considera útil la información de la distribución antes y después del cambio. Otra propiedad de gran importancia es la ROBUSTEZ* ; algoritmos que son robustos con respecto a las condiciones de ruido y errores de modelado, y que pueden fácilmente sintonizarse son obviamente preferidos.

En la fig. 1.7 se presenta una descripción general del diagnostico de falla.

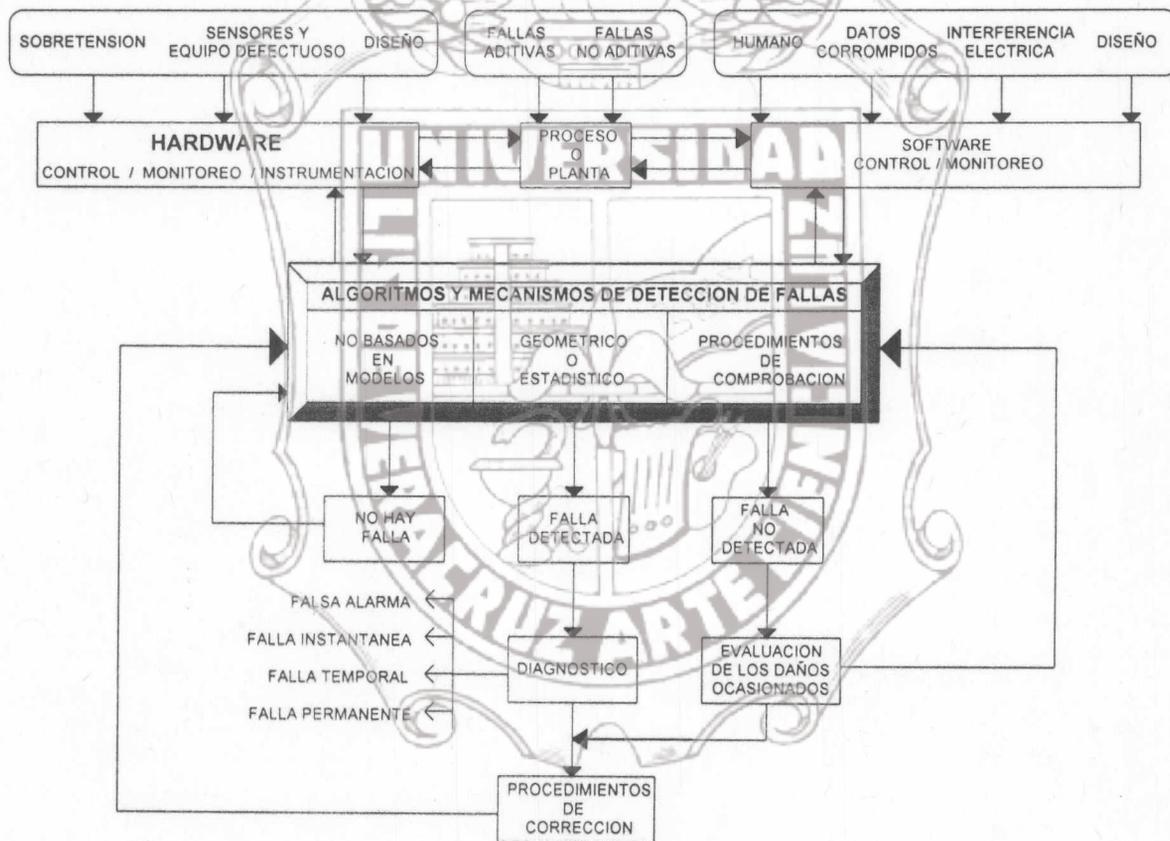


FIG 1.7 DESCRIPCION GENERAL DEL DIAGNOSTICO DE FALLAS

* El termino ROBUSTEZ puede traducirse como ROBUSTO o ROBUSTEZ indistintamente.

CAPITULO II

PROPIEDADES DE LOS ALGORITMOS DE DETECCION DE FALLAS

El capítulo II nos presenta las propiedades mas importantes de los Algoritmos de detección de falla.

Es un material preliminar y de apoyo para comprender el desarrollo formal del Enfoque Estadístico en el capítulo III y el Enfoque Geométrico en el capítulo IV.

Si los capítulos III y IV nos desarrollan algoritmos de detección, el capítulo II nos dice que propiedades y restricciones deben tener estos algoritmos, para que un diseño presente características de sensibilidad y Robustez apropiadas.

La sección 2.1 nos desarrolla el concepto de Redundancia Analítica y Residuales y la sección 2.2 trata de dos características fundamentales que un algoritmo de detección debe de "aprobar": la sensibilidad a la falla y la Robustez al ruido e incertidumbres del modelo. Conceptos como Innovación, Suficiencia y Detectabilidad son desarrollados brevemente en la sección 2.3.

2.1 REDUNDANCIA ANALITICA Y RESIDUALES

Como se había explicado brevemente en la subsección 1.4.2, el concepto de Residuales proviene del manejo de Redundancia Analítica.

La Redundancia Analítica es la contraparte de la Redundancia Física. Si la Redundancia Física compara las mediciones de varios sensores, para evaluar si hay Falla o si algún sensor esta Fallando; por el contrario la Redundancia Analítica utiliza la medición de un solo sensor que mide la variable del proceso, y mediante varios - *Procedimientos Analíticos Equivalentes* - obtener una medida artificial de la variable del proceso.

La variable del proceso será comparada con estas medidas artificiales, y cualquier desviación es un indicativo de la presencia de una Falla. La diferencia entre la medida real y la analítica es denominado Residual. Estos Residuales son aproximadamente igual a cero o menor que un valor Umbral mientras no haya Falla, pero significativamente diferente de cero cuando existe una Falla.

Estos -*Procedimientos Analíticos para generar medidas artificiales*- pueden utilizar Observadores de Estado, y usualmente se les denomina Generadores de Residual.

El uso de Modelos de la planta permite la construcción analítica de Generadores de Residual. La fig. 2.1 nos ayuda a ampliar este concepto.

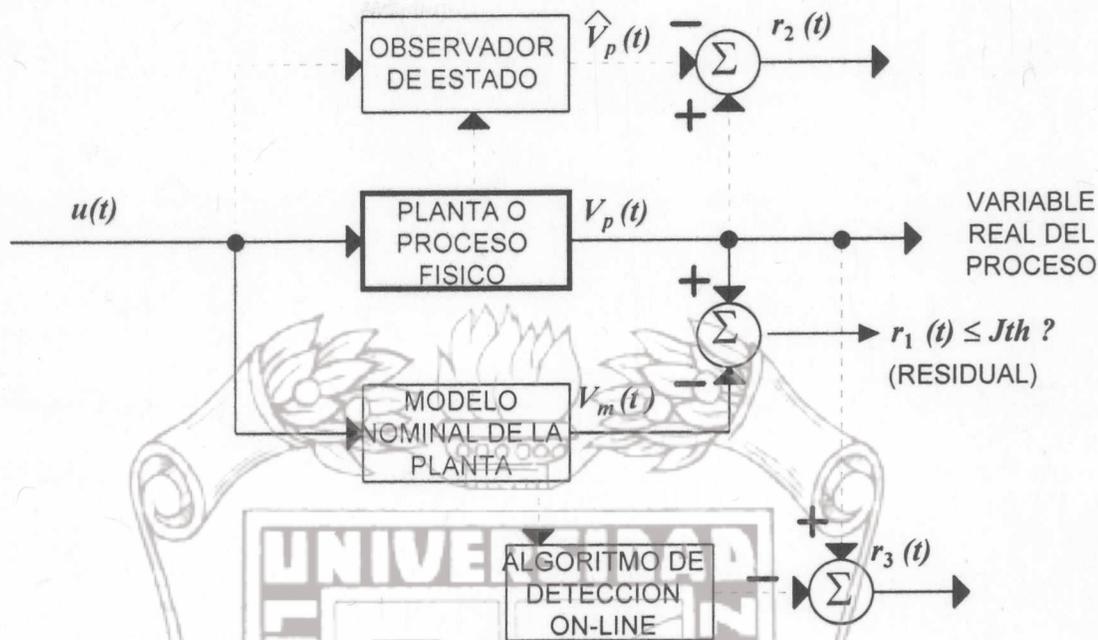


FIG.2.1 APLICACION DE LA REDUNDANCIA ANALITICA PARA OBTENER RESIDUALES

Sin embargo, debido a que los estimados no son exactos, no es posible tener una exactitud de la dinámica de la planta. Estas incertidumbres provocan que los Residuales aun en ausencia de Falla sean diferentes de cero, lo que obliga al uso de Umbrales.

El uso de Umbrales ocasiona otra disyuntiva: Un Umbral demasiado bajo aumenta la tasa de Falsas Alarmas; un Umbral demasiado alto aumenta la tasa de Detecciones Perdidas. La elección del Valor Umbral es discutido ampliamente en el capítulo IV.

En otros casos el valor medio o las propiedades espectrales de estos Residuales pueden cambiar cuando ocurre una falla; desde el punto de vista Estadístico una forma conveniente de generar estas medidas artificiales es derivar una "Estadística Suficiente" *.

Los Residuales pueden ser aplicados tanto a las variables de la planta como a los parámetros de la dinámica de la planta.

Una ecuación básica de un Residual mediante Redundancia Analítica seria:

$$\text{Sea } G(s) \text{ el modelo de una planta : } G(s) = \frac{q(s)}{P(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.1.1)$$

En ausencia de ruido y condiciones libres de incertidumbre la ecuación del Residual es:

$$r(s) = h(s)[P(s)y(s) - q(s)u(s)] \quad (2.1.2)$$

* Estadística Suficiente es toda la información disponible acerca del parámetro del cambio.

CASO I.- No hay falla:

$$\text{Entonces } y = y_0 = G(s)u(s) = \frac{q(s)}{P(s)}u(s) \Rightarrow r(s) = 0 \quad (2.1.3)$$

CASO II.- Hay falla:

$$y = y_0 + f(s) = \frac{q(s)}{P(s)}u(s) + f(s) \Rightarrow r(s) = h(s)P(s)f(s) \quad (2.1.4)$$

Donde $h(s)P(s)$ es una matriz de ponderación de la falla.

2.2 SENSITIVIDAD Y ROBUSTEZ

El objetivo de esta sección es definir en forma cualitativa, los conceptos de Aislamiento y Robustez.

La mejora de la Sensitividad por medio de filtros es analizada, así mismo la técnica de cancelación algebraica para mejorar la Robustez. Se menciona otro procedimiento para mejora de la Robustez : " Alcanzabilidad de los intervalos de medición " .

Se finaliza con una explicación sobre el diseño de algoritmos de detección en base a la Robustez.

CONCEPTOS

La **Sensitividad** es una medida cualitativa, caracterizando el tamaño de la falla que puede ser aislada bajo ciertas condiciones. La sensitividad depende del tamaño de los elementos respectivos en las matrices del sistema y de las propiedades de ruido. Cercanamente relacionada a la sensitividad es el -" *Tiempo Para Detectar / Aislar Una Falla* "-.

Una buena estructura de modelo para aislamiento es importante, la cual puede garantizar la identificación si la falla es bastante grande, pero es también de interés que tamaño de falla es realmente necesario para disparar la prueba. Esta pregunta puede ser contestada por análisis de sensitividad.

Los aspectos de sensitividad también pueden condicionar la selección del modelo apropiado. Para mejorar la sensitividad sin una estructura de modelo en particular, puede usarse la técnica de filtrado.

La **Robustez** es la habilidad de un procedimiento para aislar fallas en la presencia de errores de modelado. Este es un problema importante, ya que los errores son prácticamente inevitables y pueden interferir seriamente con el aislamiento de fallas. Estos errores de modelado pueden presentarse igual como una falla de procesos multiplicativos y puede solamente ser distinguidos de esta ultima, basado en la temporalidad de la discrepancia.

Los errores de modelado aparecen como discrepancias entre los parámetros verdaderos de la planta y los parámetros del modelo.

Tales errores de modelado son indistinguibles de ciertas fallas de procesos multiplicativos en muchas ocasiones. La conducta temporal de estos comportamientos pueden proveernos pistas para determinar si es consecuencia de una falla o de un cambio en el punto

de operación (se genera un error de modelado por la aproximación lineal de un sistema no lineal).

MEDIDAS DE SENSITIVIDAD

En una estructura estadística, una posible medida de la sensibilidad es el valor marginal de una falla que dispara una prueba, si el valor momentáneo de el ruido es cero.

Si los Residuales son examinados en paralelo, estos valores marginales de disparo de una falla son diferentes, en general para cada Residual:

$$\tau_{ij} = J_i / f_{ij} \quad (2.2.1)$$

Aquí τ_{ij} es el valor marginal de la falla $-j$ que dispara la prueba para el Residual- i y J_i es el Umbral para el Residual $-i$. El umbral esta relacionado a la varianza - Libre De Falla - de el Residual que depende del ruido y de las matrices del sistema.

El parámetro f_{ij} , caracteriza la influencia de la falla $-j$ sobre el Residual- i ; para una falla aditiva esta es constante (ver [11] pag. 9 para ampliar).

Bajo este planteamiento se genera una matriz característica de la sensibilidad de la falla, de esta forma se maneja la sensibilidad en una medida escalar, implicando parcialidad o referencia sobre algún Residual.

MEJORAMIENTO DE LA SENSITIVIDAD VIA FILTRADO

La Sensitividad a la falla puede ser mejorada (Evans and Wilcox, 1970; Gertler and Singer, 1985) por el filtrado de los Residuales. La idea es reducir el efecto de (altas-frecuencias) ruido mientras mantengamos el efecto de (bajas-frecuencias) las fallas.

Este puede ser diseñado tal que la varianza - libre de falla - de la salida del Filtro sea mucho mas pequeña que la entrada, aunque sus medias sean iguales.

Este tipo de filtro trabaja bien si las ecuaciones del Residual son estáticas o, en el caso de ecuaciones dinámicas si los Residuales dependen de la falla en una forma proporcional. Si la relación es de diferente naturaleza, el filtrado podría reducir la Sensitividad a la falla; por tanto puede ser necesario la colocación de filtros paralelos con diferentes coeficientes (Sundar, 1985).

MEJORAMIENTO DE LA ROBUSTEZ VIA CANCELACIÓN ALGEBRAICA

La Robustez del algoritmo de FDI puede ser mejorado por desensitivar los Residuales con respecto a ciertos errores de modelado. Esto puede ser mejorado por cancelación algebraica de algunos términos de las ecuaciones del Residual; esto es básicamente la extensión a errores de modelado de el concepto de aislamiento y transformación de modelo.

Los conceptos de cancelación han sido aplicados muy bien a Residuales - basados en observadores -. Si los Residuales son obtenidos como la diferencia entre las salidas de dos observadores, estos pueden ser diseñados tal que algunas incertidumbres de las matrices del

modelo de estado sean inefectivas (Paton and Willcox, 1985). Este método también está sujeto a limitaciones dependiendo de la frecuencia (velocidad de cambio) de las variables de la planta.

Los observadores pueden ser diseñados para presentar exactamente cero sensibilidad con respecto a errores de modelado en la ecuación de estado, asegurando de esta forma que todas las entradas de la planta y algunas salidas están garantizadas libres de fallas (Watanabe and Himmelblau, 1982).

ALCANZABILIDAD EN LOS INTERVALOS DE MEDICIÓN

El problema de errores de modelado ha sido enfocado en una forma diferente por Horak y colaboradores (Horak and Goblirsh, 1986; Horak and Allison, 1987).

Dada las variables de entrada y el rango de incertidumbre de los parámetros del modelo Espacio-Estado, el intervalo de alcanzabilidad de las variables de salida está explícitamente calculable.

Una vez que los intervalos de alcanzabilidad hayan sido obtenidos ellos sirven como "umbrales dinámicos" para las mediciones momentáneas. El método es atractivo para detección de falla, pero necesita aún mas desarrollo antes de que pueda efectivamente apoyar el aislamiento de fallas.

DISEÑO POR ROBUSTEZ.

Como indicamos inicialmente, usualmente un gran numero de diferentes modelos puede ser generado por transformación, los cuales todos describen el mismo sistema físico. Estos modelos tienen diferentes estructuras y parámetros y de hecho, diferentes propiedades de Sensitividad y Robustez. Esta gran cantidad de modelos hace posible al menos, en principio, seleccionar uno que sea el mejor desde el punto de vista de Sensitividad y/o Robustez.

Hay dos grandes razones porque esta selección es mas bien difícil de realizar. Primero, es generalmente imposible formular una única medida que describa las propiedades de Sensitividad y Robustez requeridas, debido a que usualmente varían con el tiempo (con las situaciones de falla / ruido / errores de modelado)

Segundo, aun si estos requerimientos son claramente formulados, un gran numero de posibles modelos descartan una solución Analítica.

Chow and Willsky (1984) dan una formulación *-Minimax : Mínima-Máxima-* para el problema del diseño de un modelo robusto, buscando la mejor Ecuación de Paridad* que produzcan el menor Residual bajo el peor error de modelado para un sistema *-Libre De Falla-*.

*Ecuaciones de Paridad: Son básicamente Ecuaciones Matemáticas, que en ausencia de Falla son Homogéneas.

Lou (1986) reporta una solución elegante para el caso cuando la incertidumbre del modelo es representada por un conjunto finito de variantes posibles con ligeras diferencias del modelo.

Mientras muchas fallas pueden, bajo circunstancias normales, ser aisladas basado en un simple modelo, el uso de múltiples modelos mejora significativamente la Robustez de los procedimientos de aislamiento (Gertler and Singer, 1989).

Los aspectos de Sensitividad y Robustez pueden variar con las situaciones de fallas, ruido y errores de modelado, y son mejor tomadas en consideración en un procedimiento de diseño que hace uso de Redundancia de modelos proporcionados por transformación.

2.3 INNOVACION Y DETECTABILIDAD

El concepto de Innovación es originado del uso de Observadores y Estimadores de Estado, en la Detección de Fallas.

Estos Observadores utilizan la señal de monitoreo para generar un Error de Estimación o Residual. La señal de salida contiene todas las características propias de la falla, que esta presente en la señal de monitoreo. Lo anterior, siempre y cuando las fallas sean Aditivas.

Estos estimados se denominan, especialmente en el Enfoque Estadístico - *Innovaciones* -, sin embargo es usado también cuando se maneja un Enfoque Geométrico.

La Innovación Estadística permite detectar un cambio, cuando la media del Residual experimenta un cambio debido a la presencia de una Falla. - *Cambios Aditivos permanecen Aditivos bajo la Transformación de Observaciones a Innovaciones* - **. Esta propiedad es la idea clave del uso de Innovaciones en el Enfoque Estadístico.

El uso de Filtros Kalman para obtener Innovaciones Estadísticas es fundamental, ya que permite el manejo del ruido en una forma óptima, especialmente en el caso de ruido Gaussiano.

La Innovación Geométrica no necesariamente utiliza un Filtro Kalman para generar el Error de Estimación o Residual. Puede usar Observadores Luenberger de orden completo o reducido.

La idea es la misma :- *Reflejar en el Residual, los cambios que experimenta la señal de monitoreo* -.

SUFICIENCIA ESTADISTICA Y GEOMETRICA

Una **Estadística Suficiente** es una función particular de las observaciones sin procesar, la cual concentra toda la información disponible acerca del parámetro desconocido θ

Una - *Estadística Suficiente* - es mejor que otra, si tiene mas opciones con que identificar la presencia de un cambio.

** [6] pag. 250

Por ejemplo; si una Estadística refleja cambios que ocurren en la media, pero no en la varianza, esta es inferior a otra Estadística que refleja cambios en ambos.

En forma análoga, una **Geometría Suficiente** sería el grado de conocimiento de la incidencia de la falla en la dinámica del sistema.

Por ejemplo; si conocemos que la presencia de una falla provoca una alteración con magnitud acotada en un rango específico del Espectro de Frecuencia, esta es superior a otra que solo nos indica el aumento de un valor RMS de la señal observada.

DETECTABILIDAD ESTADÍSTICA Y GEOMÉTRICA

La **Detectabilidad Estadística** debe ser considerada desde dos puntos de vista ([6] pag. 231).

El primero investiga cuáles cambios son detectables y cuáles no lo son. En la misma forma que la observabilidad y controlabilidad dependen de la observación y control de la matriz del sistema, la Detectabilidad depende de la herramienta estadística que es usada para la detección. Por tanto la Detectabilidad de un cambio debería ser definida en términos de el efecto o firma que produce la *-Estadística Suficiente-* usada en la regla de decisión. Por ejemplo, si la estadística refleja posibles cambios en el sistema, por alteraciones que ocurren en su valor medio, cualquier cambio que no modifique el valor medio no será detectado.

Un segundo nivel define la Detectabilidad como un índice de rendimiento de la regla de decisión. La detectabilidad puede ser analizada tanto desde el punto de vista geométrico como estadístico.

Estadísticamente, se puede definir la Detectabilidad de un cambio con la ayuda de una característica intrínseca del sistema, por decir, la información mutua entre los dos modelos antes y después del cambio.

Se demuestra, que los dos puntos de vista:

- La Detectabilidad es una característica intrínseca del sistema y
- La Detectabilidad depende de las herramientas de detección que son usadas, no son excluyentes, mas bien complementarios.

Otro punto de vista de definir la Detectabilidad es, *-Medir la habilidad de un algoritmo de detección para detectar un cambio particular-*.

La **Detectabilidad Geométrica** está relacionada con las propiedades de Observabilidad y Controlabilidad del sistema. Un sistema se dice Detectable, si todos los Modos No-Observables tiene sus correspondientes Eigenvalores estrictamente en el semiplano izquierdo, o sea que un mínimo requisito de Detectabilidad, es la Estabilidad de los Modos No-Observables.

Recordemos que los Modos No-Observables son aquellos estados x , en los cuales para $t \geq 0$, y una señal de control $u(t) = 0$, el estado inicial $x(0) = x$ resulta en una salida $y(t) = 0$, para toda $t > 0$.

CAPITULO III

EL PROBLEMA DE DETECCION DE FALLAS EN EL ENFOQUE ESTADISTICO.

El capitulo 3 está dedicado a analizar los Algoritmos Estadísticos mas importantes, utilizados para la detección de Cambios Abruptos.

La sección 3.1 comprende la parte I del capitulo I, y como se indica nos presenta la herramienta necesaria para manejar y obtener utilidad de los Algoritmos de detección.

Posteriormente la parte II analiza diferentes tipos de Algoritmos: Los Algoritmos Elementales de la sección 3.2 desarrollan las ideas claves, en que se basan los Algoritmos más elaborados y con mayor grado de precisión como es el algoritmo CUSUM.

Los Algoritmos de la sección 3.2 y 3.3 consideran que está disponible o puede obtenerse (por medio de estimación o por información apriori del muestreo de ocurrencias de fallas anteriores) el parametro θ_1 , despues de ocurrida la falla.

Por ultimo la sección 3.4 es un resumen de las ideas claves de los Algoritmos expuestos.

PARTE I .- HERRAMIENTAS ESTADISTICAS PARA DETECCION DE CAMBIOS ABRUPTOS.

3.1 FORMAL DEFINICION DE CRITERIOS

En esta sección se definen algunos criterios teóricos aplicables a Algoritmos de Detección Estadísticos.

Se inicia con una definición formal sobre la Detección de un Cambio ON-LINE; el asunto de Modelos para señales y plantas y su relación con fallas es expuesto en 3.1.2, y la sección 3.1.3 nos desarrolla las características mas importantes de las Funciones de Decisión Estadística, las cuales son utilizadas para la evaluación de los Algoritmos de la parte II.

3.1.1 DETECCION DE UN CAMBIO ON-LINE

El problema puede ser declarado como sigue:

Sea $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ una secuencia de variables aleatorias observadas, con densidad, condicional.

$$P_{\theta}(y_k | y_{k-1}, \dots, y_1) \quad (3.1.1)$$

Antes del tiempo de cambio desconocido t_0 , el parámetro de la densidad condicional θ es constante e igual a θ_0 ; después del cambio el parámetro es igual a θ_1 .

El problema ON-LINE es detectar la ocurrencia del cambio tanto como sea posible, con una pequeña tasa de falsas alarmas antes de t_0 .

La estimación de el tiempo de cambio t_0 no es requerida para este caso.

El *retardo para detección* es el tiempo que tarda el algoritmo para disparar la prueba cuando un cambio esta ocurriendo.

Para estimar la eficiencia de la detección, es conveniente usar el *-Retardo Medio Para La Detección-* y el *-Tiempo Medio Para Las Falsas Alarmas-*.

Se puede distinguir dos definiciones de tiempo relacionado a los Algoritmos de Detección.

1.- TIEMPO DE CAMBIO (t_0)

A continuacion se define algunos conceptos de tiempos relacionados con los Algoritmos de detección.

TIEMPO MEDIO ENTRE FALSAS ALARMAS

Se define - *El Tiempo Medio Entre Falsas Alarmas* - como la siguiente ESPERANZA :

$$\bar{T} = E_{\theta_0}(t_a) \quad (3.1.2)$$

donde t_a es el Tiempo de Alarma.

Donde la Esperanza de una variable aleatoria y continua, la cual tiene una *Función de Densidad de Probabilidad pdf* igual a $P_\theta(y)$ es definida por :

$$E_\theta(y) = \int_R y P_\theta(y) dy \quad (3.1.3)$$

El Retardo para Deteccion depende del comportamiento del proceso, antes y despues del Tiempo del Cambio.

RETARDO MEDIO CONDICIONAL

Se define el Retardo Medio Condicional para Deteccion como la siguiente ESPERANZA :

$$E_{\theta_1}(t_a - t_0 + 1 \mid t_a \geq t_0, y_I^{t_0-1}) \quad (3.1.4)$$

donde $y_1^{t_0-1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{t_0-1} \end{bmatrix}$ (3.1.5)

vector de observaciones discretas hasta el tiempo $t_0 - 1$, t_0 es el tiempo del cambio

RETARDO MEDIO

Se define el Retardo Medio como la siguiente cantidad :

$$\bar{\tau} = E_{t_0} (t_a) \tag{3.1.6}$$

2.- TIEMPO DE PARADA

Sea $(Y_n)_{n \geq 1}$ la secuencia de una variable aleatoria en un tiempo discreto o continuo.

Una variable aleatoria T es llamado un "Tiempo de Parada", con respecto a un proceso aleatorio $(Y_n)_{n \geq 1}$, si T toma valores enteros y si, para todo $n \geq 1$ el evento $\{T=n\}$ es definido por (Y_1, \dots, Y_n) .

En otras palabras la ocurrencia de Y desde Y_1 a Y_n , determina que $T=n$ sea el Tiempo de Parada .

Por consiguiente, t_a (Tiempo de Alarma) sería un Tiempo de Parada, donde $T=n$ es el instante de detección y Y_n es el valor Y en ese instante.

3.1.2 MODELOS DE SISTEMAS Y SEÑALES, Y SU RELACION CON FALLAS.

El vector de observacion considerado en los Algoritmos de deteccion, es procedente la mayoría de las veces de un modelo parametrizado .

1. CAMBIOS EN UN MODELO DE VARIABLES DE ESTADO

A continuacion se describe un sistema lineal discreto en una representacion de variables de estado.

$$X_{k+1} = FX_k + GU_k + W_k \tag{3.1.7}$$

$$Y_k = HX_k + JU_k + V_k$$

donde Y_k es el vector de las señales Observadas, con dimension r

X es el vector Estado, con dimension n

U es la señal de Control, con dimension m

ademas:

$(W_k)_k$ y $(V_k)_k$ son distribuciones de ruido blanco Gaussiano, con matrices de covarianza Q y R respectivamente.

Un Cambio Aditivo ocurriendo en esta estructura, se refleja en la media de las observaciones de salida, y puede ser representado como:

$$X_{k+1} = FX_k + GU_k + W_k + \Gamma\Psi_x(k, t_0) \tag{3.1.8}$$

$$Y_k = HX_k + JU_k + V_k + \Xi\Psi_y(k, t_0)$$

donde Γ y Ξ son matrices de dimension $n \times \tilde{n}$ y $r \times \tilde{r}$, respectivamente.

$\Psi_x(k, t_0)$ y $\Psi_y(k, t_0)$ son los perfiles dinámicos de los cambios asumidos; estas matrices y perfiles no son necesariamente conocidos. Para el instante desconocido t_0 del cambio se tiene que:

$$\Psi_x(k, t_0) = \Psi_y(k, t_0) = 0 \text{ para } k < t_0 \tag{3.1.9}$$

Estos cambios aditivos pueden ser representados con la ayuda de la fig. (3.1)

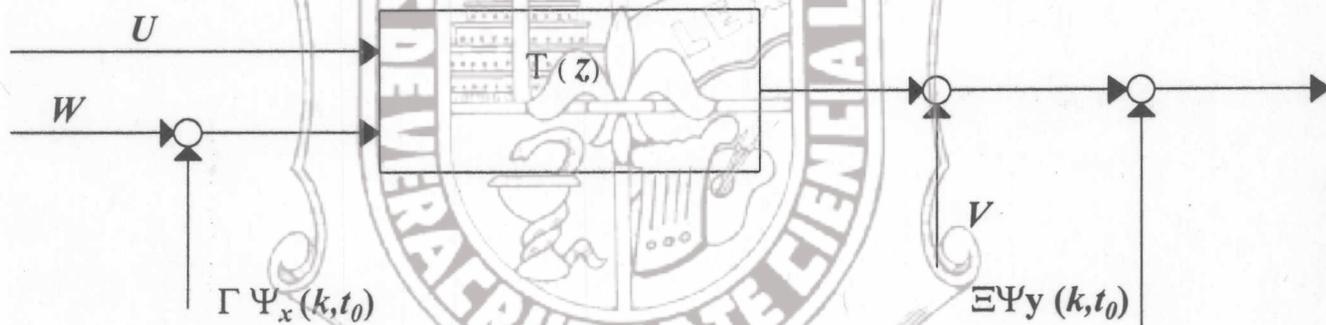


FIGURA 3.1 CAMBIOS ADITIVOS EN UN MODELO DE VARIABLES DE ESTADO

2.UN MODELO BASICO

El modelo basico incluye a todos los Cambios que Reflejan una alteracion en el Valor Medio de la Señal Observada. Esto es lo que se define como El Problema Básico.

Sea una secuencia aleatoria independiente $(Y_k)_{k \geq 1}$, donde Y_k es un vector aleatorio de Observacion, con distribucion :

$$P_\theta(Y) = N(\theta, \sigma) \tag{3.1.10}$$

$N(\theta, \sigma)$ representa una Distribucion Gaussiana con cambio en el parametro θ (media). La Función Densidad de Probabilidad Gaussiana o Normal $N(u, \sigma^2)$, donde la media es u y la varianza es σ^2 , es dada por:

$$f_y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-u)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1.11)$$

Si consideramos que el cambio se refleja en el valor medio. Hasta el tiempo $t_0 - I$ el parametro θ es igual θ_0 , y despues de t_0 el parametro θ es igual θ_1 .

Usualmente el parametro θ_1 es una funcion del tiempo y puede ser visto como los perfiles dinamicos de los sensores detectores de fallas.

El problema de deteccion de cambio puede ser solucionado en forma diversa, de acuerdo a los niveles de informacion "preliminar" que se tengan de los parametros θ_0 y θ_1 .

Se pueden presentar diferentes casos:

- I. θ_0 y θ_1 son conocidos
- II. θ_0 y θ_1 estan relacionados por alguna funcion conocida
- III. θ_0 es conocido y la magnitud de θ_1 es conocida, pero no su direccion
- IV. θ_0 es conocido y la direccion θ_1 es conocida, pero no su magnitud
- V. θ_0 es conocido y el perfil dinamico de θ_1 es conocido, pero no su magnitud
- VI. θ_0 es conocido y θ_1 es completamente desconocido.

3.1.3 FUNCIONES DE DECISION ESTADISTICA.

Las funciones de decision son en esencia, *-Índices de Rendimiento para diseñar y evaluar los Algoritmos de Detección de Cambios-*. Además de los cinco índices elementales de rendimiento, expuestos en la sección 1.5.2.

1. Tiempo medio entre falsa alarmas.
2. Probabilidad de detección falsa
3. Retardo medio para detección
4. Probabilidad de no detección
5. Presición del tiempo de falla y del estimado de su magnitud,

se cuenta con otros útiles y mas elaborados índices de evaluación, como son:

1. La Función ARL
2. La Información Kullback
3. La Divergencia Kullback

La "Función De Decision" nos informa el comportamiento de un algoritmo ON-LINE, y junto a este se requiere diseñar una adecuada *-Regla de Decision-*, para decidir si la falla

ha sobrepasado los límites de un umbral establecido, y si es el caso, entonces "Disparar la Prueba".

LA FUNCION ARL

La Función **ARL***, se define como la siguiente función, del parámetro θ :

$$L(\theta) = E_{\theta}(t_a) \tag{3.1.12}$$

donde:

θ : El parámetro del cambio (θ_0 antes del cambio y θ_1 después del cambio).

t_a : Tiempo de alarma, y en algunas ocasiones tiempo de parada .

$E_{\theta}(t_a)$: La Expectación o Esperanza bajo la variable de cambio θ , del tiempo de alarma.

Habíamos definido en la sección 3.1.1 que el tiempo medio entre falsas alarmas es:

$$\bar{T} = E_{\theta_0}(t_a) \tag{3.1.13}$$

Además, el retardo medio como:

$$\bar{\tau} = E_{\theta_1}(t_a) \tag{3.1.14}$$

La función **ARL** definida en θ_0 representa el tiempo medio entre falsa alarmas, y evaluada en θ_1 es el retardo medio. La figura 3.2 describe lo anterior.

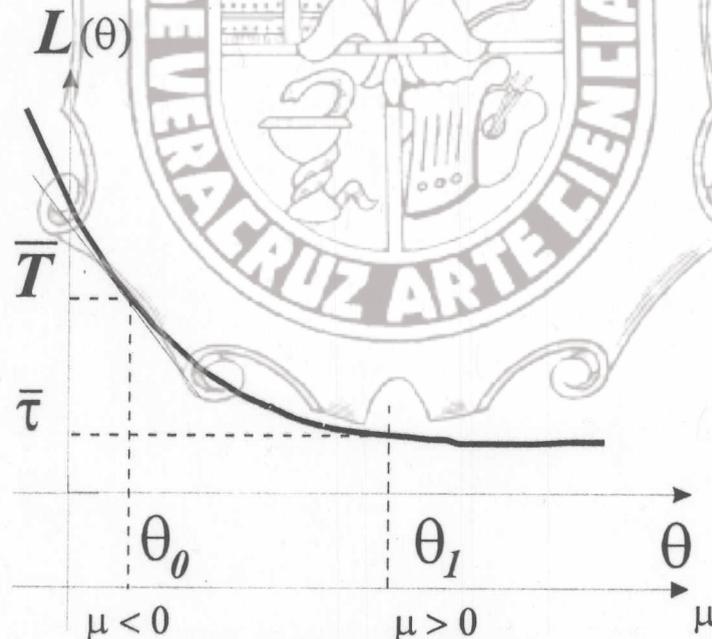


FIG. 3.2 LA FUNCION ARL

Además de lo anterior, la función **ARL** provee información con relación a la Robustez del Algoritmo. La función **ARL** puede también ser vista como una función de el valor medio μ (medida de probabilidad) de el incremento de la "Razón de probabilidad logarítmica " s :

* El término ARL es la abreviatura de "Average Run Length". Preferimos el uso de la abreviatura que utilizar una traducción literal al español.

Para $u < 0$, $L(u)$ es \bar{T} , mientras que para $u > 0$, $L(u)$ es $\bar{\tau}$. (3.1.15)

Se requiere que un Algoritmo de Detección tenga un Tiempo De Retardo menor que el Tiempo Medio Entre Falsas Alarmas. Esta condición puede ser checada con la Función ARL, tal que :

$$\inf L(\theta_0) \geq \sup L(\theta_1) ; \text{ para que } \bar{\tau} < \bar{T} \quad (3.1.16)$$

Una medida de la comparación de la calidad entre dos Algoritmos, precisamente es basada en la ecuación (3.1.16).

EL LOGARITMO DE LA RAZÓN DE PROBABILIDAD

Sea f_{θ_0} y f_{θ_1} , dos densidades de probabilidad; y

y una variable aleatoria.

Se define $s(y)$ como - El Logaritmo de la razón de probabilidad -, :

$$s(y) = \ln \frac{f_{\theta_1}(y)}{f_{\theta_0}(y)} = \ln f_{\theta_1}(y) - \ln f_{\theta_0}(y) \quad (3.1.17)$$

Si se denota:

$$l_{\theta}(y) = \ln f_{\theta}(y) \quad (3.1.18)$$

Entonces:

$$s(y) = l_{\theta_1}(y) - l_{\theta_0}(y) \quad (3.1.19)$$

PARTE II.- DESCRIPCIÓN DE LOS ALGORITMOS DE DETECCIÓN

A partir de esta sección, se considera principalmente para análisis una secuencia de variables aleatorias independientes $(y_k)_k$ (El modelo Básico) con una densidad de probabilidad $P_{\theta}(y)$ dependiente solamente de un parámetro escalar.

Antes del tiempo t_0 (desconocido) del cambio, el parámetro θ es igual a θ_0 , y después del cambio este es igual a $\theta_1 \neq \theta_0$. Los problemas son entonces, detectar y estimar este cambio en el parámetro.

y_k es la variable observada y puede ser analizada con cualquiera de los modelos expuestos en 3.1.2.

En los Algoritmos para ON-LINE se asume que el parámetro θ_0 antes del cambio es conocido. El principal ejemplo con que se aplicara estos Algoritmos, será la *detección de un cambio en la "media" de una secuencia Gaussiana independiente.*

Las herramientas matemáticas que se usaran principalmente serán:

El Logaritmo de la Razón De Probabilidad* (L- LR). $s(y) = \ln \frac{P_{\theta_1}(y)}{P_{\theta_0}(y)}$ (II.1)

La propiedad estadística de esta razón es como sigue:

Dado E_{θ_0} y E_{θ_1} las Esperanzas Matemáticas de las variables aleatorias, bajo las dos distribuciones P_{θ_0} y P_{θ_1} respectivamente; entonces:

$$E_{\theta_0}(s) < 0 \quad \text{y} \quad E_{\theta_1}(s) > 0 \quad \text{(II.2)}$$

En otras palabras, un cambio, en el parámetro θ es reflejado como un cambio, en el signo del valor medio de L-LR**. Esta propiedad puede ser vista como la clave de la Detectabilidad del cambio.

- Se considera que el tiempo de cambio t_0 es desconocido. Este punto de vista es tomando en cuenta en las secciones 3.2 y 3.3.

En algunas aplicaciones, es posible usar información *-A priori-* acerca de la distribución del tiempo del cambio; esto se conoce como un Enfoque Bayesiano .

- La segunda posible clasificación de Algoritmos es con respecto a la información disponible acerca del valor θ_1 de el parámetro después del cambio.

En las secciones 3.2 y 3.3 se considera que este valor es conocido.

3.2 ALGORITMOS ELEMENTALES.

La mayoría de los Algoritmos presentados aquí, se trabajan con *-Muestras De Datos-* de tamaño fijo, solo uno utiliza una memoria creciente-. Se presentan cuatro Algoritmos :

- 1.-Detector de Checar Limite (Limit Cheking Detector-LCD-) y Carta de Control Shewhart
- 2.-Movimiento Promedio Geométrico (Geometric Moving Average (GMA))
- 3.-Movimiento Promedio Finito (FMA) y;
- 4.-Filtrado - Derivación (FD)

3.2.1 CARTA DE CONTROL DE SHEWHART

Usada principalmente en control de calidad bajo el nombre de inspeccion continua .

* En idioma ingles : Log - Likelihood ratio (L-LR)

** Sustentado en [6] pag. 30

Se toman muestras con tamaño fijo N , y al final de cada muestreo una regla de decision es evaluada para examinar entre las dos hipotesis siguientes ,acerca del parametro θ :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \tag{3.2.1}$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

Tanto como la decision es tomada a favor de H_0 , el muestreo y la prueba continuan.El muestreo es parado despues que una muestra de observaciones* , provoca que la regla de decision sea a favor de H_1 .

Definimos el Logaritmo de la Razón de Probabilidad, de las observaciones de y_j a y_k , como:

$$S_j^k = \sum_{i=j}^k s_i \tag{3.2.2.a}$$

$$s_i = \ln \frac{p_{\theta_1}(y_i)}{p_{\theta_0}(y_i)} \tag{3.2.2.b}$$

s_i tambien la denominamos como la *-Estadística Suficiente-*,

Para una muestra fija de tamaño N , la regla de decision optima es dada por :

$$d = \begin{cases} 0 & \text{si } S_1^N < h; H_0 \text{ es elegido} \\ 1 & \text{si } S_1^N \geq h; H_1 \text{ es elegido} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

donde h es un umbral elegido conveniente .La suma S_1^N para este caso es la Funcion de Decision .La decision es tomada con la ayuda de la Regla de Parada,la cual en este caso es :

$$t_a = N \cdot \min \{K : d_k = 1\} \tag{3.2.4}$$

donde d_k es la regla de decision para un numero de muestras k (de tamaño N) y t_a es el Tiempo de Alarma .

En otras palabras ,la observacion es detenida despues que la primera muestra de tamaño N ,provoque una decision a favor de H_1

CAMBIO EN LA MEDIA

Vamos a considerar el caso particular ,donde la distribución es Gausiana ,con valor medio u y varianza constante σ^2 .

En este caso el parametro del cambio θ es u .La densidad de probabilidad es :

* A lo largo del capítulo III, las observaciones es la señal de monitoreo muestreada en tiempo discreto.

$$p_{\theta}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-u)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2.5)$$

y la Estadística Suficiente s_i es, usando (3.2.2) :

$$s_i = \frac{u_1 - u_0}{\sigma^2} \left(y_i - \frac{u_0 + u_1}{2} \right) \quad (3.2.6)$$

la cual puede ser reescrita como :

$$s_i = \frac{b}{\sigma} \left(y_i - \frac{u_0 + u_1}{2} \right) \quad (3.2.7)$$

$$s_i = \frac{b}{\sigma} \left(y_i - u_0 - \frac{v}{2} \right) \quad (3.2.8)$$

donde la magnitud del cambio es: $v = u_1 - u_0$

Definimos a $b = \frac{u_1 - u_0}{\sigma}$ como la *Razon Señal/Ruido*. (3.2.9)

Por tanto la Funcion de Decision es:

$$S_1^N = \frac{b}{\sigma} \sum_{i=1}^N \left(y_i - u_0 - \frac{v}{2} \right) \quad (3.2.10)$$

La Regla de Parada para el algoritmo de detección de cambio, es como en (3.2.4), con la Regla de Decisión definida por:

$$d = \begin{cases} 0 & \text{si } S_1^N(K) < h \\ 1 & \text{si } S_1^N(K) \geq h \end{cases} \quad (3.2.11)$$

donde $S_1^N(K) = S_{N(K-1)+1}^{NK}$ (3.2.12)

Para este algoritmo ,cuando $u_1 > u_0$,la alarma es disparada ,en el tiempo para el cual

$$\bar{y}(K) \geq u_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.2.13)$$

donde :
$$\bar{y}(K) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=N(K-1)+1}^{NK} y_i \quad (3.2.14)$$

El lado derecho de la desigualdad es denominado Limite de Control Superior .

Los parametros a sintonizar en este algoritmo son k y N ;el comportamiento de este algoritmo ,cuando se aplica a la señal de la fig1.2 ,es descrito en la fig.3.3.

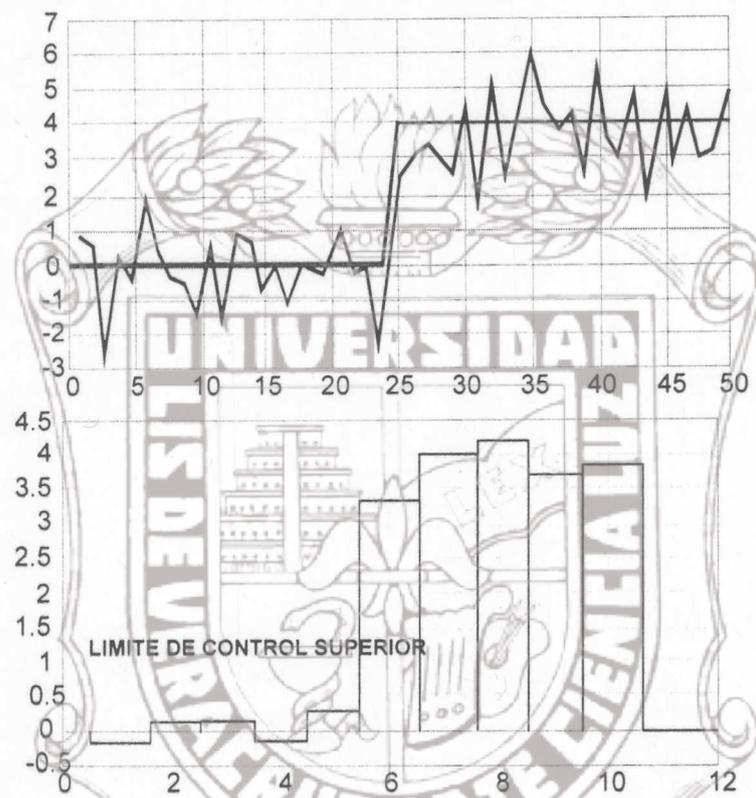


FIG.3.3 UNA CARTA DE CONTROL SHEWHART CORRESPONDIENTE A UN CAMBIO EN LA MEDIA DE UNA SECUENCIA GAUSIANA

Es a menudo util ,detectar desviaciones de u_0 en ambas direcciones ,es decir ya sea incrementos o decrementos .En este caso ,asumimos que el valor medio despues del cambio es $u_1^+ = u_0 + v$ o $u_1^- = u_0 - v$

Entonces la alarma es dada para :

$$|\bar{y}(K) - u_0| \geq k \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.2.15)$$

donde $u_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ es el limite de Control Inferior .Una sintonizacion optima de estos parametros puede ser obtenida con la ayuda de una informacion preliminar sobre la magnitud del cambio v .

3.2.2 EL ALGORITMO DEL MOVIMIENTO PROMEDIO GEOMETRICO

El Algoritmo del Movimiento Promedio Geometrico (**GMA**) esta basado en dos ideas principales:

La primera idea es relacionada al comportamiento del Logaritmo de la Razón de Probabilidad (3.II.1).

La segunda idea trata con la idea general de la Ponderacion Exponencial de las Observaciones.

Es necesario el usar altas ponderaciones para las observaciones recientes ,y bajas ponderaciones para las observaciones pasadas.

La Funcion de Decision para este algoritmo es:

$$g_k = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \ln \frac{p_{\theta_1}(y_{k-i})}{p_{\theta_0}(y_{k-i})} \quad (3.2.16a)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i s_{k-i} \quad (3.2.16b)$$

donde los "pesos" γ_i son exponenciales, es decir:

$$\gamma_i = \alpha(1-\alpha)^i, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.2.17)$$

Los coeficientes α actuan como un factor de "olvido". Esta Funcion de Decision puede ser escrita en una forma recursiva :

$$g_k = (1-\alpha)g_{k-1} + \alpha s_k, \quad \text{con } g_0 = 0 \quad (3.2.18)$$

El Tiempo de Alarma es definido por la siguiente Regla de Parada :

$$t_a = \min\{k : g_k \geq h\} \quad (3.2.19)$$

donde h es un Umbral elegido conveniente.

CAMBIO EN LA MEDIA

En el caso de un Cambio en la Media de una Secuencia Gausiana , s_k es dado por (3.2.6), y la Funcion de Decision **GMA** sera:

$$\tilde{g}_k = (1-\alpha)\tilde{g}_{k-1} + \alpha(y_k - u_0), \quad \text{con } \tilde{g}_0 = 0 \quad (3.2.20)$$

donde \tilde{g} y g estan relacionadas a traves de :

$$\tilde{g}_k = \frac{\sigma^2}{u_1 - u_0} g_k - \frac{u_1 - u_0}{2} \quad (3.2.21)$$

El comportamiento de esta Funcion de Decision, cuando es aplicada la señal de la figura(1.2) es descrito en la figura (3.4).

Para la situacion de deteccion en *doble banda*, la Regla de Parada es dada por:

$$t_a = \min \{k : |\tilde{g}_k| \geq h\} \quad (3.2.22)$$

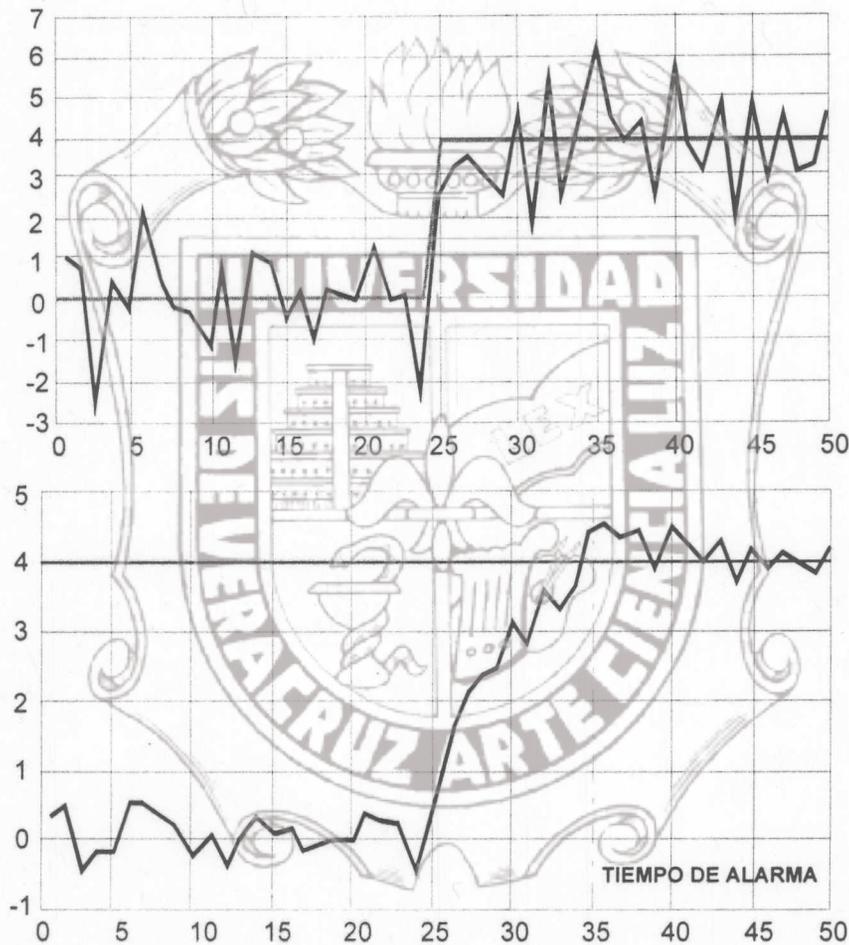


FIGURA 3.4 ALGORITMO GMA CORRESPONDIENTE A UN CAMBIO EN LA MEDIA DE UNA SECUENCIA GAUSIANA CON VARIANZA CONSTANTE

3.2.3 EL ALGORITMO DEL MOVIMIENTO PROMEDIO FINITO

Continuando con las ideas similares del Promedio Geometrico,el Algoritmo del Movimiento Promedio Finito (FMA) reemplaza el "Olvido Exponencial " por una "Memoria finita" .De esta forma se forma se usa un conjunto de ponderaciones finito, diferente al algoritmo SHEWART. A partir de (3.2.6) la Funcion de Decision g_k es dada por:

$$g_k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \ln \frac{p_{\theta_1}(y_{k-i})}{p_{\theta_0}(y_{k-i})} \quad (3.2.23)$$

donde las ponderaciones γ_i son los "pesos"

La Regla de Parada es como la seccion anterior

$$t_a = \min\{k : g_k \geq h\} \quad (3.2.24)$$

CAMBIO EN LA MEDIA

En el caso de un incremento en la media esta Regla de Parada puede ser calculada como sigue:

La Funcion de Decision, g_k es presentada conforme al inicio de esta seccion.

$$g_k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i (y_{k-i} - u_0) \quad (3.2.25)$$

En el caso de doble banda, g_k es la misma, y la Regla de Parada es:

$$t_a = \min\{k : |g_k| \geq h\} \quad (3.2.26)$$

3.2.4 ALGORITMO DE FILTRADO-DERIVACION

El Algoritmo de Filtrado-Derivacion (FD) esta basado en la siguiente idea intuitiva :

Si consideramos la situacion ideal, libre de falla, un cambio en el nivel medio de una secuencia de observaciones esta caracterizado por un valor absoluto grande de la derivada del muestreo de observaciones .

Debido a que la accion derivativa actua en una forma pobre entre mas ruido se encuentre presente, se requiere una accion de filtrado previa a la derivacion, para una implementacion real de este algoritmo. La figura (3.5) muestra el comportamiento tipico de este algoritmo.

A pesar de la operacion de suavizado sobre los saltos, pueden presentarse falsas alarmas en las cercanias de t_0 ; una forma de mejorar la robustez de este detector es la de contar -El Numero De Cruces De Umbral - durante un intervalo de tiempo fijo, antes de decidir que un falla real ocurre.

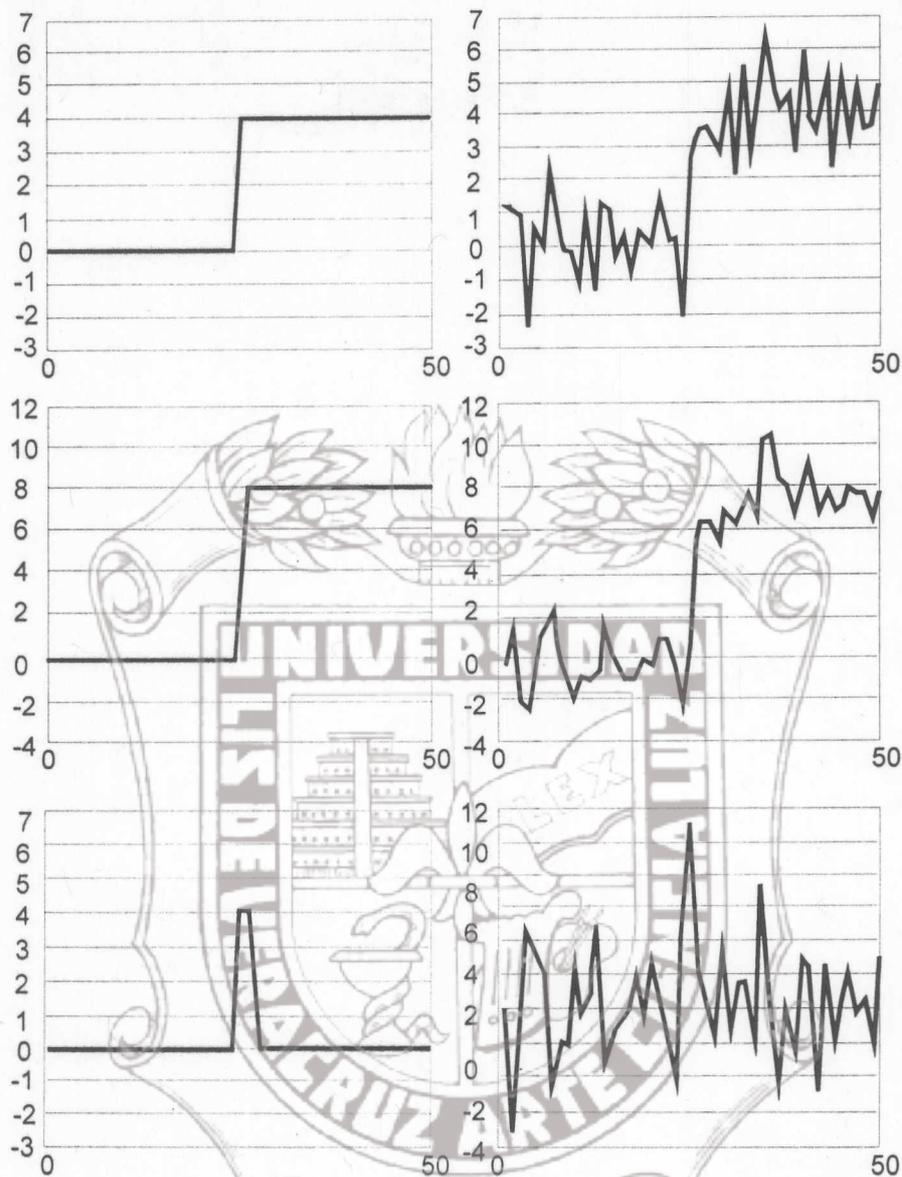


FIG. 3.5 COMPORTAMIENTOS IDEAL Y REAL DE UN ALGORITMO FILTRADO DERIVATIVO.

Procedemos a colocar la idea anterior, en una formal estructura estadística :usando de nuevo la ecuación del algoritmo FMA

$$g_k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \ln \frac{p_{\theta_i}(y_{k-i})}{p_{\theta_0}(y_{k-i})} \quad (3.2.27)$$

donde los "pesos" γ_i son de nuevo los pesos para los Filtros ,y en el caso de un muestreo discreto de las observaciones,tenemos que la derivada de g_k sera:

$$\nabla g_k = g_k - g_{k-1} \quad (3.2.28)$$

y la Regla de Parada es :

$$t_a = \min \left\{ k: \sum_{i=0}^{N-1} 1_{\{\nabla g_{k-i} \geq h\}} \geq \eta \right\} \quad (3.2.29)$$

donde $1_{\{x\}}$ es el indicador del evento $\{x\}$.

En esta ecuación, h es el umbral para la derivada, y η es un umbral para el número de cruces de h .

Este umbral η es usado para disminuir el número de alarmas en las cercanías del cambio; un valor adecuado en la práctica es $\eta = 2$.

CAMBIO EN LA MEDIA

En el caso de un incremento en la media, la Función de Decisión g_k correspondiente a (3.2.27), puede ser considerada como:

$$g_k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i (y_{k-i} - u_0) \quad (3.2.30)$$

y La Regla de Parada es como en (3.2.29).

3.3 ALGORITMO CUSUM

La idea clave del Algoritmo de Suma Acumulativa (CUSUM) está en el uso de un Umbral Adaptivo.

Como se menciona anteriormente, el comportamiento de la Razón Logarítmica de Probabilidad S_k , muestra un rumbo negativo antes del cambio, y un rumbo positivo después del cambio, como se describe en la figura 3.6 (para la señal de la figura 1.2)

Por tanto la información relevante se sitúa en la diferencia entre el valor de S_k y su valor mínimo. La Regla de Decisión, para cada instante de tiempo, consiste en comparar esta diferencia a un valor umbral:

$$g_k = S_k - m_k \geq h \quad (3.3.1)$$

donde

$$S_k = \sum_{i=1}^k s_i \quad (3.3.2.a)$$

$$s_i = \ln \frac{p_{\theta_1}(y_i)}{p_{\theta_0}(y_i)} \quad (3.3.2.b)$$

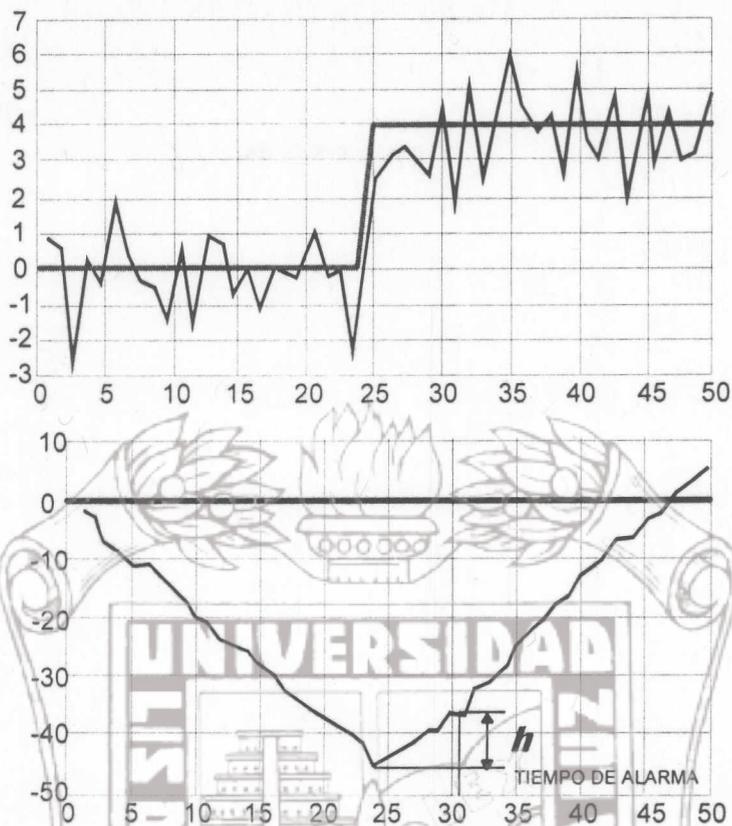


FIGURA 3.6 COMPORTAMIENTO TÍPICO DEL LOGARITMO DE LA RAZÓN DE PROBABILIDAD S_k CORRESPONDIENTE A UN CAMBIO EN LA MEDIA DE UNA SECUENCIA GAUSIANA.

$$m_k = \min_{1 \leq j \leq k} S_j \quad (3.3.2.c)$$

El comportamiento típico de g_k es descrito en la figura 3.7.

El Tiempo de Parada es:

$$t_a = \min \{k : g_k \geq h\} \quad (3.3.3)$$

el cual puede ser reescrito como:

$$t_a = \min \{k : S_k \geq m_k + h\} \quad (3.3.4)$$

Con lo anterior, es claro que la Regla de Detección es una comparación entre la Suma Acumulativa S_k y el Umbral Adaptivo $m_k + h$. El umbral m_k además que se modifica en ON-LINE, también guarda una memoria completa de las observaciones pasadas.

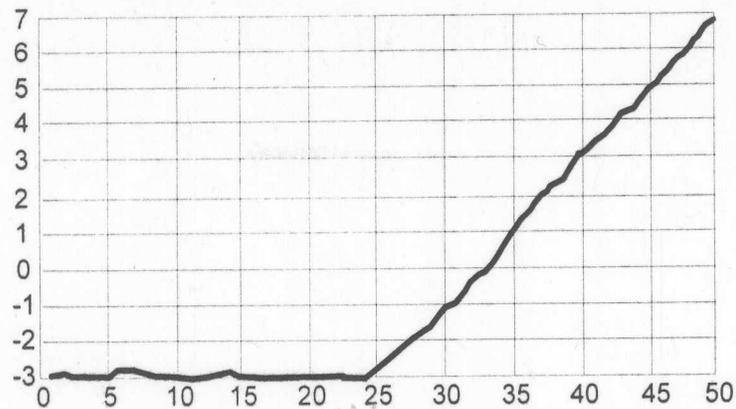


FIGURA 3.7 COMPORTAMIENTO TÍPICO DE LA FUNCIÓN DE DECISIÓN g_k CUSUM

3.4 RESUMEN DE LOS ALGORITMOS ESTADÍSTICOS.

Todos los Algoritmos de detección presentados en las secciones anteriores están incluidos dentro de un enfoque y desarrollo matemático-estadístico.

A continuación las ideas principales en que se fundamentan estos algoritmos:

El Algoritmo de la Carta de Shewhart se basa en dos ideas principales:

- Obtener una información acumulada de las observaciones, evaluadas con el Logaritmo de la Razon de Probabilidad.
- Comparar este Acumulado con un Umbral Fijo.

El Algoritmo del Movimiento Promedio Geométrico (GMA) aplica el criterio anterior, bajo una Ponderación Exponencial, para usar "Las observaciones más recientes" y "Olvidar" las observaciones pasadas.

El Algoritmo del Movimiento Promedio Finito (FMA) es similar al GMA, pero reemplaza el "Olvido Exponencial" por una "Memoria Finita".

El Algoritmo de Filtrado-Derivación (FD) se basa en la situación ideal, que un cambio en la secuencia de observaciones, está caracterizado por un valor absoluto grande de la derivada del muestreo de observaciones. Utiliza dos Umbrales, uno para la magnitud del cambio, y el otro para disminuir la probabilidad de Falsas Alarmas.

por último **El Algoritmo CUSUM** utiliza un valor de Umbral Adaptivo, para comparar la Suma Acumulada del Muestro de Observaciones. Este umbral Adaptivo permite al Algoritmo irse acomodando a la situación actual del muestreo de observaciones.

La tabla 3.1 presenta un resumen de las ecuaciones más importantes de los Algoritmos de Detección anteriores.

TABLA 3.1.a
RESUMEN DE LAS ECUACIONES PRINCIPALES DE CADA ALGORITMO ESTADISTICO

<p>El Algoritmo de la Carta de Shewhart</p> $d = \begin{cases} 0 & \text{si } S_1^N < h; H_0 \text{ es elegido} \\ 1 & \text{si } S_1^N \geq h; H_1 \text{ es elegido} \end{cases}$ <p>Los parametros a sintonizar son el tamaño N del muestreo de observaciones y el valor Umbral h</p>
<p>El Algoritmo del Movimiento Promedio Geométrico</p> $g_k = (1 - \alpha)g_{k-1} + \alpha s_k, \text{ con } g_0 = 0$ <p>Los parametros a sintonizar son el Factor de Ponderación $0 < \alpha \leq 1$ y el valor Umbral h</p>
<p>El Algoritmo del Movimiento Promedio Finito</p> $g_k = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \ln \frac{p_{\theta_1}(y_{k-i})}{p_{\theta_0}(y_{k-i})}$ <p>Los parámetros a sintonizar son el tamaño N de la ventana de observación, el Factor de Ponderación γ_i y el valor de Umbral h</p>
<p>El Algoritmo de Filtrado-Derivación</p> $\nabla g_k = g_k - g_{k-1}$ $t_a = \min \left\{ k : \sum_{i=0}^{N-1} 1_{\{\nabla g_{k-i} \geq h\}} \geq \eta \right\}$ <p>Los parámetros a sintonizar, son nuevamente el tamaño N de la ventana de observación, el Factor de Ponderación, el valor de Umbral h y el contador de alarmas η</p>

TABLA 3.1.b
El Algoritmo CUSUM

$g_k = S_k - m_k \geq h$ $m_k = \min_{1 \leq j \leq k} S_j$ <p>Y la Regla de Parada como:</p> $t_a = \min \{ k : S_k \geq m_k + h \}$ <p>El parámetro a sintonizar es el valor de Umbral h</p>

CAPITULO IV

EL PROBLEMA DE DETECCIÓN DE FALLAS EN EL ENFOQUE GEOMETRICO

El Capítulo IV desarrolla el Problema de Detección de Falla en el Enfoque Geométrico.

La sección 4.1, nos introduce al Enfoque Geométrico, presentando un panorama de las técnicas diversas que lo componen.

La Sección 4.2, presenta los fundamentos de la Redundancia Analítica en la Generación de Residuales, mediante un ejemplo básico. Se consideran las discrepancias del modelo y el ruido, en la Generación del Error Residual. Incluye un resumen matemático de los conceptos de normas y valores singulares, que son ampliamente usados en estas técnicas de detección.

En la Sección 4.3, se desarrollan tres algoritmos de detección de falla, bajo la idea principal de Umbrales Dinámicos, (en ambos Dominios del Tiempo y la Frecuencia); los conceptos de Generadores de Residual, por Factorización Estable y Estimados de Estados (Filtros dinámicos), son la base de estas técnicas.

Todos en menor o mayor grado tienen propiedades de Robustez a las incertidumbres del modelado y al ruido; además el nivel de Sensitividad a la Falla Mínima Detectable, es considerado en los tres algoritmos, obteniéndose un valor óptimo (Sección 4.3.2.) desarrollado en el dominio de la frecuencia.

La Sección 4.4, analiza los Filtros Detectores de Falla (**FDF**). Son básicamente observadores que generan un estimado con información de la existencia de la falla. La dinámica (la Matriz de Ganancia) condiciona que el Residual de Salida presente propiedades direccionales; una dirección cualquiera del Residual representa una falla en particular, lo que permite un procedimiento directo para identificación de las fallas.

La Sección 4.5, nos presenta un resumen de las ideas principales en que se fundamentan los algoritmos anteriores; se incluye una tabla de resumen de las ecuaciones principales; y por ultimo una breve comparación cualitativa entre los Enfoques Geométrico y Estadístico.

4.1.- PRESENTACION GENERAL DE LAS TECNICAS

El problema FDI mediante Herramientas Geométricas, está basado fundamentalmente en los conceptos de Redundancia Analítica, Paridad de Espacios, y uso de Observadores para Filtros Detectores.

Los métodos que utilizan **Redundancia Analítica** y **Paridad de Espacio**, están dirigidos a resolver el " Problema de Detección ". En cambio los métodos que utilizan Filtros Detectores están dirigidos a resolver el " Problema de Detección y Aislamiento " simultáneamente.

El diseño en base a **Redundancia Analítica** [11] Pag. 6 está basado en todas las posibles relaciones Entrada-Salida de un sistema dado. Las Relaciones de Redundancia denominadas " Vectores de Paridad ", son combinaciones lineales de valores presentes de salida, o valores presentes y pasados, de ambas entradas y salidas.

El diseño en el **Enfoque de Paridad Espacio** [6] Pag. 325 está basado en la Factorización Estable de la Matriz de Transferencia del sistema. Los Residuales son generados de todas las posibles combinaciones lineales, en base a esta Factorización Estable, tomadas de la salida de los sensores y las entradas aplicadas, muestreadas en una ventana de tiempo finita.

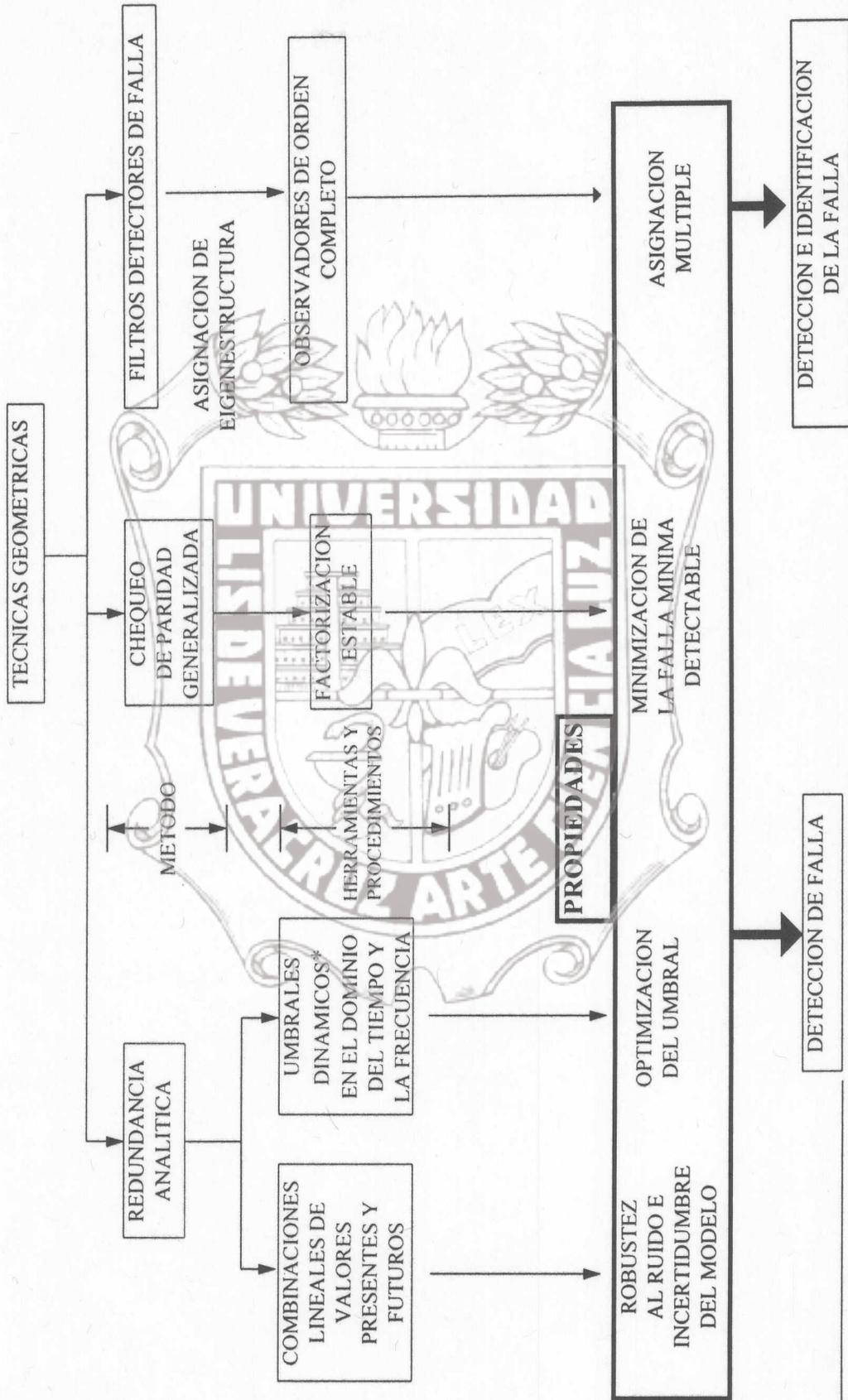
Estas combinaciones son elegidas para producir Residuales que son cero cuando las componentes están funcionando perfectamente, pero que tienen una desviación de cero cuando un componente particular del sistema está Fallando.

El diseño con **Filtros Detectores de Falla (FDF)** [13] Pag. 317, [1] Pag. 1521, [8] Pag. 593, utiliza Observadores, generalmente de Orden Completo, donde los Residuales son las Innovaciones del Observador. El procedimiento de diseño consiste en elegir la ganancia del Observador tal que las fallas de diferentes componentes del sistema, afecten a los Residuales en direcciones linealmente independientes; de esta forma se simplifica enormemente el proceso de toma de decisiones (Identificación de la Falla). Sin embargo la condición de Observadores de Orden Completo es una severa restricción.

La fig. 4.1 nos presenta un resumen de las técnicas principales en una perspectiva geométrica.



FIG. 4.1 PRINCIPALES TÉCNICAS GEOMÉTRICAS*



* En algunas ocasiones utiliza ambas técnicas, de Paridad de Espacio y Filtro Detectores

4.2. GENERACION DE RESIDUALES POR REDUNDANCIA ANALITICA

El objetivo de esta sección es el de introducirnos a la Técnica de Redundancia Analítica mediante una aplicación básica expuesta en la subsección 4.2.1; complementándose con algunas herramientas teóricas como ser normas y valores singulares que son ampliamente usadas en las técnicas geométricas, lo anterior expuesto en la subsección 4.2.2.

4.2.1 UNA APLICACION BASICA

MODELADO DE LA PLANTA

Utilizando una representación en variables de estado para el modelo de una planta, y asumiendo inicialmente que aunque los parámetros de la planta pueden variar con el tiempo, su variación es usualmente pequeña y muy lenta comparada con la dinámica de la planta.

Sea el siguiente modelo de una planta en tiempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.2.2)$$

Transformando la ecuación (4.2.1) mediante la transformada de Laplace para obtener un modelo Entrada/Salida, tenemos:

$$t \rightarrow s \quad Y(s) = C (sI - A)^{-1} BU(s)$$

y es igual a:

$$Y(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} C [Adj(sI - A)] BU(s)$$

o también

$$H(s) Y(s) = G(s) U(s) \quad (4.2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} H(s) &= \det(sI - A) I \\ G(s) &= C [Adj(sI - A)] B \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Si consideramos el caso real con la existencia del ruido (aditivo) $n(t)$ y la posibilidad de un proceso de falla aditiva $f(t)$, con sus respectivas matrices de distribución G_n y G_f respectivamente.

La ecuación (4.2.1) se replantea como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + G_n n(t) + G_f f(t) \quad (4.2.5)$$

con lo cual la ecuación (4.2.3) viene a ser:

$$H(s)Y(s) = G(s)U(s) + P(s)N(s) + Q(s)f(s) \quad (4.2.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} G(s) &= C \text{Adj}(sI - A) B \\ P(s) &= C \text{Adj}(sI - A) G_n \\ Q(s) &= C \text{Adj}(sI - A) G_f \end{aligned}$$

obsérvese que la presencia de nuevos términos en (4.2.5) tiene influencia en el modelo Entrada/Salida.

Vamos ahora a considerar el efecto del ruido y de una probable ocurrencia de falla, sobre las señales de entrada $u(t)$ y la señal de salida o de medición $y(t)$.

Sea $\delta u(t)$ y $\Delta u(t)$ para la variación en la señal de entrada $u(t)$ por ruido y falla respectivamente.

Igual $\delta y(t)$ y $\Delta y(t)$ en la variable de observación. Con lo anterior $u(t)$ y $y(t)$ viene a ser transformados en :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= u(t) + \delta u(t) + \Delta u(t) \\ \tilde{y}(t) &= y(t) + \delta y(t) + \Delta y(t) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

donde $\delta u(t)$, $\Delta u(t)$, $\delta y(t)$ y $\Delta y(t)$ son vectores con distribución desconocidos pero acotados. [11] pag. 5

evidentemente la substitución:

$$\begin{aligned} u &\leftarrow \tilde{u} \\ y &\leftarrow \tilde{y} \end{aligned}$$

en (4.2.5), provoca que las matrices de Entrada/Salida $H(s)$ y $G(s)$ experimentan también variaciones.

Aún más , si añadimos que las matrices de parametrización A , B y C tienen discrepancias, lo que denominamos de ahora en adelante -"Incertidumbre del Modelado"- .

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + \Delta A(t) \\ \tilde{B} &= B + \Delta B(t) \\ \tilde{C} &= C + \Delta C(t) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Aunque inicialmente, habíamos despreciado la variación de las matrices paramétricas, ahora las tomamos en cuenta, debido a que estamos modelando en una condición de probable ocurrencia de -Falla Multiplicativa- en el proceso (ver sección 1.3.2 para detalle)

Generalmente estas "Incertidumbres del Modelado" son *-Dinámicas De Alta Frecuencia No Modeladas O Dinámicas No Consideradas En El Proceso Del Diseño-*.

Si denominamos $\Delta G(s,t)$ y $\Delta H(s,t)$, las variaciones en el tiempo, que experimentan, las matrices del modelo Entrada/Salida, ocasionado por el ruido, la incertidumbre del modelado y la ocurrencia de una falla; tenemos que una aproximación real del sistema sería:

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta G(s,t) \quad (4.2.9)$$

$$\tilde{H}(s) = H(s) + \Delta H(s,t)$$

GENERACION DE RESIDUALES.

Los Residuales pueden ser generados de diferentes maneras, vamos analizarlos por 2 formas, en base a: Ecuaciones Entrada/Salida, Ecuaciones de variables de Estado y el uso y el uso de Observadores. La idea clave es "Indicar en las Ecuaciones, cuando una falla está ocurriendo".

-Residuales por Entrada/Salida-

La ecuación (4.2.3), puede ser escrita como:

$$G(s)U(s) - H(s)Y(s) = 0 \quad (4.2.10)$$

$$\begin{bmatrix} G(s) & -H(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = 0$$

si definimos como $T(s)$ a la "Matriz de Combinación" $[G(s) -H(s)]$ y como $q(s)$ al "Vector de

Combinación" $\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}$

tenemos

$$T(s)q(s) = 0 \quad (4.2.11)$$

o bien, sin perdida de generalidad

$$T(s)q(t) = 0 \quad (4.2.12)$$

obsérvese que $T(s)$ y $q(s)$ son originados de un modelo ideal y sin falla (4.2.3). Si ahora tomamos una medición de las señales de entrada y observación $\tilde{q}(t)$, **bajo condiciones de no-falla:**

$$q(t) \leftarrow \tilde{q}(t)$$

$$T(s) \leftarrow T(s)$$

Entonces $T(s)\tilde{q}(t) = 0$ (No-falla) (4.2.13)

Esto produce un conjunto de "Ecuaciones de Paridad", para todas las mediciones, mientras no ocurra una falla.

Pero si ocurre una falla:

$$T(s) \leftarrow \tilde{T}(s)$$

$$\tilde{T}(s)\tilde{q}(t) \neq 0 = e(t) \quad (\text{ Si-falla }) \quad (4.2.14)$$

donde $e(t)$ los denominamos "Residuales" o "Error Residual".

Los Residuales $e(t)$ son el resultado de la combinación de ruido, incertidumbre del modelado y fallas.

Surge una pregunta de suma importancia. ¿Como distinguir si el Residual generado $e(t)$ es provocado por una falla o por el ruido e incertidumbre del modelado?. Este asunto de Robustez al ruido e incertidumbre y Sensitividad a la falla es analizado ampliamente en la sección 4.3.

Desarrollando (4.2.14)

$$(T + \Delta T)(q + \delta q + \Delta r) = e$$

y utilizando (4.2.13) para el caso ideal, el Residual nos queda:

$$e(t) = 0; \text{ para el caso ideal de no-ruido y no-falla.}$$

$$e(t) = \Delta Tq + \tilde{T}\delta q + \tilde{T}\Delta r; \text{ cuando hay ruido, falla e incertidumbre del modelado.} \quad (4.2.15)$$

La figura 4.2 nos presenta en diagrama en bloques la ecuación (4.2.15).

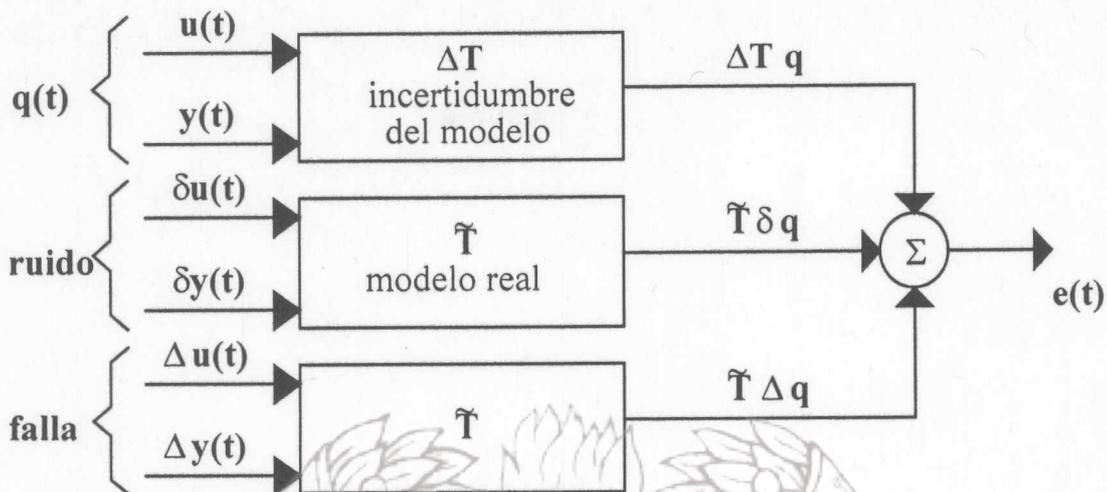


FIG. 4.2 COMPONENTES DEL RESIDUAL MEDIANTE ENTRADA/SALIDA

-RESIDUALES POR VARIABLES DE ESTADO Y OBSERVADORES-

Si es posible medir los estados del sistema x , tenemos

$$y = Cx$$

por tanto el Residual sería

$$e(t) = \tilde{y} - y \tag{4.2.16}$$

donde \tilde{y} es la medición de la señal en monitoreo.

Pero generalmente, no es posible medir directamente los Estados del sistema; por lo cual es necesario usar un estimado del mismo, a través de la salida:

$$e(t) = \tilde{y} - \hat{y} \tag{4.2.17}$$

donde

$$\hat{y} = C \hat{x}$$

\hat{x} es el Estimado del Estado

El Residual en este caso, también se le denomina Innovación.*

4.2.2 HERRAMIENTAS MATEMATICAS

La tabla 4.1 nos resume las definiciones de normas para vectores y matrices

* A lo largo de esta tesis denominamos Innovación a todo Residual generado por el uso de cualquier tipo de observador (Luemberger o Kalman)

VALORES SINGULARES

Cuando se manejan técnicas en el dominio de la frecuencia, resulta necesario la definición de valores singulares.

El valor singular es la raíz de los Eigenvalores de A^*A

$$\sigma_i = [\lambda_i (A^*A)]^{1/2} ; \lambda_i \neq 0 \tag{4.2.18}$$

cuando $A=A(j\omega)$ entonces $\sigma = \sigma(j\omega)$ es una función en el dominio de la frecuencia.

Se denota el máximo valor singular como $\bar{\sigma}$, y el mínimo valor singular $\underline{\sigma}$.

La razón del valor singular más grande con el más pequeño, es una medida de cuan cerca la matriz A llega a ser singular. (Ver [14] pag. 497 para ampliar)

Algunas propiedades útiles de los valores singulares, siguen a continuación:

Igualdades:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \text{ si } \underline{\sigma}(A) = 0 \\ \underline{\sigma}(A) &= 1/\bar{\sigma}(A^{-1}) ; \bar{\sigma}(A) = 1/\underline{\sigma}(A^{-1}) \\ \underline{\sigma}(\alpha A) &= |\alpha| \underline{\sigma}(A), \text{ para cualquier escalar } \alpha. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Desigualdades:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A+B) &\leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) ; \text{ desigualdad del triángulo} \\ \bar{\sigma}(AB) &\leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B) ; \text{ desigualdad de Cauchy-Schwartz} \\ \underline{\sigma}(AB) &\geq \underline{\sigma}(A) \cdot \underline{\sigma}(B) \\ \underline{\sigma}(A) - 1 &\leq \underline{\sigma}(I+A) \leq \underline{\sigma}(A) + 1 \\ \underline{\sigma}(A) &\leq |\lambda(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

TABLA 4.1 NORMAS DE VECTORES, FUNCIONES Y MATRICES

VECTORES	FUNCIONES	MATRICES
<u>NORMA-1</u>	<u>NORMA-2</u>	Por definición:
si $p=1$	$f \in \mathbb{R}^n$	$\ A\ = \min\{k\}$ tal que $\ AX\ \leq k\ X\ $
$\ X\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\ f\ _2 = \left(\int_0^\infty f(t) ^2 dt \right)^{1/2}$	<u>NORMA-1</u>
<u>NORMA-2 O NORMA EUCLIDIANA</u>	<u>NORMA-2 PONDERADA</u>	$\ A\ _1 = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} $
si $p=2$	$\ f\ _{2\beta}^{(\alpha, \tau)} = \left(\int_0^\tau e^{\beta(t-\tau)} f^T(t) f(t) dt \right)^{1/2}$	<u>NORMA-2</u>
ó	$\ X\ _2 = \langle X, X \rangle^{1/2} = (X^T \cdot X)^{1/2}$	$\ A\ _2 = \max\{\sigma(A)\}$
si $X \in \mathbb{C}^n$	$\ X\ _2 = (X^* X)^{1/2}$	<u>NORMA-∞</u>
\Rightarrow	$\ H\ _2 = \max_w \left[\sigma(H(jw)) \right]$	$\ A\ _\infty = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} $
$\ X(jw)\ _2 = \left[X^*(jw)X(jw) \right]^{1/2}$	Además, en el dominio de la frecuencia	
<u>NORMA-∞</u>	$\ H\ _2 = \ H\ _\infty$ cuando se evalúa en el dominio de la frecuencia.	
si $p = \infty$		
$\ X\ _\infty = \max_i x_i $		

4.3 ALGORITMOS ROBUSTOS PARA DETECCION DE FALLAS UMBRALES DINAMICOS.

En esta sección, se presentan tres algoritmos de Detección de Falla. Cada uno de ellos tiene ciertas propiedades de Robustez a las incertidumbres del modelado y al ruido.

La idea general entre ellos es el manejo de *-Umbrales Dinámicos-*. Estos umbrales se van "adaptando" en algunos casos en forma "óptima o subóptima", y en otros casos "actualizándose" a las condiciones dinámicas de la planta, del ruido e incertidumbres paramétricas.

Junto a este concepto, se determina la "Mínima Falla Detectable", la cual está en función del Umbral, los parámetros de la planta y del Generador de Residuales.

Otro aspecto muy importante que se analiza, es el compromiso entre las Falsas Alarmas y las Detecciones Perdidas.

Iniciamos la sección 4.3.1 con el Selector de Umbral, para estudiar el concepto de Umbrales Dinámicos, incluye ideas para optimizar el Umbral y finaliza con un ejemplo ilustrativo.

La sección 4.3.2 desarrolla una técnica de Umbral Dinámico en el Dominio de la Frecuencia; conceptos de Norma- H_{∞} y valores singulares son usados ampliamente. La variación de la Energía Mínima manejada por σ es una de las ideas principales en esta técnica.

La sección 4.3.3 analiza un Algoritmo para Umbral Dinámico en el Dominio del Tiempo; el concepto de Norma Parcial Ponderada y la idea de Reconstrucción Analítica de Señales, son las ideas principales para este algoritmo.

4.3.1 EL SELECTOR DE UMBRAL Y ANALISIS DE UMBRALES DINAMICOS

El rendimiento de todo algoritmo de *Detección, Aislamiento y Acomodamiento de Falla (DIA)** es influenciado por la presencia de incertidumbres del modelado. Es necesario incorporar un conocimiento de errores de modelado en el análisis y diseño de Detección de fallas. Esta técnica presenta una nueva herramienta, el **Selector de Umbral**, el cual es una inecuación no-lineal, cuya solución define el conjunto de señales que pueden ser detectadas.

Un Umbral óptimo es desarrollado, como función del tamaño de los errores del modelado, las propiedades del ruido, la velocidad de los filtros detectores y de las clases de señales de referencia y de Falla.

Se determina el mínimo tamaño de la Falla Detectable y se aplican estos resultados a un ejemplo de aplicación práctica.

* El Término DIA es la abreviatura de " Detection, Isolation and Accommodation "

4.3.1.1. INTRODUCCION

En la figura 4.3 se muestra un diagrama en bloques de un sistema de control tolerante en falla, basado en innovaciones. La Ley de Control, la Lógica DIA, y el Estimador de Estado contiene los elementos que serán diseñados. El objetivo del diseño es seleccionar una apropiada configuración de estos subsistemas realimentados, tal que el sistema en lazo cerrado exhiba un rendimiento adecuado y Robustez con respecto a las incertidumbres del sistema y fallas en los sensores.

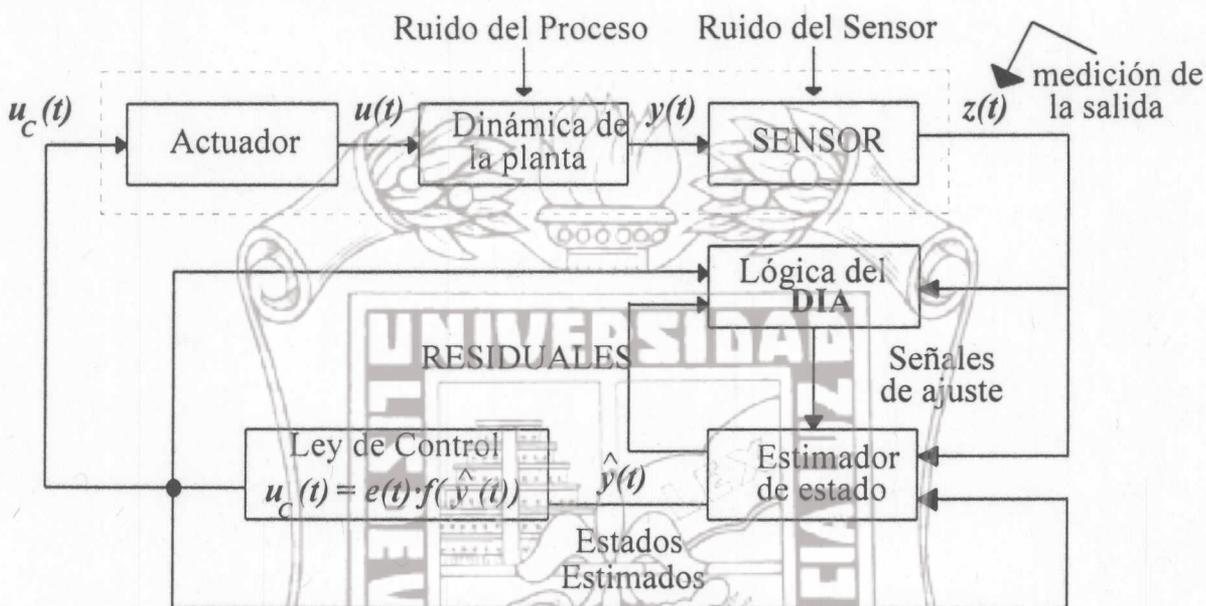


FIG. 4.3 DIAGRAMA EN BLOQUES DE UN SISTEMA CON SENSOR DIA.

Algunas observaciones sobre la notación son:

- $b(t)$: → representa una señal inducida por fallas en el Dominio del tiempo
- $b(s)$: → representa la misma cantidad en el Dominio de la Frecuencia Compleja.

similarmente para $v(t)$ y $v(s)$

$|\cdot|$: denota el valor absoluto o la Norma de un vector.

$\|\cdot\|$: denota la Norma de un operador lineal.

$\bar{\sigma}(\cdot)$ y $\underline{\sigma}(\cdot)$ denotan el máximo y el mínimo de los valores singulares; $sup(\cdot)$ el supremo y $inf(\cdot)$ el ínfimo.

4.3.1.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

El problema se define, en esencia, el determinar un Umbral Optimo para ser usado en algoritmos de Detección de fallas, basados en innovaciones, así como calcular el Tamaño

Mínimo de la Falla Detectable. El Umbral es un nivel fijo contra el cual algunas medidas de las innovaciones estarán siendo comparada.

Una falla es declarada si la medida excede el Umbral. Este Umbral es una función del alcance de la incertidumbre del modelado, del ruido, la velocidad del filtro detector** y la clase de señales de entrada (referencia y la falla).

Esta es una mejora sobre las técnicas convencionales, que solo consideran ruido. Los errores de modelado a menudo afectan las innovaciones* mucho más que el ruido (E.C. Beattie, R.F. La Prod., M.M. Akhter y S.M. Rock; NASA, mayo 1993).

Este valor es un compromiso entre "Sensitividad a la Detección" y "Falsas Alarmas". Se requiere de la definición de la Planta (incluyendo incertidumbre del modelo), un Filtro Detector (el cual provee la secuencia de las innovaciones) y una interconexión del sistema que tome en cuenta las incertidumbres externas e internas dentro de las salidas (innovaciones y error de seguimiento).

La planta y la incertidumbre del modelo, sobre los cuales depende el Umbral, son definidos como sigue:

Dado un sistema representado en un modelo nominal lineal en Espacio-Estado (se considera controlable y observable)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

El comportamiento de la planta Entrada/Salida puede ser representado, tomando en cuenta la incertidumbre del modelado.

$$G_m(s) = (I + \Delta(s))G_o(s) \tag{4.3.2}$$

donde $\Delta(s)$ es la incertidumbre, asumida lineal e invariante (LIT), y

(modelo nominal de la planta)

$$G_o(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{4.3.3}$$

se asume que $\Delta(s)$ es estable, causal y limitado por :

$$\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] \leq \delta(\omega) \quad , \omega \geq 0 \tag{4.3.4}$$

El filtro detector es un filtro Kalman de ganancia constante.

** Un estimador puede diseñarse de tal forma que su función de Transferencia se comporte como un filtro Dinámico.

* Si el Residual es obtenido por medio de un Observador o un filtro Kallman, se le denomina Innovación

Las innovaciones están en función del modelo nominal de la planta y del diseño del filtro. Por ejemplo, considérese el sistema típico de realimentación mostrado en la figura 4.4.

El estimador contiene el modelo de la planta nominal $G_o(s)$, el cual es aproximado al modelo actual de la planta $G_m(s)$, y un filtro Dinámico $F_o(s)$, tal que:

$$\hat{y}(s) = G_o(s)U(s) + F_o(s)v(s) \quad (4.3.5)$$

$$v(t) = Z(t) - \hat{y}(t) \quad (4.3.6)$$

$$Z(t) = y(t) + b(t) \quad (4.3.7)$$

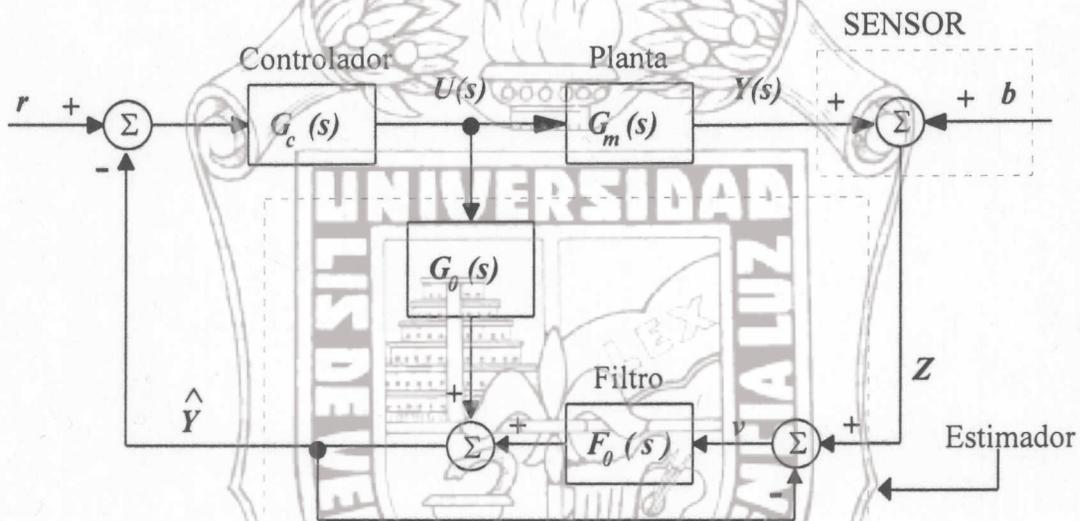


FIG 4.4 SISTEMA DE CONTROL CON TOLERANCIA A FALLA, CON UN ESTIMADOR.

donde $\hat{y}(t)$ es el estimado de la salida $y(t)$, $v(t)$ es la señal de las innovaciones, y $Z(t)$ es la salida del sensor, la cual esta compuesta de la salida $y(t)$ de la planta y una señal $b(t)$, que representa ruido del sensor y/o una clase de fallas del sensor. La estructura del estimador (4.3.5) es equivalente a la estructura para estimadores en Espacio-Estado, ver fig. 4.5 donde:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Kv(t) \quad ; v(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (4.3.8)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (4.3.9)$$

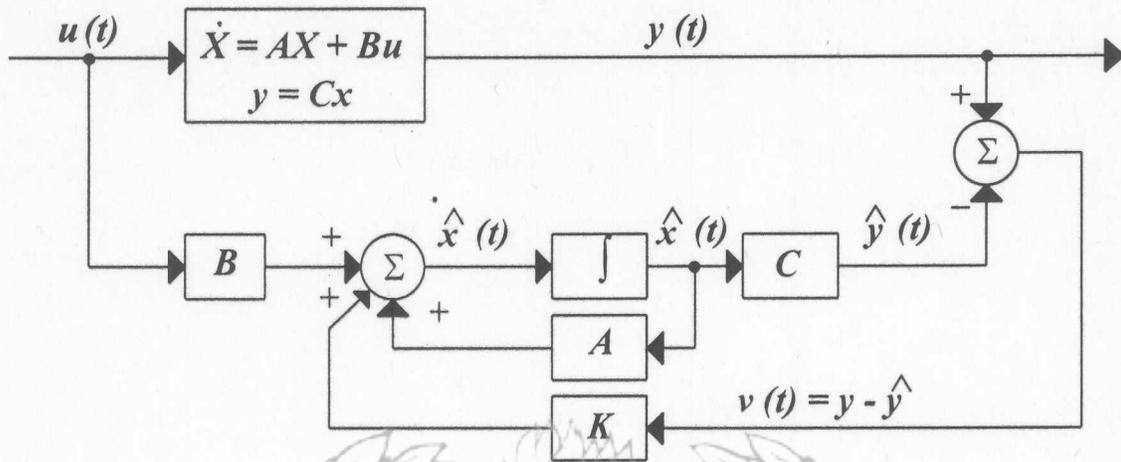


FIG.4.5 ESTIMADOR DE ESTADO DE ORDEN COMPLETO

En este caso, el modelo nominal de la planta es como en (4.3.3) y la del filtro es:

$$F_o(s) = C(sI - A)^{-1}K \quad (4.3.10)$$

La señal de control es dada por:

$$U(s) = G_c(s)[R(s) - \hat{Y}(s)] \quad (4.3.11)$$

Donde $R(s)$ es el comando de referencia y $G_c(s)$ es la función de transferencia del controlador y el error de seguimiento e es : $r - \hat{y}$. Se asume que $r(t)$ es un polinomio conocido.

La derivación de la ecuación del selector de Umbral, requiere expresar las innovaciones en términos de la señal de entrada $r(t)$, y la señal inducida por la Falla $b(t)$.

Específicamente, para el esquema mostrado en la figura 4.4, es necesario determinar las funciones de transferencia, definidas implícitamente por:

$$E(s) = H_{er}(s)R(s) + H_{eb}(s)b(s) \quad (4.3.12)$$

$$v(s) = H_{vr}(s)R(s) + H_{vb}(s)b(s) \quad (4.3.13)$$

$$\Rightarrow \text{ o bien: } \begin{bmatrix} E(s) \\ v(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{er}(s) & H_{eb}(s) \\ H_{vr}(s) & H_{vb}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(s) \\ b(s) \end{bmatrix} \quad (4.3.14)$$

Mediante la regla de Masson y algunas aproximaciones*, se obtiene:

* Ver interesante desarrollo en [2] pag. 1108

$$H_{er}(s) = S(s) - S(s)(I + G(s)L(s)) \quad (4.3.15)$$

$$(I + \Delta(s)T(s)M(s))^{-1} \Delta(s)T(s)$$

$$H_{eb}(s) = T(s)M(s) + S(s)(I + G(s)L(s)) \quad (4.3.16)$$

$$(I + \Delta(s)T(s)M(s))^{-1} \Delta(s)T(s)M(s)$$

$$H_{vr}(s) = L(s)(I + \Delta(s)T(s)M(s))^{-1} \Delta(s)T(s) \quad (4.3.17)$$

$$H_{vb}(s) = L(s)(I + \Delta(s)T(s)M(s))^{-1} \quad (4.3.18)$$

Donde

$$G(s) = G_o(s)G_c(s) \quad (4.3.19)$$

$$S(s) = (I + G(s))^{-1} ; \quad T(s) = (I + G(s))^{-1} G(s) \quad (4.3.20)$$

$$L(s) = (I + F_o(s))^{-1} ; \quad M(s) = (I + F_o(s))^{-1} F_o(s) \quad (4.3.21)$$

Algunos aspectos que se asumen en esta técnica :

- El ruido y las incertidumbres del modelado están limitadas
- La estrategia de Detección es basada en las innovaciones de un estimador.
- La señal de referencia es completamente conocida y la clase de Falla es dada.
- La señal de referencia excita el sistema al inicio de la *-Ventana de Detección-*, sobre la cual estarán siendo monitoreadas las innovaciones, además las fallas ocurrirán dentro de la ventana de Detección.
- Ya que el tiempo relativo de la ocurrencia de las señales de referencia y de Falla es desconocido, se asume una ocurrencia simultánea de estas señales. Esto último tiene un efecto grande en las innovaciones, y por consiguiente afecta la selección del Umbral.

4.3.1.3 EFECTO DE LA INCERTIDUMBRE DEL MODELADO EN LA DETECCIÓN DE FALLA.

DEFINIENDO LAS INOVACIONES

La magnitud de las Innovaciones en muchos esquemas de Detección de fallas está basado en el valor **RMS** de las mediciones, para este caso $v(t)$.

De 4.3.13, la secuencia de innovaciones puede ser expresada como:

$$v(s) = H_{vb}(s)b(s) + H_{vr}(s)R(s) \quad (4.3.22)$$

donde H_{vb} y H_{vr} depende de la incertidumbre del modelo $\Delta(s)$

$$H_{vr}(s) = H_{vb}(s) \Delta(s) T(s) \quad (4.3.23)$$

Definiendo la señal $b(t)$ como:

$$b(t) = n(t) + f(t) \quad (4.3.24)$$

donde $n(t)$ es el ruido del sensor y $f(t)$ es una señal asociada con una clase de Falla del sensor; la cual se asume conocida.

Dado $J(\tau)$, definido como una medida del tamaño de las innovaciones en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$, donde $J(\tau)$ es dado por:

$$J(\tau) = \|v\|_{\tau} \quad \text{(La Norma de la secuencia de innovaciones)} \quad (4.3.25)$$

La operación de Norma (truncada) $\|\cdot\|_{\tau}$ es basada en una medida "rms" de las innovaciones.

La Norma en (4.3.25), puede ser evaluada en el Dominio del tiempo o de la Frecuencia, por tanto la notación:

$$J(\tau) = \|v(s)\|_{\tau} \quad (4.3.26)$$

significa la Evaluación de la Norma en el Dominio de la Frecuencia.

Sustituyendo (4.3.24) y (4.3.23) en (4.3.22) y después en (4.3.26)

$$J(\tau) = \|H_{vb}(s)[N(s) + F(s) + \Delta(s)T(s)R(s)]\|_{\tau} \quad (4.3.27)$$

cuando no hubiere errores de modelado, $\Delta(s)=0$, entonces

$$v(s) = H_{vb}(s)[N(s) + F(s)] \quad (4.3.28)$$

OBSERVACIONES:

- I) Una señal diferente de cero, debido a fallas es Detectable en \hat{y} a través de la dinámica de $H_{vb}(s)$ dada por (4.3.18). (Aunque $\Delta(s)=0, H_{vb} \neq 0, \Rightarrow v(s) \neq 0$, por tanto tenemos $\hat{y} \neq 0$).
- II) Es posible detectar la presencia de una Falla, aunque sea relativamente pequeña, la única limitación es el nivel de ruido en el sensor.

- III) Otro aspecto importante, es que el error de modelado, eleva el nivel de Umbral (4.3.27). Experimentalmente se comprueba que el error de modelado domina considerablemente, cualquier nivel de ruido del sensor y es la causa principal de falsas alarmas y detecciones perdidas.
- IV) Es inevitable que la Detección de fallas sea en presencia de incertidumbre de modelado, con lo cual se requiere maximizar las funciones de transferencia H_{vb} y H_{vr} , para mejorar la capacidad de detectar fallas.

FALSAS ALARMAS

Un requerimiento en la Detección, es reducir o prevenir las falsa alarmas. Por tanto, en ausencia de cualquier señal de Falla, $J(\tau)$ debe ser menor que un valor de Umbral, J_{th}

$$\text{Falsas alarmas} \xrightarrow{\Delta} 0 \text{ si } J(\tau) < J_{th}(s) \quad (4.3.29)$$

si $F(s)=0$, en (4.3.27) da:

$$J_{th}(\tau) = \sup_{\Delta, n} \|H_{vb}(s)[N(s) + \Delta(s)T(s)R(s)]\|_{\tau} \quad (4.3.30)$$

OBSERVACIÓN:

La función Umbral depende solo de la señal de referencia $r(t)$, así como del ruido y errores de modelado.

En el caso que no hubiera errores de modelado $\Delta=0$, el Umbral estaría entonces determinado estrictamente para el peor caso del nivel de ruido:

$$J_{th}(\tau) = \sup_n \|H_{vb}(s)N(s)\|_{\tau} \quad (4.3.31)$$

EL SELECTOR DE UMBRAL

El selector de Umbral es una desigualdad, la cual provee el *-Límite Superior-* al Umbral definido en (4.3.30).

El Umbral es calculado, en función del tamaño de la Falla.

La pregunta es: ¿Cual es la Mínima Falla Detectable y el Umbral asociado? si $J_{th}(\tau)$ aumenta demasiado, se corre el riesgo que una Falla no pueda ser detectada; entonces se debe acotar $J_{th}(\tau)$, pero ¿Para que altura de Falla se desea acotar?

La fig. 4.6 amplia el cuestionamiento anterior:

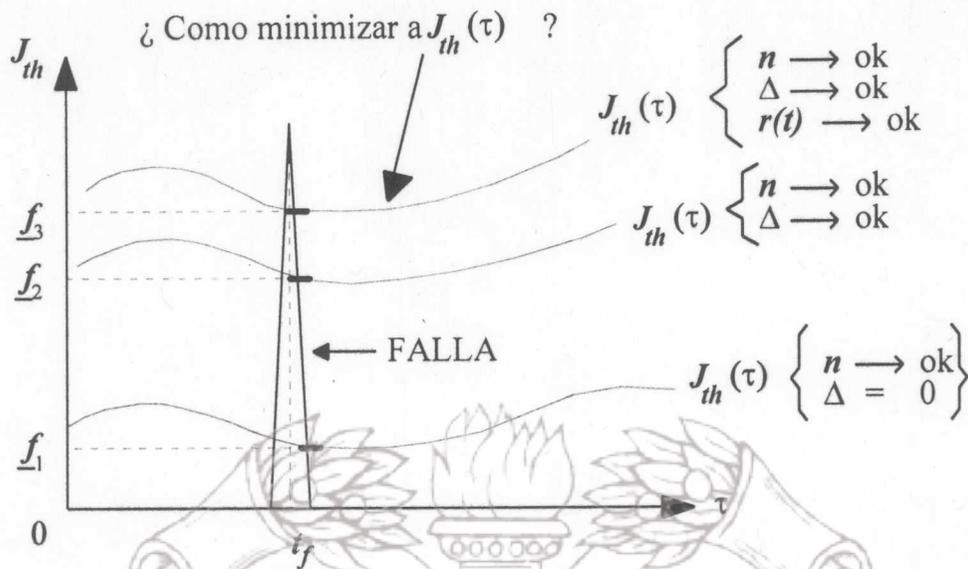


FIG. 4.6 EL SELECTOR DE UMBRAL CONDICIONA A LA FALLA MINIMA DETECTABLE

Por tanto :

$$\inf_{\Delta, n, f} J(\tau) > J_{th}(\tau) \quad (4.3.32)$$

Lo cual significa: el valor infimo de $J(\tau)$, en presencia de error de modelado, ruido y Falla, que sea mayor que el Umbral $J_{th}(\tau)$. Si lo anterior se cumple, la probabilidad de Falsa Alarma disminuye.

Sustituyendo (4.3.27) y (4.3.30) en (4.3.32)

$$\inf_{\Delta, n, f} \|H_{vb} [N + F + \Delta TR]_{\tau}\| > \sup_{\Delta, n} \|H_{vb} [N + \Delta TR]_{\tau}\| \quad (4.3.33)$$

Es conveniente descomponer $v(s)$ en 3 componentes por ruido, incertidumbre y Falla. Entonces usando (4.3.26) y (4.3.27) se obtiene:

$$v(s) = v_n(s) + v_f(s) + v_{\Delta}(s) \quad (4.3.34)$$

por lo cual (4.3.33) se reescribe como:

$$\inf_{\Delta, n, f} \|v_n + v_f + v_{\Delta}\| > \sup_{\Delta, n} \|v_n + v_{\Delta}\| \quad (4.3.35)$$

lo cual significa: El valor infimo, del tamaño de la innovación considerando el ruido, incertidumbre y falla, debe ser siempre mayor que el supremo tamaño de la innovación en ausencia de falla.

Ya que esta desigualdad genera el mínimo Umbral, se le denomina: **-El Selector de Umbral-**

4.3.1.4 RESULTADOS PRINCIPALES

Emani-Naeini y Akhter proponen en [2] pag. 1109, el siguiente Teorema, para obtener una Falla Mínima Detectable y un Umbral Asociado a ella.

TEOREMA 4.3.1

Un estimado del Tamaño de la Falla Mínima Detectable, $\underline{f}(\tau)$ es dado por :

$$|f| \geq \underline{f}(\tau) = 2 J_{th}(\tau) / \beta(\tau) \tag{4.3.36}$$

con un Umbral asociado:

$$J_{th}(\tau) \equiv (\max_w \sigma [L(jw)]) \bar{n} + \delta |r| \sigma [(Q_{\tau I} L T)(\tau)] \tag{4.3.37}$$

donde:

$$\beta(\tau) \equiv \sigma [(Q_{\tau I} L)(\tau - t_F)] \tag{4.3.38}$$

- $Q_{\tau I} \triangleq$ Ganancia del operador, la cual esta en función de las clases de señales, tanto de falla como de referencia.
- $\delta \triangleq$ Constante de limite superior de la incertidumbre del modelo $\delta(w)$
- $f(t) \triangleq$ Una señal de falla (Escalón) ocurriendo dentro de la ventana de Detección en el tiempo t_f .
- $r(t) \triangleq$ Una entrada de referencia (Escalón) ocurriendo al inicio de la ventana de Detección .
- $\tau \triangleq$ Tamaño de la ventana de Detección.
- $\bar{n} \triangleq$ Limite del ruido en el sensor (rms)

Para usar (4.3.35) o (4.3.36) es necesario especificar la medida de la Detección $\|\cdot\|_{\tau}$

Supóngase que la Detección es basada en la medida (rms) raíz media cuadrada .

$$\|x(t)\|_{\tau} = \left[\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \tag{4.3.39}$$

Lo anterior es precisamente la *-Función de Evaluación-* para esta Técnica Geométrica.

donde $|x(t)|$ es la Norma euclidiana de $x(t)$

$$|x(t)| = (x^T(t) \cdot x(t))^{1/2} \tag{4.3.40}$$

definiendo un operador Γ_k lineal tal que:

$$(\Gamma_k H)(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}[H(s)] & ; k = 0 \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(k-1)!}{s^k} H(s)\right] & ; k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.3.41)$$

donde $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ es la transformada inversa de Laplace.

por lo cual

$(\Gamma_0 H)(t)$ es $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$: Respuesta Impulso

$(\Gamma_1 H)(t)$ es $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} H(s)\right]$: Respuesta Escalón

y así sucesivamente.

Además se define el siguiente operador matricial.

$$(Q_{\tau k} H)(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [(\Gamma_k H)(t)]^T [(\Gamma_k H)(t)] dt \right)^{1/2} \quad (4.3.42)$$

Las ecuaciones (4.3.41) y (4.3.42) junto con el Teorema* 4.3.1 definen la técnica del **Selector de Umbral**.

OBSERVACIONES:

- I) En la presencia de ruido, la ventana de Detección debe de ser lo bastante grande para separar el ruido de la señal (Falla del sensor).
- II) Como t_f no es conocido; consecuentemente uno puede solamente evaluar el efecto en $\underline{f}(\tau)$, para una arbitraria elección de la ventana de Detección.
- III) Una razonable asunción para diseñar el Umbral J_{th} es el valor $t_f = 0$ (o muy pequeño). Ya que el tiempo relativo de la ocurrencia de las señales de referencia y de falla es desconocido, uno podría considerar la situación en la cual, se tiene el mayor efecto sobre las innovaciones. Esto podría pasar si las dos señales exitan el sistema alrededor del mismo tiempo.
- IV) La fig. (4.7) es también útil en evaluar la dinámica del filtro. Sí las dinámicas del filtro son rápidas, hay valores de la "Falla Mínima Detectable (\underline{f})" mas pequeños, que cuando el filtro es lento. La fig. (4.7) nos muestra el compromiso, en el diseño del filtro, es decir, el tamaño de \underline{f} Vrs. el ancho de la ventana de Detección. (τ)

* La prueba de este teorema, se encuentra en [2] pag. 1109

La fig. 4.8 muestra el comportamiento del Umbral J_{th} Vrs. la ventana de Detección τ

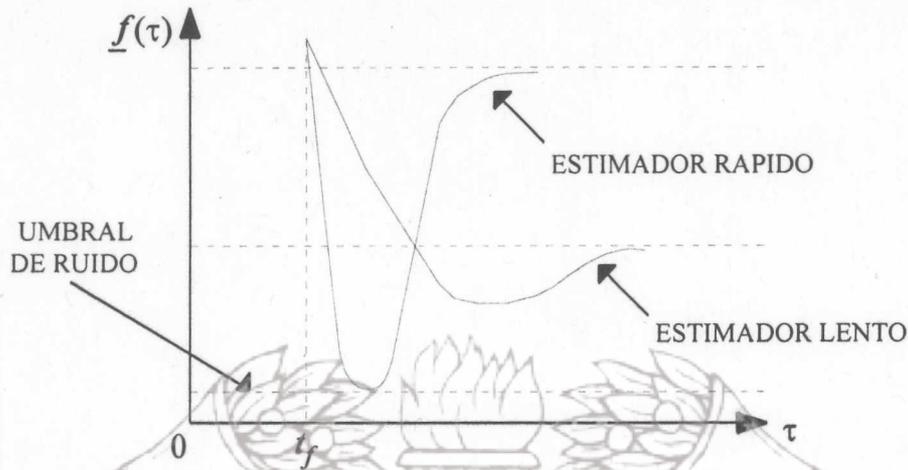


FIG 4.7 FALLA MINIMA DETECTABLE (f Vrs. VENTANA DE DETECCION (τ))

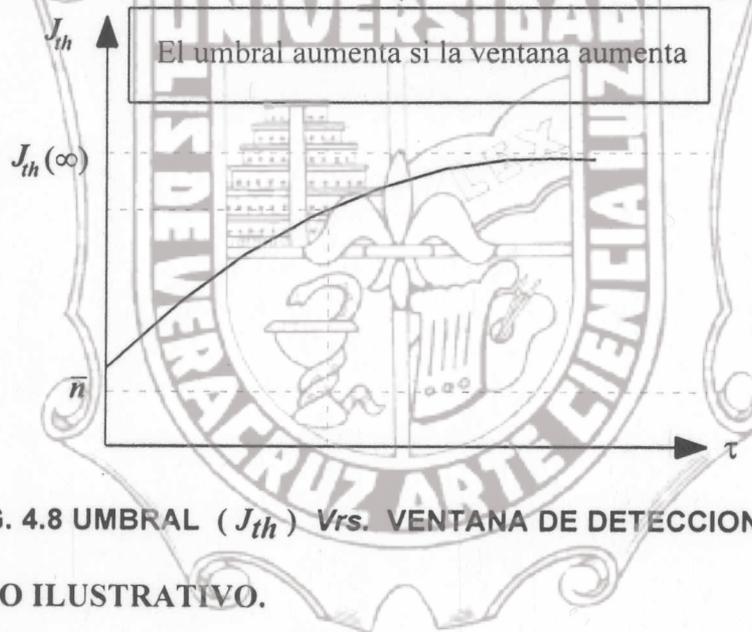


FIG. 4.8 UMBRAL (J_{th}) Vrs. VENTANA DE DETECCION (τ)

4.3.1.5 EJEMPLO ILUSTRATIVO.

Consideremos el siguiente ejemplo escalar, donde:

$$G_o(s) = \frac{a}{s+a} \quad ; \quad a > 0 \tag{4.3.43}$$

con control proporcional-integral

$$G_c(s) = 1 + \frac{a}{s} \quad ; \quad a > 0 \tag{4.3.44}$$

y un Filtro Dinámico :

$$F_o(s) = \frac{k}{s+a} \quad ; \quad k > 0 \quad (4.3.45)$$

se considera para este ejemplo que la falla es "dura" : cambios de escalón largo.

De las ecuaciones (4.3.19) a (4.3.21) obtenemos:

$$G(s) = \frac{a}{s} \quad ; \quad S(s) = \frac{s}{s+a} \quad a; \quad T(s) = \frac{a}{s+a} \quad (4.3.46)$$

$$L(s) = \frac{s+a}{s+(a+k)} \quad ; \quad M(s) = \frac{k}{s+(a+k)} \quad (4.3.47)$$

además, necesitamos $(Q_{\tau_1}L)(\tau - t_f)$ y $(Q_{\tau_1}L)(\tau)$

de (4.3.42) se obtiene

$$(Q_{\tau_1}LT)(\tau) = \left\{ \frac{a^2}{2(a+k)^3 \tau} \left[2(a+k)\tau - 3 + 4e^{-(a+k)\tau} - e^{-2(a+k)\tau} \right] \right\}^{1/2} \quad (4.3.48)$$

con lo cual :

$$(Q_{\tau_1}L)(\tau - t_f) = \left\{ \frac{1}{2\tau(a+k)^3} \left[2a^2(a+k)(\tau - t_f) - k^2 e^{-2(a+k)(\tau - t_f)} - 4a k e^{-(a+k)(\tau - t_f)} + k^2 + 4ak \right] \right\}^{1/2} \quad (4.3.49)$$

en este caso particular, el operador $(\Gamma_r H)(t)$ lo desarrollamos para una respuesta escalón.

Finalmente, el Umbral es dado por:

$$J_{th}(\tau) = \bar{n} + \delta|r| \cdot ABS \left\{ \frac{a^2}{2(a+k)^3 \tau} \left[2(a+k)\tau - 3 + 4e^{-(a+k)\tau} - e^{-2(a+k)\tau} \right] \right\}^{1/2} \quad (4.3.50)$$

y

$$\beta(\tau) = ABS \left\{ (Q_{\tau_1}L)(\tau - t_f) \right\} \quad (4.3.51)$$

donde : $(Q_{\tau_1}L)(\tau - t_f)$ es (4.3.49)

La solución para la Falla Mínima Detectable es dada por (4.3.36)

$$|f| \geq \underline{f}(\tau) = \frac{2J_{th}(\tau)}{\beta(\tau)} \quad (4.3.52)$$

En el limite cuando $\tau \rightarrow \infty$.

$$J_{th}(\infty) = \bar{n} + \delta |r| \frac{a}{(a+k)} = \text{constante} \quad (4.3.53)$$

$$\beta(\infty) = \frac{a}{a+k} = \text{constante} \quad (4.3.54)$$

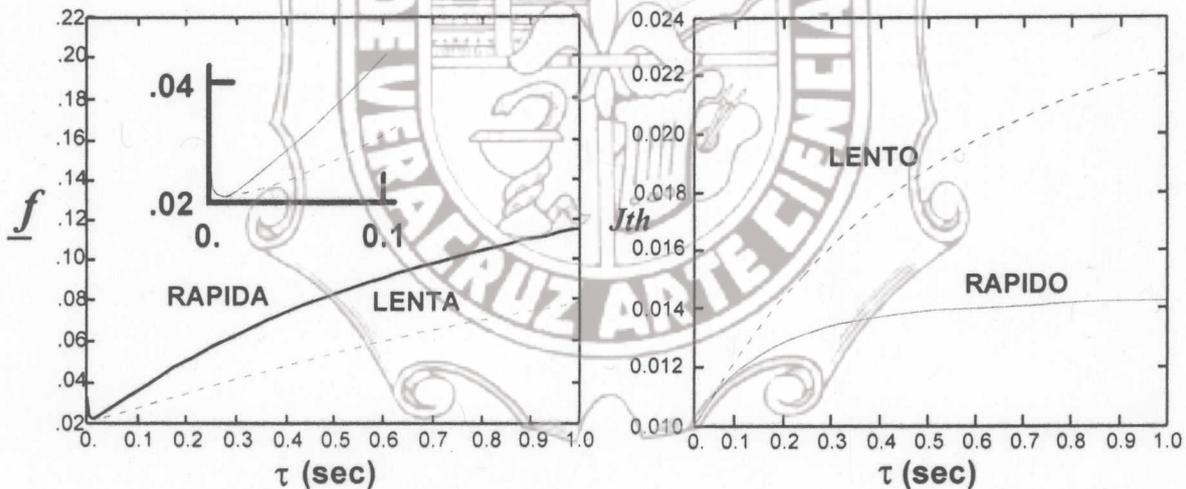
y

$$f(\infty) = 2 \left[\bar{n} \frac{a+k}{a} + \delta |r| \right] = \text{constante} \quad (4.3.55)$$

donde δ es el límite superior de la incertidumbre del modelo. La figura (4.9) muestra el comportamiento del Umbral y la Falla Mínima Detectable, en función de la ventana de Detección τ ; lo anterior para dos diferentes velocidades de estimación y considerando que la falla es "dura".

Considerando los siguientes valores para los parámetros:

- $a = 1$
- $t_f = 0.001$
- $\bar{n} = 0.01$
- $r = 1$ (Escalón Unitario)
- $k = 2$ (Estimador Lento) y $k = 10$ (Estimador Rápido)



(a) Falla mínima detectable (b) Umbral de detección
 FIG. 4.9 EVALUACION PARA UN MODELO SISO

Para una ventana de Detección muy grande, se obtiene:

	Estimador Lento	Estimador Rápido
$J_{tn}(\infty) :$	0.026	0.0145
$\beta(\infty) :$	0.333	0.0909
$f(\infty) :$	0.18	0.32

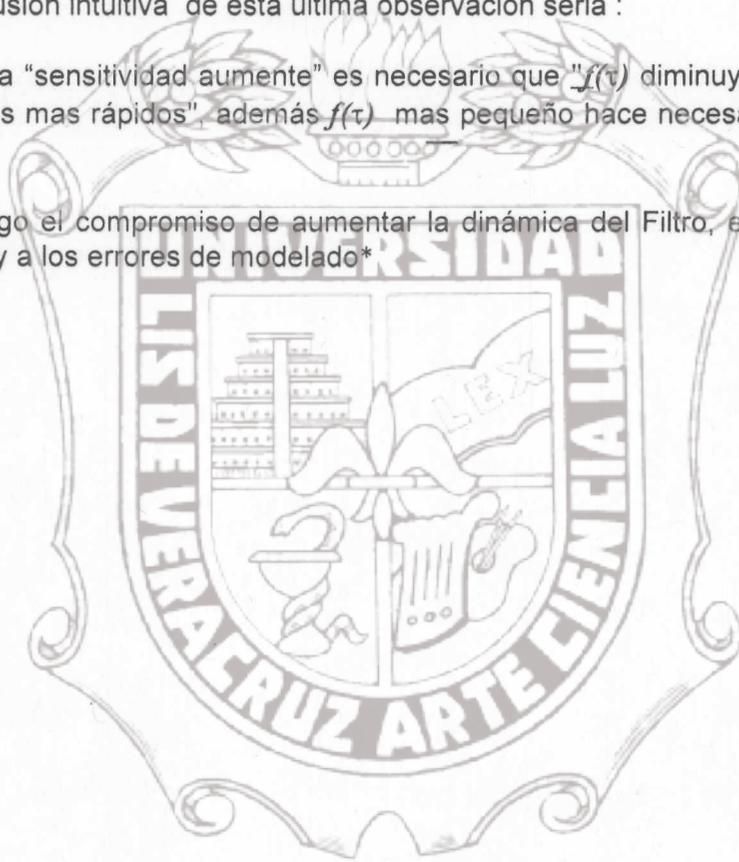
4.3.1.6 COMENTARIOS ADICIONALES

- 1) $J_{th}(\tau) = \bar{n} + \delta |r| \{*\}$ es lógico que $J_{th}(\tau) > \bar{n}$ para evitar que el ruido dispare la prueba.
- 2) El Selector de Umbral permite Determinar Umbrales Optimos y Valores de Falla Mínima Detectable, como una función del máximo error de modelado, ruido, velocidad del filtro y las clases de señales de referencia y de falla.
- 3) El Selector de Umbral constituye una poderosa herramienta y permite el manejo apropiado del compromiso entre Robustez y Sensitividad **DIA**.

Una conclusión intuitiva de esta ultima observación seria :

Para que la "sensitividad aumente" es necesario que " $f(\tau)$ disminuya"; pero para esto se necesita "Filtros mas rápidos", además $f(\tau)$ mas pequeño hace necesario umbrales mas pequeños.

Sin embargo el compromiso de aumentar la dinámica del Filtro, exige hacerse más sensible al ruido y a los errores de modelado*



* Astrom and Wittermark; Computer Controlled Systems, Pag. 313-315

4.3.2 UMBRAL DINAMICO PARA DETECCION DE FALLA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El propósito de esta técnica es la de solucionar ambos problemas, de Generación de Residual y Evaluación de la Falla en el Residual. Con la ayuda del Dominio de la Frecuencia, se establece una relación entre Generadores de Residual, la Función de Evaluación del Residual y el Tamaño Mínimo de la Falla Detectable.

Esto permite formular, el problema como una labor de optimización y encontrar una expresión para el Tamaño Mínimo de Fallas Detectables, por el uso de Generadores de Residual Lineales.

4.3.2.1 INTRODUCCION

La filosofía de este esquema es como sigue: *-Si uno es capaz de generar Residuales que sean, por un lado invariantes a las incertidumbres del modelo, y por otro lado sensitivos a las fallas, entonces el problema de FDI es solucionado-*.

Durante la década de los 80's, muchas investigaciones fueron desarrolladas en base a esta idea: *-Construcción de Residuales que fueran invariantes a disturbios desconocidos-*.

Los resultados revelan, que puede ser muy difícil obtener Residuales que sean totalmente invariantes a disturbios desconocidos.

Basados en esta idea, algunos estudios en años recientes, proponen enfoques más realistas del caso ideal anterior: *-Residuales aproximadamente invariantes, en vez de una total invarianza a los disturbios, en algún sentido "optimizando"-*.

Recientemente las investigaciones muestran que aunque los enfoques de arriba son efectivos para mejorar la robusticidad de Residuales contra disturbios, los cuales desde el punto de vista de modelado pueden ser considerados como incertidumbres estructuradas* ; estos enfoques no son efectivos en tratar con incertidumbres no-estructuradas.

Una posible forma para solucionar este problema, es la de considerar *-La Generación de Residual y Evaluación como un solo problema-*.

La técnica presentada en esta sección, estudia el problema FDI, de tomar el generador de Residual y la Evaluación como un solo sistema. Se introducen algunos nuevos conceptos, para formular el problema FDI en una nueva forma matemática y finalmente con la ayuda de técnicas de optimización basadas en la Norma H_{∞} , se proponen resultados óptimos.

$G^T(s)$ y $G^*(s)$ denotan la transpuesta y la Hermitiana de una función de transferencia $G(s)$, respectivamente.

* Incertidumbre Estructurada, cuando es posible definirla matemáticamente, aunque parte de sus parámetros fueran desconocidos.

$$\|r(j\omega)\|_2 = [r^*(j\omega) r(j\omega)]^{1/2} \quad (4.3.56)$$

denota la Norma-2 de un vector $r(j\omega)$.

$\sigma(G(j\omega))$, $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ y $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ representan los valores singulares, máximos y mínimos de la función de transferencia $G(j\omega)$.

4.3.2.2 FORMULACION DEI PROBLEMA.

MODELO MATEMATICO

Consideramos el sistema nominal lineal, descrito como:

$$Y_0(s) = G_u(s)U(s) \quad (4.3.57)$$

donde $u(t) \in R^p$ es el vector de entrada y $Y_0(t) \in R^m$ es el vector de observación, $G_u(s)$ es una matriz de función de transferencia, real y racional, con dimensión $m \times p$.

En el contexto FDI, una falla es entendida como cualquier clase de mal funcionamiento en la dinámica actual del sistema. El efecto de las fallas sobre las dinámicas del sistema puede, en general, ser modelada como sigue.

$$Y(s) = G_u(s)U(s) + G_f(s)f(s) \quad (4.3.58)$$

donde $f \in R^q$ representa el vector falla y $G_f(s)$ denota una matriz de transferencia de distribución conocida la cual es asumida estable. Es de valor mencionar que la función de transferencia $G_f(s)$ también sirve como un factor de ponderación, la cual direcciona toda la información posible acerca de la falla f .

Ya que en la practica ningún modelo nominal puede describir una planta física perfectamente, las incertidumbres del modelo deben ser tomadas en cuenta. Estas incertidumbres de modelo se refieren al ajuste entre el modelo nominal y el sistema actual.

Con respecto al modelo del sistema (4.3.58), una incertidumbre del sistema puede ser expresada como:

$$Y(s) = Y_0(s) + \Delta Y(s) + G_f(s) \quad (4.3.59)$$

con $\Delta Y(s)$ representando los efectos de las incertidumbres del modelo en la medición $Y(s)$.

Se llama Incertidumbre del Modelo Estructurado, cuando este puede ser escrito como:

$$\Delta Y(s) = G_w w(s) \quad (4.3.60)$$

Con una matriz de distribución $G_w(s)$ conocida, y un vector función $w(s)$ desconocido, de lo contrario se llamaría No-Estructurado.

Se considera para efectos de análisis, un sistema de la siguiente forma:

$$Y(s) = [G_u(s) + \Delta G_u(s)]U(s) + [G_f(s) + \Delta G_f(s)]f(s) + G_w(s)w(s) \quad (4.3.61)$$

donde $G_w(s)$. es (matriz de distribución) conocida y asumida estable

$\Delta G_u(s)$, $\Delta G_f(s)$ y $w(s)$ son desconocidas, pero sus tamaños están restringidos:

$\Delta G_u(s)$ representa el error de desviación del valor nominal de la función de transferencia del sistema $G_u(s)$

$$\bar{\sigma}(\Delta G_u(jw)) \leq \delta_u(w)$$

$\Delta G_f(s)$: igual que el anterior, para la función de transferencia $G_f(s)$

$$\bar{\sigma}(\Delta G_f(jw)) \leq \delta_f(w) \quad (4.3.62)$$

$W(s)$ vector desconocido proporcional a la incertidumbre del modelado, con tamaño restringido.

$$\|w(jw)\|_2 \leq \delta_w(w)$$

Reescribiendo el modelo del sistema (4.3.61) como:

$$Y(s) = G_u(s)U(s) + G_d(s)d(s) + \bar{G}_f(s)f(s) \quad (4.3.63)$$

donde

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} I & G_w(s) \end{bmatrix} \quad d(s) = \begin{bmatrix} \Delta G_u(s) U(s) \\ w(s) \end{bmatrix} \quad (4.3.64)$$

$d(s)$: vector de incertidumbre que contiene dos componentes:

$\Delta G_u(s)U(s) \rightarrow$ el efecto de la señal de entrada al sistema, sobre la desviación $\Delta G_u(s)$

además $d(s)$ es acotado: $\|d(jw)\|_2 \leq \delta_d(w)$

$G_d(s)$: matriz de transferencia para la incertidumbre.

También $\bar{G}_f(s)$ se define como:

$$\bar{G}_f(s) = G_f(s) + \Delta G_f(s) \quad (4.3.65)$$

DEFINICION DE UMBRAL

En la practica, un proceso de Detección de Falla consiste en la comparación de una Evaluación de Residuales, por decir J_f , con respecto a un Umbral J_{th} predefinido. Si $J_f \geq J_{th}$, entonces decimos que una falla ocurre en el sistema.

J_f es una función de las fallas f y de la incertidumbre del modelo Δy , y por tanto:

$$J_f = J(f, \Delta y) \quad (4.3.66)$$

donde la función J depende de la construcción de los Generadores de Residual.

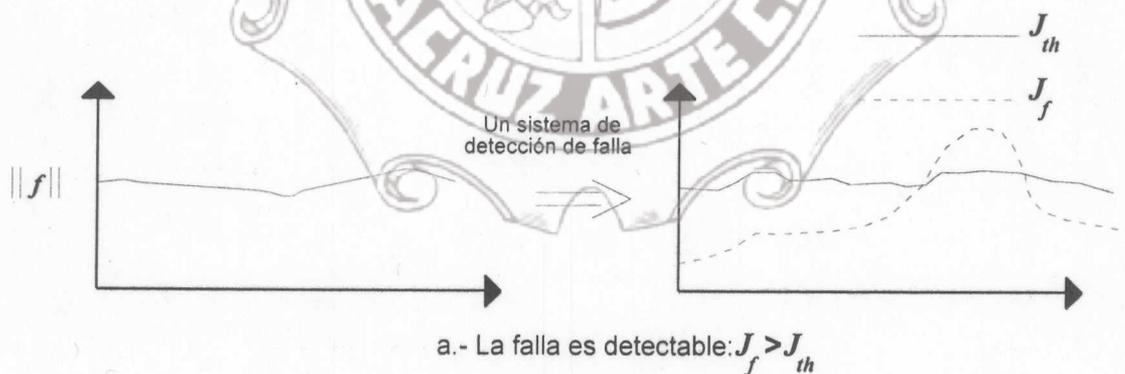
Para prevenir falsa alarma un Umbral es definido por:

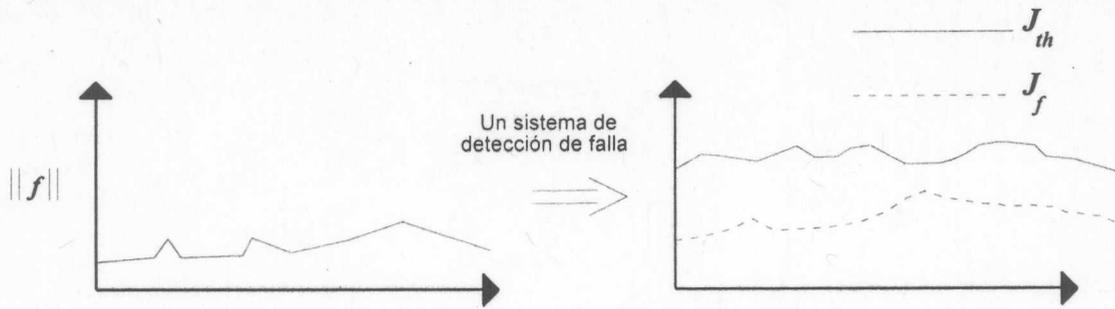
$$J_{th} = \sup_{\Delta y, f=0} J_f = \sup_{\Delta y, f=0} J(f, \Delta y) \quad (4.3.67)$$

$\sup_{\Delta y, f=0} J_f$ → es el valor "supremo" que presenta la función J_f , en ausencia de fallas y error de modelado.

Es deseable en todo momento, que toda falla, independientemente de su forma y tamaño pueda ser detectada. Sin embargo, en forma general, para un Umbral dado y una cierta clase de construcción de Generador de Residual, hay fallas las cuales no pueden ser detectadas.

La fig. 4.10 nos esquematiza lo anterior.





b.- La falla no es detectable: $J_f < J_{th}$

FIG 4.10 REPRESENTACION DE FALLAS DETECTABLES Y NO DETECTABLES

Hay también fallas, las cuales no son justamente Detectables; es el caso de $J_f = J_{th}$, denominados falla mínima Detectable, como se muestra en la fig. 4.11



La falla es justamente detectable: $J_f = J_{th}$

FIG. 4.11 REPRESENTACION DE UNA FALLA MINIMA DETECTABLE

Es claro que para diferentes Generadores de Residual y Evaluadores, el tamaño de la Falla Mínima Detectable puede ser también diferente.

Es razonable decir, que un Generador de Residual (**RG1**) es mejor que otro Generador de Residual (**RG2**), si el tamaño de la falla mínima Detectable correspondiente a **RG1** es mas pequeña que la correspondiente a **RG2**. Ver fig. 4.12

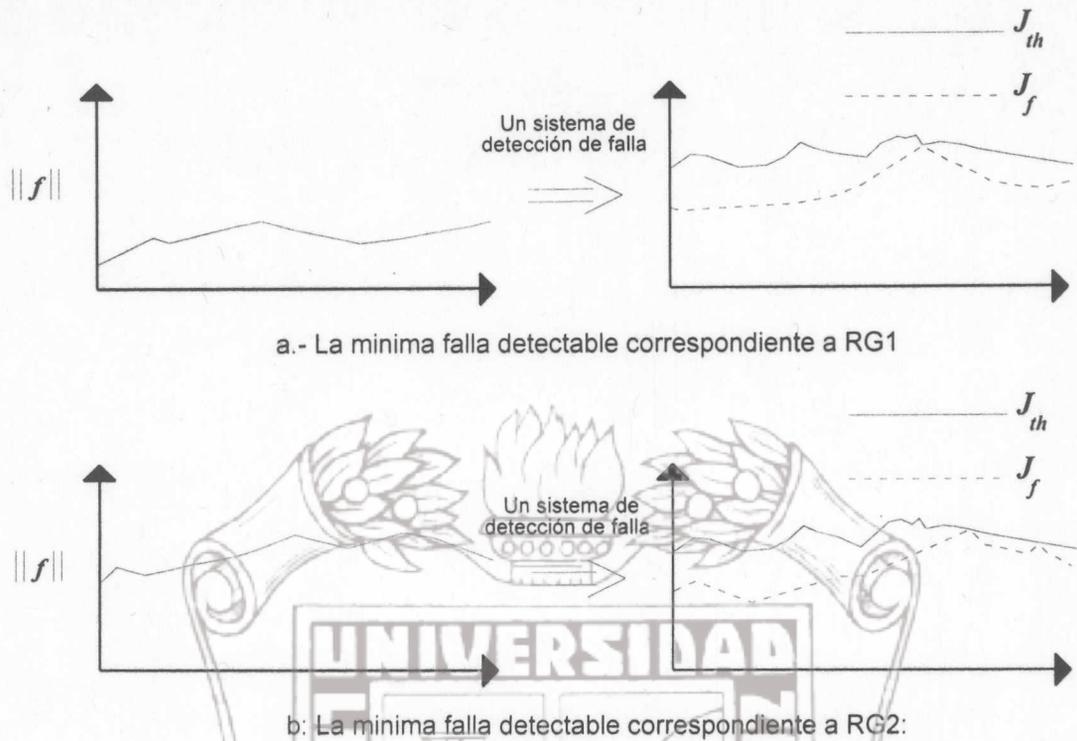


FIG. 4.12 COMPARACION ENTRE FALLAS MINIMAS DETECTABLES CORRESPONDIENTES A DIFERENTES GENERADORES DE RESIDUAL.

Obsérvese que el J_f de RG1 es capaz de alcanzar su J_{th} , para su correspondiente falla; igual sucede en RG2, pero esta segunda falla es mayor que la primera.

Sin duda es deseable tener un Generador y evaluador de Residual, para los cuales el tamaño de la falla mínima Detectable es lo mas pequeña posible. Bajo esta consideración es claro que :

- Evitar falsas alarmas; y
- Minimizar el tamaño de la falla mínima Detectable, y aún mas
- El tiempo de retardo por detección lo mas pequeño posible,

son los objetivos mas importantes en el diseño de Generadores de Residuales y Evaluadores.

Estos objetivos son alcanzables por:

- Adecuado diseño del Generador de Residual,
- Introducir la función de decisión J_f , y
- Definir los Umbrales J_{th} ;

Tal que "el Tamaño de la Falla Mínima Detectable pueda ser minimizada". Esto es el principal objetivo en este desarrollo analítico.

DISEÑO DE LOS GENERADORES DE RESIDUAL.

La función de transferencia puede ser factorizada en forma coprima izquierda de la siguiente forma: (sustentado en [5] pag.1724).

$$G_u(s) = \hat{M}_u^{-1}(s) \hat{N}_u(s) \quad (4.3.68)$$

y la estructura del Residual es la siguiente:

$$r(s) = R(s) [\hat{M}_u(s)Y(s) - \hat{N}_u(s)U(s)]; R(s) \neq 0 \quad (4.3.69)$$

en ausencia de falla $y \rightarrow y_0 = G_u(s) U(s)$

$$y \quad r(s) = 0 \quad (4.3.70)$$

$R(s)$ es una matriz de parametrización, las funciones de transferencia $\hat{M}_u(s)$ y $\hat{N}_u(s)$, pueden ser determinadas por medio de los algoritmos planteados en [5], pag.1724.

Para este fin, los Residuales obtenidos cuando hay presencia de falla, son generados de la siguiente forma:

$$\Rightarrow r(s) = R(s) \hat{M}_u(s) [\hat{G}_f(s)f(s) + G_d(s)d(s)] \quad (4.3.71)$$

Así, nuestro problema es encontrar la Matriz de Parametrización $R(s)$, tal que el Generador de Residual sea sensitivo a la falla f y, Robusto contra d .

La fig. 4.13 presenta el diagrama en bloques del Generador de Residual.

FUNCION DE EVALUACION Y UMBRAL

En [5] pag. 1724 se propone una Función de Evaluación, en el Dominio de las Frecuencia, definida como:

$$J_f(\phi) = \left[(2\pi\varepsilon)^{-1} \int_{w_2}^{w_1} r^*(jw) r(jw) dw \right]^{1/2} = \varepsilon^{-1/2} \|r(jw)\|_\varepsilon \quad (4.3.72)$$

$$\varepsilon = w_2 - w_1$$

$$\text{Además:} \quad \|r(jw)\|_\varepsilon = \left[(2\pi)^{-1} \int_{w_2}^{w_1} r^*(jw) r(jw) dw \right]^{1/2} \quad (4.3.73)$$

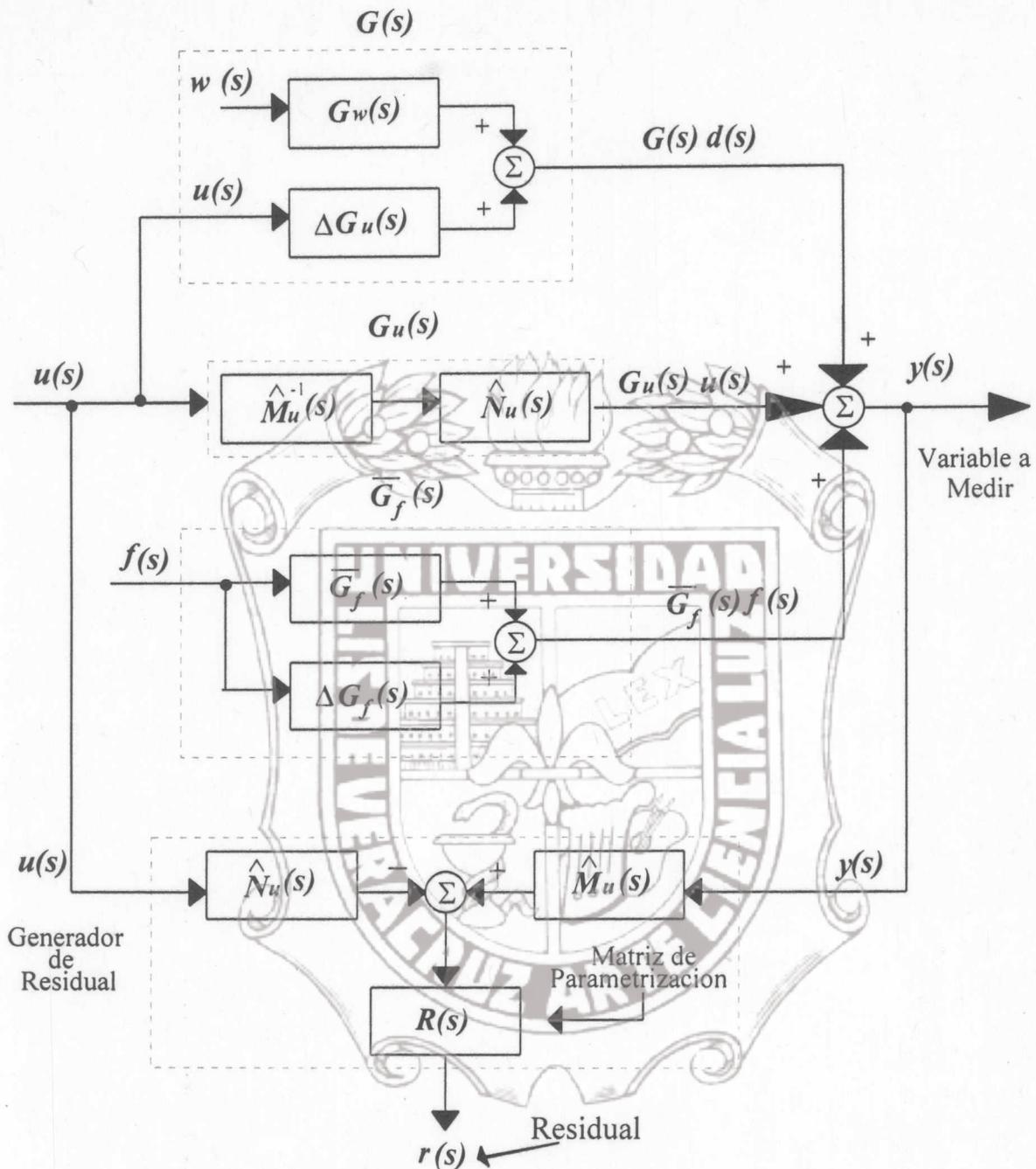


FIG. 4.13 DIAGRAMA EN BLOQUES DEL MODELO DEL SISTEMA Y GENERADOR DE RESIDUAL

donde ϕ denota el rango de Frecuencia (w_1, w_2)

Es bien conocido, que un requerimiento principal en la detección de falla es reducir o prevenir las falsas alarmas. Así, en ausencia de cualquier falla, $J_f(\phi)$ debería ser menor que un valor de Umbral J_{in} ; por tanto:

$$J_{th} = \sup_{\Delta y, f=0} J_f(\phi) \quad (4.3.74)$$

El Umbral está definido como el valor superior de $J_f(\phi)$ en presencia de incertidumbre, sin falla.

Con la cual considerando $f(s) = 0$ en (4.3.71), nos dá:

$$s \rightarrow j\omega \quad J_{tn} = \sup_d \left\| R(j\omega) \hat{M}_u(j\omega) G_d(j\omega) d(j\omega) \right\|_\epsilon \epsilon^{-1/2} \quad (4.3.75)$$

4.3.2.3 RESULTADOS PRINCIPALES

Ya que un procedimiento de FDI consiste de la Generación de Residual y Evaluación; el tamaño de las fallas Detectables evidentemente depende de la construcción del Generador de Residual, la selección de la Función de Evaluación así como del Umbral.

Esto, considerando los resultados anteriores significa que el tamaño de la falla Detectable es de hecho una función de la matriz de parametrización $R(s)$ y de la ventana de Frecuencia $\phi = (\omega I, \omega 2)$.

Si se encontrara la relación entre el tamaño mínimo de la falla Detectable y la matriz de parametrización, así como con la ventana de Frecuencia, y presentar esto en una apropiada forma matemática; el problema entonces se reduce a un problema de optimización, para el cual podemos conseguir una óptima o al menos una subóptima solución. Esta es la idea básica del siguiente desarrollo.

FALLA MINIMA DETECTABLE.

Es claro que una falla puede ser detectada solamente, si esta causa que la función de Evaluación del Residual exceda el Umbral; por tanto:

$$J_f(\phi) \geq J_{th} \quad (4.3.76)$$

Notamos sin embargo, que una falla debido a las incertidumbres del modelo, puede tener diferente influencia sobre los Residuales y aun en la Función de Evaluación. Tomando en cuenta esto, se define una falla como Detectable si:

$$\inf_{\Delta y} J_f(\phi) \geq J_{th} \quad (4.3.77)$$

Una falla es Detectable si esta causa que la función de Evaluación del Residual sobrepase el Umbral para *-Todas las incertidumbres del modelo-*. Denotamos el conjunto de todas las fallas Detectables por Ω_f :

$$\Omega_f := \left\{ f: \inf_{\Delta y} J_f(\phi) \geq J_{th} \right\} \quad (4.3.78)$$

con lo cual, el problema puede ser descrito como encontrar un f_{min} que satisface:

$$\|f_{min}\|_{\epsilon} = \inf \{ \|f\|_{\epsilon} : f \in \Omega_f \} \quad (4.3.79)$$

con respecto a la matriz de parametrización $R(s)$ y la ventana de Frecuencia ϕ . Aquí $\|f\|_{\epsilon}$ es una Norma que es usada para medir el tamaño de las fallas.

X. Ding y L. Guo proponen en [5] Pag. 1724, el siguiente teorema para obtener una Falla Mínima Detectable y un Umbral asociado a ella.

TEOREMA 4.3.2

Dado un Generador de Residual (4.3.69) y una Función de Evaluación del Residual (4.3.72), entonces se tiene que :

$$\|f_{min}\|_{\epsilon} = 2J_{in}\epsilon^{1/2} / K(\phi) \quad (4.3.80)$$

donde el Umbral J_{in} es definido por (4.3.75) y

$$K(\phi) = \min_{w \in \phi} \left\{ \sigma^2 [R(jw)\hat{M}_u(jw)G_f(jw)] - \bar{\sigma}^2 [R(jw)\hat{M}_u(jw)] \delta_f(w) \right\}^{1/2} \quad (4.3.81)$$

OBSERVACIONES:

- Las expresiones (4.3.80) y (4.3.81) proveen una relación entre los Generadores de Residual (representado por la matriz de parametrización $R(s)$) así como de la Evaluación de la ventana (ϕ) y el tamaño de la Falla Mínima Detectable .
- X. Ding y L. Guo en su teorema 4.3.2 presentan un resultado que puede ser interpretado como una extensión en el Dominio de la Frecuencia, del "Selector de Umbral en el Dominio del Tiempo" por Emani-Naeini [2]; ver la sección 4.3.1.

FALLA MINIMA POR EL SELECTOR DE UMBRAL DOMINIO EN EL TIEMPO (SECC.4.3.1)	FALLA MINIMA PARA UN GENERADOR DE RESIDUAL DOMINIO DE LA FRECUENCIA (SECC.4.3.2)
$ f \geq f(\tau) = 2J_{in}/\beta(\tau) \quad (4.3.36)$	$\ f_{min}\ _{\epsilon} = 2J_{in}\epsilon^{1/2} / K(\phi) \quad (4.3.80)$
$J_{in}(\tau) \equiv \left(\max_w \bar{\sigma}[L(jw)] \right) \bar{n} + \delta r \bar{\sigma}[\dots] \quad (4.3.37)$	$J_{in} = \sup_d \ R(jw)\hat{M}_u(jw)G_d(jw)d(jw)\ _{\epsilon} \epsilon^{-1/2} \quad (4.3.75)$
$B(\tau) \equiv \underline{\sigma}[(Q_{\tau}L)(\tau - t_f)] \quad (4.3.38)$	$K(\phi) = \min_{w \in \phi} \left\{ \sigma^2 [R(jw)\hat{M}_u(jw)G_f(jw)] - \bar{\sigma}^2 [R(jw)\hat{M}_u(jw)] \delta_f(w) \right\}^{1/2} \quad (4.3.81)$

- Un poco diferente al trabajo de Emani-Naeini, los efectos de la incertidumbres del modelo sobre $G_f(s)$ han sido tomadas en cuenta (En el selector de Umbral solo se considera error de modelado, acotado, constante y muy pequeño, para el

modelo de la planta). Además Ding y Guo no tienen restricciones especiales sobre el tipo de fallas.

Considerando la cota del error de modelado $\delta_d(w)$, y utilizando el concepto de la Norma Euclidiana, el Umbral puede ser expresado como:

$$J_{th} = \max_{w \in \phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\} \epsilon^{-1/2} \quad (4.3.82)$$

Por consiguiente la Norma de la Falla Mínima Detectable, nos queda usando (4.3.80) y (4.3.82)

$$\|f_{min}\|_{\epsilon} = 2 \max_{w \in \phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\} / K(\phi) \quad (4.3.83)$$

donde $K(\phi)$ es dada por (4.3.81), la cual puede ser reescrita [5] Pag. 1724 como:

$$K(\phi) = \min_{w \in \phi} \underline{\sigma} \left\{ R(jw) \hat{M}_u(jw) \bar{G}_f(jw) \right\} \quad (4.3.84)$$

A continuación analizaremos la expresión (4.3.83):

$\|f_{min}\|_{\epsilon}$ llega a ser mas pequeño por aumentar el

$$\min_{w \in \phi} \underline{\sigma} \left\{ R(jw) \hat{M}_u(jw) \bar{G}_f(jw) \right\}$$

$\|f_{min}\|_{\epsilon}$ llega a ser mas pequeño por disminuir el $\max_{w \in \phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\}$

$\max_w \bar{\sigma} \{$ y $\min_w \underline{\sigma} \{$ podemos interpretarlos como:

- $\max_w \bar{\sigma} \{$ es realmente la Norma H_{∞} de una función de transferencia, que mide el mayor incremento en energía, que pueda ocurrir entre la entrada y la salida del sistema.
- Por lo contrario, $\min_w \underline{\sigma} \{$ describe el incremento mas pequeño en energía, que pueda ocurrir entre la entrada y la salida del sistema.

De .4.3.71, se observa claramente que :

$R(s) \hat{M}_u(s) G_d(jw) \rightarrow$ es la función de transferencia para la entrada desconocida (incertidumbre) $d(s)$.

$R(s)\hat{M}_u(s)\bar{G}_f(s) \rightarrow$ es la función de transferencia para la entrada desconocida (falla) $f(s)$,

con respecto al Residual $r(s)$.

♦ Esto implica que : $\max_{w \in \Phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\}$ mide el peor efecto de la entrada desconocida $d(s)$ sobre el Residual. Recordemos que :

$$\|d(jw)\|_2 \leq \|\delta_d(w)\|$$

♦ Además $\min_{w \in \Phi} \sigma \left\{ R(jw) \hat{M}_u(jw) \bar{G}_f(jw) \right\}$ describe el efecto mas pequeño posible, de la falla $f(s)$.

Así se puede concluir que el Tamaño Mínimo de la Falla Detectable es proporcional al peor efecto hecho por el error de modelado, e inversamente proporcional al efecto mas pequeño posible, de la falla sobre el Residual.

MINIMIZACION DE LA FALLA MINIMA DETECTABLE.

La Minimización de la Falla Mínima Detectable, es equivalente a resolver el siguiente problema de optimización: usando (4.3.83) y (4.3.81)

$$\inf_{R(s), \Phi} \|f_{min}\|_{\epsilon} = \inf_{R(s), \Phi} \frac{2 \max_{w \in \Phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\}}{\min_{w \in \Phi} \left\{ \sigma^2 [\cdot] - \bar{\sigma}^2 [\cdot] \delta_f^2(w) \right\}^{1/2}} \quad (4.3.85)$$

Este problema puede ser formulado como:

$$\sup_{R(s), \Phi} \frac{\min_{w \in \Phi} \left\{ \sigma^2 [\cdot] - \bar{\sigma}^2 [\cdot] \delta_f^2(w) \right\}^{1/2}}{2 \max_{w \in \Phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\}} \quad (4.3.86)$$

La solución a este problema de optimización, esta ampliamente desarrollado en [5], pag. 1725; acá nos limitaremos a exponer alguna observaciones importantes.

La solución propone dos casos: El Primero cuando se tiene un rango de Frecuencia definido, y el Segundo cuando este rango puede ser seleccionado arbitrariamente.

Acá solo discutiremos el primer caso dejando al lector interesado referirse a [5] para el segundo caso.

CASO 1 EL RANGO DE FRECUENCIA ES DADO:

El valor óptimo de la Mínima Falla Detectable es obtenido en función de un valor de frecuencia w_0 .

$$\inf_{R(s)} \|f_{min}\|_{\epsilon} = 2 \max_{w \in \Phi} \left[\delta_d(w) \left(\sigma^2 [G_{f1}(jw)] - \delta^2(w) \right)^{-1/2} \right]_{w \rightarrow w_0} \quad (4.3.87)$$

donde:

$\delta_d(w)$ cota de la variación de la incertidumbre del modelo

$G_{f1}(jw)$ matriz con características o propiedades de "distinguir" la falla de las incertidumbres.

$\delta(w)$: cota de la función de transferencia $P(jw)$.

$P(jw)$: Función de Transferencia obtenida de la manipulación algebraica. Ver [5] Pag. 1725, para más detalles.

El tamaño de la Falla Mínima Detectable es mínima para w_0

OBSERVACIONES

- ◆ La ecuación (4.3.87) condiciona a la Matriz de Parametrización $R(s)$, a comportarse como un Filtro Pasabanda centrado en w_0 ([5] Pag. 1726).
- ◆ En [5], el significado físico de la función de transferencia $G_{f1}(s)$ es presentado como una matriz de *-separación o distinguibilidad-* entre $G_d(s)$ y $G_f(s)$, que define la diferencia entre la falla y los disturbios. Se puede lograr una satisfactoria Detección de Falla, si la propiedad de diferenciación de $G_{f1}(s)$ es alta.

4.3.2.4 COMENTARIOS ADICIONALES.

En la sección 4.3.2.2, la ecuación (4.3.75) da una expresión general para el Umbral. Esta expresión fue derivada, basado en el modelo de sistema (4.3.63) y se mantiene para toda matriz de parametrización $R(s)$.

Si $R(s)$ es elegido, en el sentido óptimo, de acuerdo a (4.3.87) (Para obtener la mínima falla Detectable) puede comprobarse un resultado sorprendente: *-Que El Umbral Es Una Constante Igual a ϵ^2 -*; uno podría esperar algo diferente, por ejemplo que el Umbral J_{th} cambie con la señal de entrada.

Por ejemplo: si una entrada es de 50 voltios, esperamos un Umbral relativo a esto (± 1 voltio); pero si la entrada es de 1000 voltios usualmente esperamos un Umbral mayor (± 10 voltios).

La demostración de esto, para el lector interesado están en [5] pag. 1726. La idea principal es que la información de la señal de entrada esta incluida en $\delta_d(w)$, parámetro que es considerado desde el inicio del diseño del Generador de Residual.

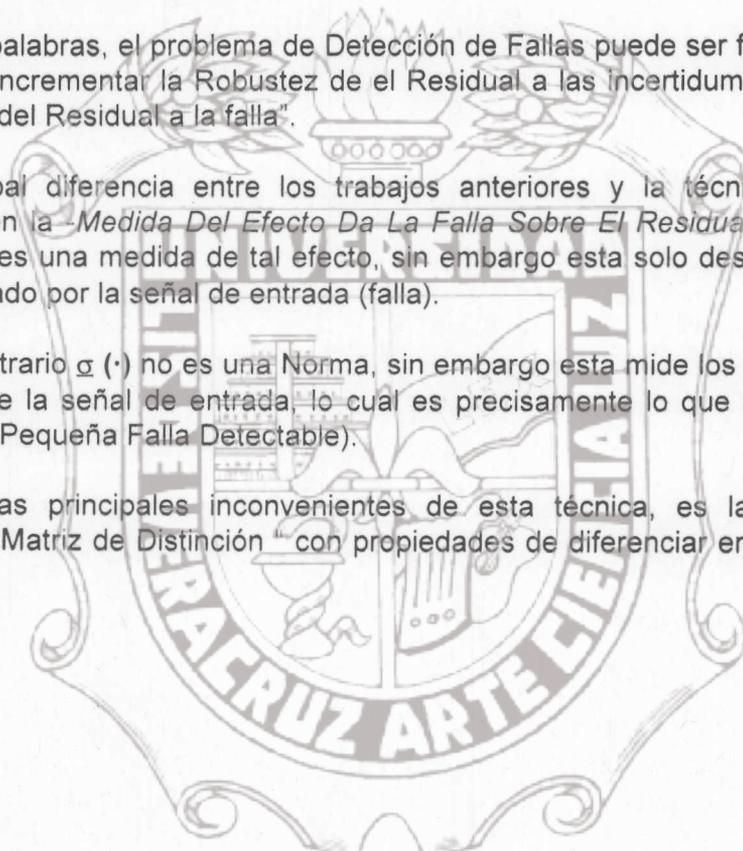
La minimización de la falla Detectable, es lograda por Minimizar el Peor Efecto que pueda ocurrir por Incertidumbres del Modelo y al mismo tiempo por -Incrementar El Efecto Mas Pequeño De Falla Sobre El Residual-.

En otras palabras, el problema de Detección de Fallas puede ser formulado "como un problema de incrementar la Robustez de el Residual a las Incertidumbres del modelo y, la sensibilidad del Residual a la falla".

La principal diferencia entre los trabajos anteriores y la técnica actualmente analizada, esta en la *-Medida Del Efecto Da La Falla Sobre El Residual-*. Seguramente una Norma $-H_\infty$ es una medida de tal efecto, sin embargo esta solo describe el máximo incremento causado por la señal de entrada (falla).

Por lo contrario $\sigma(\cdot)$ no es una Norma, sin embargo esta mide los posibles efectos mas pequeños de la señal de entrada, lo cual es precisamente lo que necesitamos (El Efecto de la más Pequeña Falla Detectable).

Una de las principales inconvenientes de esta técnica, es la necesidad de determinar una " Matriz de Distinción " con propiedades de diferenciar entre la falla y los disturbios.



4.3.3 UMBRAL DINAMICO PARA DETECCION DE FALLA, EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Un enfoque en el Dominio del Tiempo que toma en cuenta las incertidumbres del modelado. Procesa las mediciones obtenidas de datos en Tiempo real, para determinar si el sistema opera o no dentro de un rango establecido. Es aplicable a sistemas de lazo abierto y cerrado, y su implementación numérica no es complicada.

4.3.3.1 INTRODUCCION

Un algoritmo de detección de falla puede ser dividido en dos pasos. Primero, se debe determinar si una discrepancia existe en cualquiera de las señales del sistema con el valor esperado por el modelo. Segundo, si una discrepancia existe, entonces debe determinarse si esta información es verdaderamente indicativo de una falla en el sistema o es simplemente el resultado del ruido o incertidumbre del modelado.

Como la habíamos expresado en las secciones anteriores, el concepto de Normas, es ampliamente usado en el análisis de Umbrales dinámicos:

$$\text{La Norma-2 de un vector } \mathbf{u}(t), \in \mathbb{R}^n \text{ es: } \|\mathbf{u}\|_2 = \left(\int_0^{\infty} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \right)^{1/2} \quad (4.3.88)$$

Esta Norma puede ser interpretada como la "energía" en la señal $\mathbf{u}(t)$. Para una función $\mathbf{u}(t)$ comprendida en el intervalo $(0, T)$, definimos la Norma Parcial-2 como:

$$\|\mathbf{u}\|_2^{(0, T)} = \left(\int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \right)^{1/2} \quad (4.3.89)$$

Esta Norma representa la "Energía" en la señal $\mathbf{u}(t)$ sobre el intervalo de Tiempo $(0, T)$. Para enfatizar la más reciente información de la señal, definimos una Norma Parcial-2 Ponderada:

$$\|\mathbf{u}\|_{2\beta}^{(0, T)} = \left(\int_0^T e^{\beta(t-T)} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \right)^{1/2} \quad (4.3.90)$$

En esta "Norma ponderada" todos los valores pasados de \mathbf{u} son "pesados" por un factor el cual decae exponencialmente en el Tiempo. Esto evita la necesidad de acumular valores pasados de la señal, para considerar solo el efecto de la nueva información.

La tasa de decaimiento es controlada por la selección de la constante β

Con respecto a las incertidumbres, un enfoque popular para diseñar controladores robustos, es el construir incertidumbre dentro del modelo de la planta. En tales casos la planta no es representada por un simple modelo nominal de planta $P_o(s)$, en cambio se

permite considerar cualquier elemento en una familia de modelos de planta. Una típica familia de modelos de planta es dada por:

$$P = \{I + \Delta W(s)\} P_0(s) : \|\Delta\|_\infty \leq \delta_{max} \quad (4.3.91)$$

donde:

$P_0(s)$: es el modelo nominal de la planta

$\Delta(s)$: representa una perturbación desconocida, lineal, invariante en el Tiempo, estable, racional pero con Norma acotada por δ_{max}

$W(s)$: es una función de peso en el dominio de la frecuencia, la cual -
Caracteriza La Relativa Magnitud De Las Incertidumbres Del Modelado- en el rango de frecuencia.

Típicamente $W(s)$ toma valores grandes a altas frecuencias, reflejando la incapacidad de precisión del modelo a estas frecuencias.

El límite δ_{max} sobre $\Delta(s)$ es la Norma -2 inducida, la cual representa el máximo total de la incertidumbre del modelado asociado con P .

4.3.3.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Considérese el sistema general mostrado en la fig. 4.14

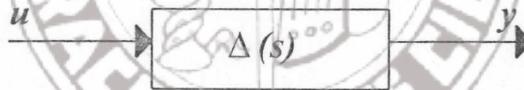


FIG. 4.16 UN SISTEMA GENERAL ENTRADA / SALIDA

La señal de entrada y salida están relacionadas por la función de transferencia $\Delta(s)$:

$$Y(s) = \Delta(s) U(s) \quad (4.3.92)$$

Supóngase que la magnitud de la respuesta de frecuencia de $\Delta(s)$ tiene un -
Acotamiento Ponderado-. En otras palabras, supóngase que existe una función real no-negativa $\delta(\omega)$ tal que:

$$\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq \delta(\omega) \quad (\text{Para todas las frecuencias}) \quad (4.3.93)$$

Aún más, supóngase que $\delta(\omega)$ es tal que existe una función $W(s)$ racional, de fase mínima y estable, en donde:

$$|W(j\omega)| = \delta(\omega) \quad (4.3.94)$$

El sistema de la fig. 4.14 puede ser reconfigurado como la fig. 4.15, con $\Delta = \hat{\Delta} W$, donde se considera $\|\hat{\Delta}\|_{\infty} \leq 1$.

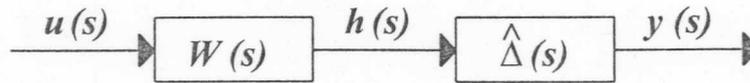


FIG. 4.15 UNA RECONFIGURACION DEL SISTEMA GENERAL

puede demostrarse* bajo la condición que $\|\hat{\Delta}\| < 1$ que:

$$\|y(t)\|_2^{2(0,t)} \leq \|h(t)\|_2^{2(0,t)} \quad (4.3.95)$$

Esta desigualdad puede ser interpretada como sigue: para cualquier Tiempo t , la energía de la salida de $\hat{\Delta}$ en el intervalo $(0,t)$ es más pequeña que la energía de la entrada de $\hat{\Delta}$ en este mismo intervalo de Tiempo.

En algoritmos de detección de falla para Tiempo real, es deseable descontinuar la información pasada.

Por medio de un procedimiento similar [4] pag. 1717 usando la Norma parcial ponderada, se muestra que:

$$\|y(\tau)\|_{2\beta}^{2(0,t)} \leq \|h(\tau)\|_{2\beta}^{2(0,t)} \quad (4.3.96)$$

Para cualquier Tiempo t arbitrario.

Lo anterior es válido, cuando $\hat{\Delta}(s)$ cumple la condición, que sea lineal, invariante en el Tiempo, racional, estable, y además con ningún polo en $R_e(s) \geq -\beta$

-Esto nos ubica al lado izquierdo del polo $-\beta + 0j$, lo cual significa (en el caso que $-\beta + 0j$ fuera polo dominante) que la dinámica es más rápida- ; o bien el efecto de $-\beta$ permanece más Tiempo en la dinámica total del sistema.

Lo cual nos indica, que el efecto de $e^{\beta(t-T)}$ persiste la mayor parte del Tiempo, y por consiguiente la información pasada estará siendo "desvalorizada".

Para realizar los cálculos de la Ecuación (4.3.96), se utiliza la siguiente definición : usando (4.3.91)

$$H(t) = \|h(\tau)\|_{2\beta}^{2(0,t)} = \int_0^t e^{\beta(\tau-t)} h(\tau)^T h(\tau) d\tau \quad (4.3.97)$$

* Sustentado en [4] pag. 1717

$H(t)$ es una función de t y su derivada es dada por:

$$\frac{dH}{dt}(t) = -\beta H(t) + h^T(t) h(t) \quad (4.3.98)$$

Ahora $H(t)$ puede ser recursivamente actualizada por integración numérica de la ecuación (4.3.98).

Este calculo requiere solamente la más reciente medición de $h(t)$, el mas reciente calculo del valor de $H(t)$, y la constante β .

Este enfoque reduce los requerimientos de memoria, por que elimina la necesidad de almacenar todos los valores pasados de las mediciones, desde el Tiempo cero hasta el presente.

4.3.3.3 RESULTADOS PRINCIPALES

Khargonekar y Ting proponen en [4] pag. 1718, el siguiente algoritmo para Detección de Falla.

ALGORITMO DE DETECCION DE FALLA.

Describimos el algoritmo inicialmente en el contexto de un típico sistema de lazo abierto como se muestra en la figura 4.16.

Este sistema contiene una planta P , con la característica de considerar incertidumbre de modelado según (4.3.91).

Por simplicidad, se selecciona una función de peso $W(s)$, tal que δ_{max} es Normalizado a uno .

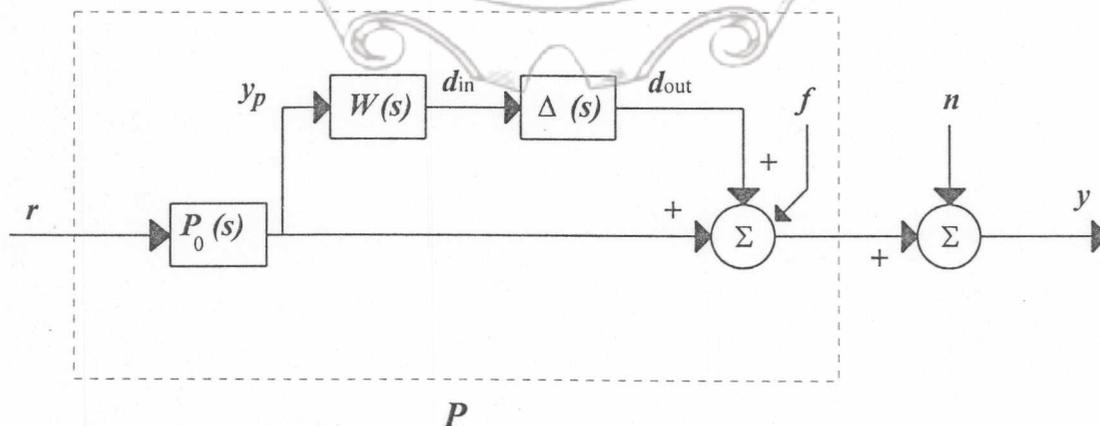


FIG. 4.16 TIPOICO SISTEMA DE LAZO ABIERTO

Además de las incertidumbres del modelo, se considera como señal de entrada una falla aditiva. Esta señal es cero bajo condiciones de operación de la planta Normales, y diferente de cero cuando la planta esta operando en una situación de falla .

Cada posible falla de la planta es asociada con una diferente señal f . Por ejemplo, si un sistema esta sujeto a tres diferentes tipos de falla, entonces pueden considerarse tres diferentes señales de falla f_1, f_2, f_3 .

Las características de $f_1, f_2, y f_3$ son consideradas como una replica del impacto de fallas posibles a ocurrir en una planta .

Se asume que el operador de la planta tiene completo conocimiento de todas las posibles señales de falla, pero no conoce cual falla, y obviamente tampoco el Tiempo de la ocurrencia de la misma.

La señal de salida (para medición) de la planta contiene ruido aditivo n . Aunque los valores individuales de n son desconocidos, se asume que ciertas propiedades de n son conocidas.

En esta técnica, se considera que n no esta descrito por medio de una distribución de probabilidad, pero en cambio puede estar condicionado por restricciones determinísticas, tales como Normas-2 y Normas - ∞ .

"La idea central de este algoritmo de detección de falla es el usar las mediciones de las señales disponibles, para reconstruir analíticamente las señales de entrada y salidas del bloque de incertidumbre Δ ".

Este conjunto de señales es entonces examinado usando la condición de la ecuación (4.3.96) para determinar si cumplen o no con las consideraciones previas, acerca del tamaño de Δ .

Si se define a δ_{max} normalizado a 1, el Algoritmo de Detección básicamente verifica si la señal de salida d_{out} de Δ tiene más o menos energía que la señal de entrada d_{in} .

Se puede comprobar, ver [4] pag. 1718 para detalles, que si $\|\Delta^*\| \leq 1$, bajo cualquier condición de operación de la planta, entonces:

En condiciones Normales (Sin-Falla)

$$d_{out} < d_{in} ; \text{ por lo cual } d_{out} \text{ tiene menos energía que } d_{in} .$$

Por lo contrario, en presencia de una perturbación real

$$d_{out} > d_{in}$$

De la figura 4.16 , $d_{in} = WP_0 r$.

Esta señal es construible, por que la señal de referencia r , la función de transferencia $W(s)$ y $P_0(s)$ son todas conocidas.

Construir d_{out} es ligeramente mas complicado :

La salida y es dada por:

$$y = P_0 r + \Delta W P_0 r + f + n \quad (4.3.99)$$

definiendo $d_{out} = \Delta W P_0 r$:

en ausencia de falla y ruido :

$$d_{out} \cong y - P_0 r \quad (4.3.100)$$

de (4.3.99), desarrollando y aplicando la propiedad de desigualdad del triángulo:

$$\|y - P_0 r\| - \|W P_0 r\| \leq \|f\| + \|n\| \quad (4.3.101)$$

Asumiendo que el ruido es cero, entonces usando la desigualdad (4.3.101) se puede considerar que no hay falla, si se mantiene lo siguiente:

$$\|y - P_0 r\|_{2\beta}^{2(0,t)} - \|W P_0 r\|_{2\beta}^{2(0,t)} \leq 0 \quad (4.3.102)$$

Y en una situación real, con presencia de ruido:

$$\|y - P_0 r\|_{2\beta}^{2(0,t)} - \|W P_0 r\|_{2\beta}^{2(0,t)} \leq J_{th} \quad (4.3.103)$$

Si esta desigualdad se mantiene, implica además que d_{in} tiene más energía que d_{out} (ver análisis anterior) en el intervalo de Tiempo $(0, t)$. Este resultado es consistente con un bloque de incertidumbre Δ de Norma menor o igual que uno; con lo cual el algoritmo de detección de falla deduce que no hay falla en este momento.

Al contrario si esta desigualdad no se mantiene, por razonamiento análogo este resultado seria inconsistente con las consideraciones de modelado y el algoritmo concluye que esta presente una falla .

-IMPLEMENTAR EL ALGORITMO-

Operacionalmente este algoritmo es implementado en tres pasos:

- Primero; cualquier señal r es colocada a la entrada del sistema real y la salida y resultante es registrada.
- Segundo; conociéndose r , P_0 y W , estas son usadas para analíticamente calcular $P_0 r$ y $W P_0 r$.

- Tercero; las dos Normas en la ecuación (4.3.103) son obtenidas en una forma recursiva , por medio de la ecuación de integración numérica (4.3.98)

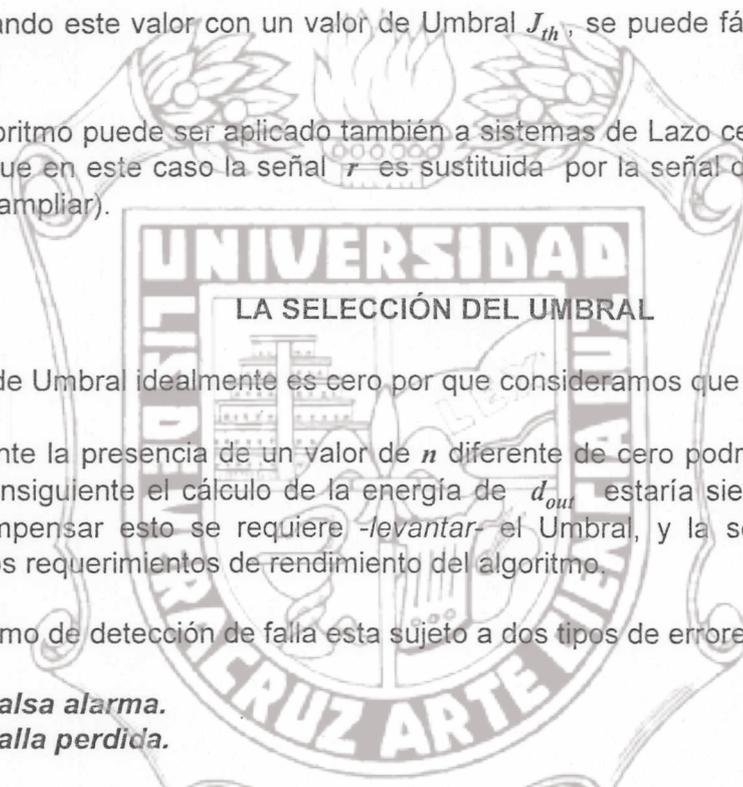
Un conveniente método para checar la desigualdad en (4.3.103), es el de presentar la diferencia

$$\|y - P_0 r\|_{2\beta}^{2(0,t)} - \|WP_0 r\|_{2\beta}^{2(0,t)} \quad (4.3.104)$$

en una forma gráfica, como una función del Tiempo.

Comparando este valor con un valor de Umbral J_{th} , se puede fácilmente determinar si hay o no falla.

Este algoritmo puede ser aplicado también a sistemas de Lazo cerrado en una forma idéntica ; solo que en este caso la señal r es sustituida por la señal de control u (ver [4] pag. 1718 para ampliar).



El valor de Umbral idealmente es cero por que consideramos que el ruido (n) es cero.

Claramente la presencia de un valor de n diferente de cero podría alterar la energía en y , y por consiguiente el cálculo de la energía de d_{out} estaría siendo afectada por el ruido. Para compensar esto se requiere *-levantar-* el Umbral, y la selección del mismo dependerá de los requerimientos de rendimiento del algoritmo.

El algoritmo de detección de falla esta sujeto a dos tipos de errores :

- **Falsa alarma.**
- **Falla perdida.**

y la probabilidad de ocurrencia de estos errores estará muy relacionado al valor de Umbral .Por consiguiente existirá un compromiso inherente entre la probabilidad de Falsas alarmas $p(FA)$ y la probabilidad de falla perdida $p(FP)$.

Dependiendo de las condiciones de operación, si no es "verdaderamente critico" la ocurrencia de $p(FP)$, no se desea un Umbral J_{th} "tan bajo" porque de lo contrario, estaríamos continuamente parando el sistema en respuesta a las falsas alarmas.

Los trabajos de P. Khargonekar y T. Ting [4], pag. 1719, nos proponen un valor de Umbral máximo en presencia de ruido que nos garantiza no haber Falsas Alarmas.

Por otro lado ante la posibilidad de detecciones perdidas, es forzoso que el Umbral sea negativo, ver ecuación (4.3.102), lo cual seria el caso ideal cuando $n=0$.

El valor de Umbral debe, por tanto estar situado entre:

$$0 < J_{th} < J_{th\ max}$$

donde
$$J_{th,max} = 2\|n\|_{2\beta} \|d_{in}\|_{2\beta} + \|n\|_{2\beta}^2 \quad (4.3.105)$$

Para un valor arbitrario de Umbral J_{th} , el tamaño mínimo de la falla que puede ser detectada es:

$$\|f_{min}\|_{2\beta} = \|n\|_{2\beta} + \|d_{out}\|_{2\beta} + \sqrt{J_{th} + \|d_{in}\|_{2\beta}^2} \quad (4.3.106)$$

De estas ecuaciones es claro observar que hay tres factores que influyen en la detectabilidad del algoritmo:

- 1° Los niveles de energía de las señales d_{in} y d_{out} ;
- 2° los niveles de energía de f y n ,
- 3° El valor de Umbral J_{th} seleccionado.

¿Por que influye f , si es un sistema de lazo abierto?

R: Aunque es un sistema de lazo abierto, d_{in} y d_{out} son reconstruidas a partir de las mediciones de $r(t)$ y de $y(t)$; $y(t)$ lleva la información de f .

Una interpretación intuitiva de la ecuación (4.3.106) se presenta:

Supóngase que $\|d_{in}\|$ y $\|d_{out}\|$ son cero en estado estable, además f y n tienen el mismo nivel de energía y el valor de Umbral $J_{th} \neq 0$, entonces:

$$\|f_{min}\|_{2\beta} = \|n\|_{2\beta} + \sqrt{J_{th}} \quad (4.3.107)$$

Podemos imaginar (aunque no es probable) que n podría enmascarar a la falla f :

- ya sea cancelando, entonces $n = -f$
- o bien, haciendo que $n + f$ tenga menos energía que J_{th} .

Por tanto para garantizar que una falla sea detectada debe satisfacerse que:

$$\|f\|_{2\beta} \geq \|f_{min}\|_{2\beta}$$

Para que sea detectada f , su energía deberá vencer la barrera de energía de $n + J_{th}$.

Por el contrario, la posibilidad que una falla f pueda ser detectada disminuye, con el incremento de la energía del Umbral J_{th} y el ruido n .

Las gráficas 4.17, 4.18 y 4.19 nos permiten apreciar el comportamiento del algoritmo de detección de falla* , para los casos de no falla, falla grande y falla pequeña.

En el primer caso (fig. 4.17) cuando no hay falla presente, d_{in} (línea sólida) y d_{out} (Línea punteada) son mostradas en la fig.(a) mientras que E_{in} (línea sólida) y E_{out} (Línea punteada) son presentadas en la fig. (b)

Obsérvese que d_{in} alcanza su valor de estado estable en cero , igual E_{in} decae a cero. Esto es explicado por el factor de decaimiento exponencial en el calculo recursivo de $H(t)$.

En la fig. (c) se presenta la diferencia de energía ($E_{out} - E_{in}$) (línea sólida) y el Umbral (línea punteada). En este caso particular la diferencia de energía es siempre abajo que J_{th} , de tal forma que el algoritmo concluye que no hay falla.

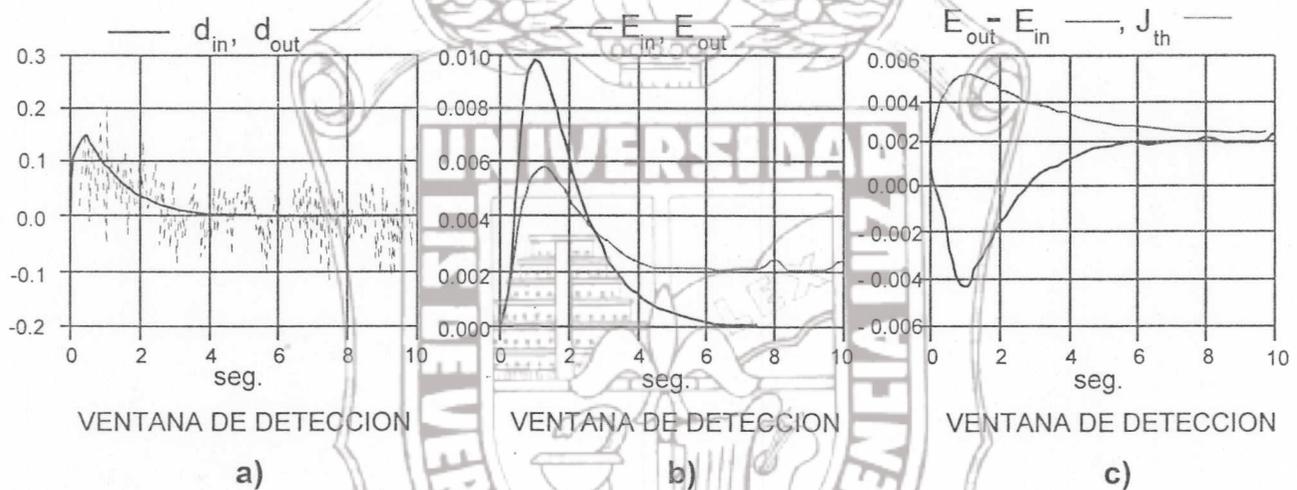


FIG. 4.17 SIMULACION PARA LAZO ABIERTO, SIN FALLA

* Esta gráficas son resultados de mediciones y pruebas experimentales, en una planta, realizada por P. Khargonekar y L. Ting para verificar la funcionalidad de este algoritmo. Se considera un nivel de ruido (energía) ≤ 0.05 ; ver [4] para más detalles.

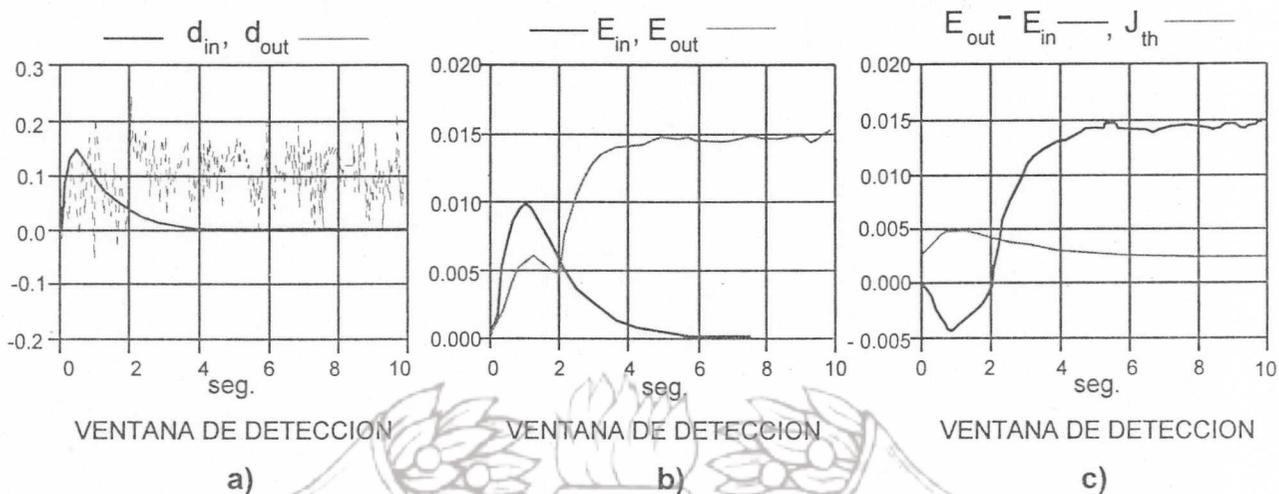


FIG. 4.18 SIMULACION PARA LAZO ABIERTO, CON FALLA GRANDE

En el segundo caso, fig. 4.18, se presenta una falla "grande", correspondiente a un paso de escalón de 0.11 ocurriendo en $t = 2$ seg. Nótese que la presencia de la falla es claramente evidente en d_{out} y E_{out} para Tiempos mayores que dos segundos. En este caso la diferencia de energía (c) excede J_{th} , casi inmediatamente después que la falla ha ocurrido (alrededor de 2.35 seg.).

De esta forma el algoritmo de detección de falla, en una forma muy rápida y acertadamente concluye que "hay falla".

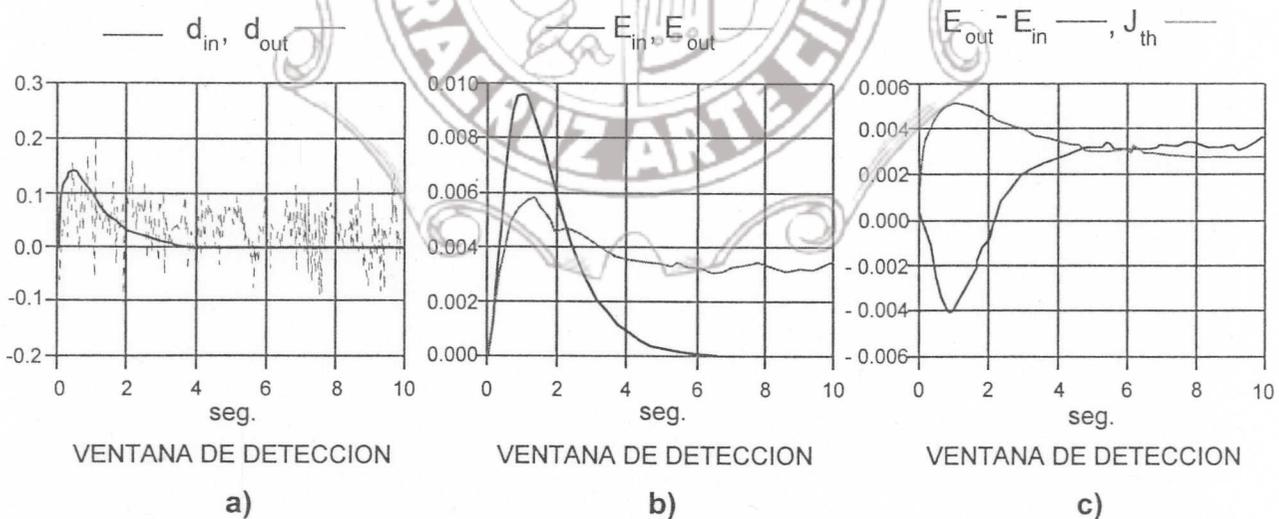


FIG. 4.19 SIMULACION PARA LAZO ABIERTO, CON FALLA PEQUEÑA

En el tercer caso la fig. 4.19 se presenta una falla "Pequeña" correspondiente a un paso de escalón de 0.03, ocurriendo en $t = 2$ seg. En este caso las desviaciones de d_{out} y E_{out} no son tan pronunciadas como en el caso de falla "grande".

Aun mas, aparentemente no hay falla. (b), sin embargo la diferencia de energía indica la existencia de la misma.

En (c) se observa que el algoritmo tarda alrededor de tres segundos después que la falla ha ocurrido, para que la diferencia de energía exceda al Umbral J_{th} .

De esta forma el algoritmo identifica correctamente la presencia de una "pequeña falla" pero no tan rápidamente, como cuando identifica una "falla grande".

4.3.3.4 COMENTARIOS ADICIONALES.

Con el factor de ponderación exponencial en el cálculo de las Energías de las señales, se da mas "peso" a los valores actuales, disminuye el riesgo de Fallas Pérdidas, y disminuye los requerimientos de memoria .

Una ventaja de este algoritmo es que hace uso de la misma incertidumbre del modelo para la detección de la falla.

Este algoritmo cuenta con procesamiento real en el dominio del Tiempo, de datos medibles que serán usados para reconstruir analíticamente las señales "claves" que caracterizan la incertidumbre. Estas señales son comparadas y nos permiten evaluar si hay o no falla en el sistema.

Hay ciertos aspectos que este algoritmo carece y que necesitan ser investigados :

- 1.Estrategias de selección para Umbrales óptimos para reducir el compromiso entre la $p(FA)$ y la $p(FP)$.
- 2.Detectar y diferenciar una falla de un conjunto de posibles fallas.

4.4 FILTROS DETECTORES DE FALLA: ASIGNACION DE EIGENESTRUCTURA

4.4.1 INTRODUCCION.

Los filtros de Detección de falla (FDF) son diseñados de tal forma, que la salida del vector Residual tenga "características direccionales" que puedan fácilmente ser asociadas con un conjunto de fallas.

Cada vector de falla es asociado con un Espacio de Detección, representado por un conjunto de Eigenectores. Esta propiedad garantiza una dirección-fija en la salida del Residual, y permite un procedimiento directo para aislamiento de cada falla.

El Espacio de Detección es el Espacio formado por Eigenectores, los cuales estan relacionados con los probables tipos de fallas que pueden ocurrir en la planta; y la asignación de Eigenestructura es el procedimiento de asignación de uno o dos Eigenectores a cada falla.

En esta sección presentamos un algoritmo que permite la construcción de un Espacio de Detección de dos-dimensiones, por una Asignación de Eigenestructura en forma directa.

4.4.2 FORMULACION DEL PROBLEMA.

Vamos a presentar una formulación matemática para el diseño de Filtros de Detección de Falla (FDF).

4.4.2.1 MODELO MATEMATICO

Consideremos un sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f_i g(t) \quad (4.4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.4.2)$$

donde $x \in R^n$ es el vector Estado, $u \in R^p$ en el vector control, $y \in R^m$ es una medida del vector de salida, y A, B, C , son matrices reales de dimensiones compatibles. Por simplicidad, y sin perdida de generalidad, se omitirá de acá en adelante el argumento (t) .

Se asume que el par $[A, C]$ es observable, y que las fallas pueden ser modeladas como un termino aditivo, expresado en la ecuación (4.4.1); donde $f_i \in R^n$ es definido "como un vector evento de una falla", y $g(t)$ es una función escalar la cual representa la evolución de la falla.

Considerando el sistema (4.4.1) - (4.4.2), un filtro de Detección toma la forma :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + D(y - \hat{y}) \quad (4.4.3)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (4.4.4)$$

obsérvese que en esencia es un "Observador de Estado", esto se aprecia mejor en la fig. 4.20

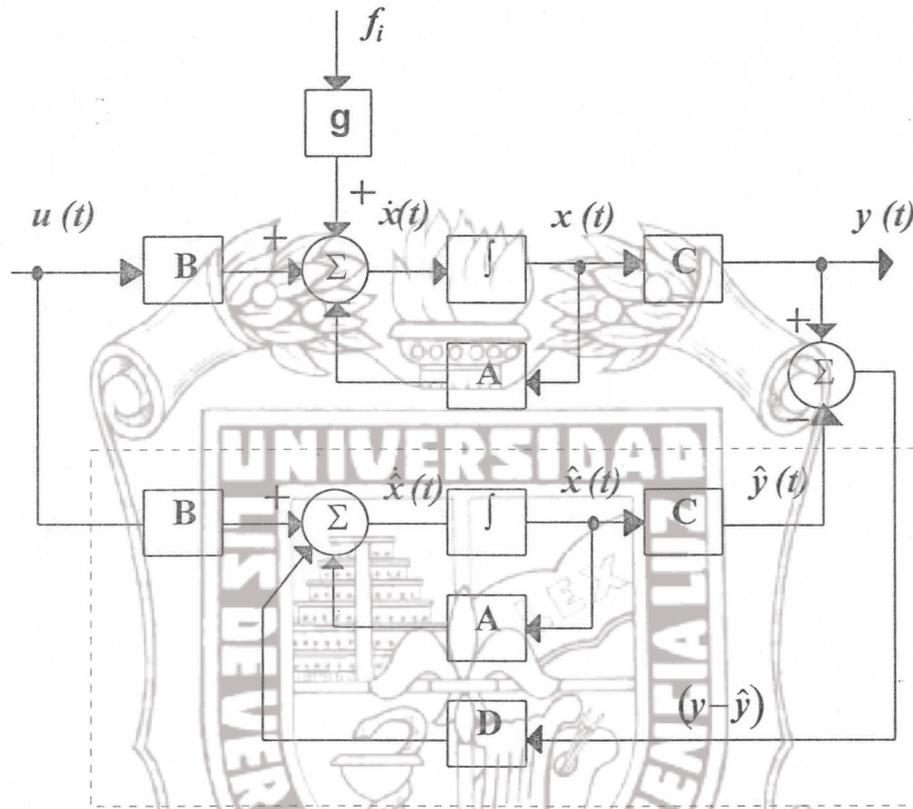


FIG. 4.20 MODELO DEL SISTEMA Y EL FILTRO DE DETECCION

\hat{x} , \hat{y} son el Estimado de los Estados y la salida respectivamente; u es la entrada al Sistema y al Observador, y D es la matriz de Ganancia De Detección.

Si el error Residual $e \in R^n$ es definido como $e = x - \hat{x}$, entonces un modelo matemático de lazo cerrado, para el error, con la inclusión del vector evento f_i , es dado por:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = [Ax + Bu + f_i g] - [A\hat{x} + Bu + D(y - \hat{y})] \\ \dot{e} &= (A - DC)e + f_i g \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

y la salida del Error Residual.

$$q = Ce \quad (4.4.6)$$

La fig. 4.21 nos muestra el diagrama en bloque del Generador de Residual. El Generador comprende tanto la dinámica del error e y la salida del Error Residual q

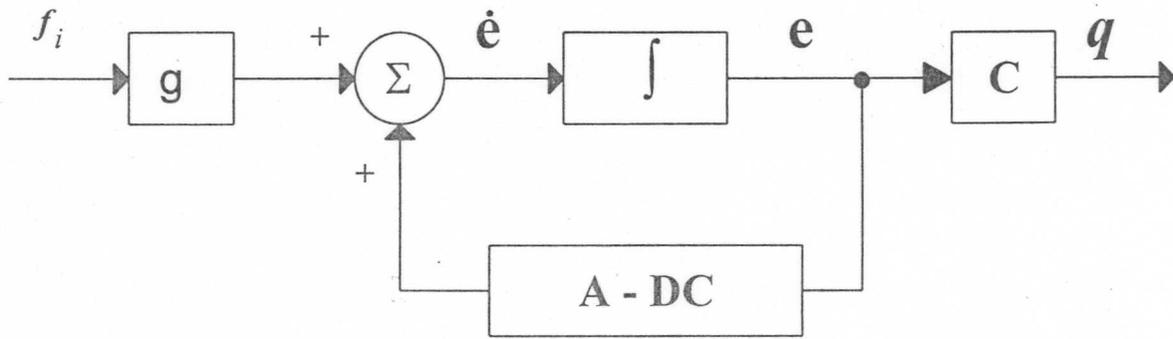


fig. 4.21 GENERADOR DE RESIDUAL q

El Problema del Diseño FDF se sitúa en elegir una apropiada Matriz de Ganancia D , de tal forma que la dinámica del sistema $A - DC$, condicione la Salida del Residual en una dirección única para una determinada Falla.

Para realizarlo necesitamos de algunos conceptos Geométricos y Matemáticos.

4.4.2.2 DEFINICIONES Y LEMAS.

De los trabajos de J. Park y G. Rizzoni [1], y J. White y Speger [8], tenemos las siguientes definiciones y lemas en relación al diseño de Filtros Detectores y Asignación de Eigenestructuras.

DEFINICIÓN 4.4.1

La falla asociada con f_i en el sistema descrito en (4.4.1) es Detectable, si existe una matriz D tal que :

- 1) $q = C e$ mantiene una dirección fija en el Espacio de salida.
- 2) todos los Eigenvalores de $(A - DC)$ pueden ser arbitrariamente especificados, excepto para la restricción de una simetría conjugada.

La idea clave de esta definición, se centra en los conceptos de controlabilidad y Observabilidad; aun mas la parte (2) de la definición anterior es satisfecha si y solo si, $[A, C]$ es observable. Ver [1] Pag. 1521.

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Recordemos que un vector x_i es llamado un Eigenvector de la matriz A , si

$$\lambda_i x_i = A x_i \quad (4.4.7)$$

o bien, si x_i es un vector propio asociado con un Eigenvalor de A , entonces tiene que cumplirse:

$$(\lambda_i I - A)x_i = 0 \tag{4.4.8}$$

y la solución además del caso trivial $x_i = 0$, es cuando la matriz $\phi = \lambda_i I - A$ es una matriz singular.

Con lo cual, se necesita que $|\lambda_i I - A| = 0$

Para cada Eigenvalor λ_i , puede encontrarse un Eigenvector x_i , que satisface (4.4.8).

Si los Eigenvalores son distintos, entonces se pueden encontrar n Eigenvectores.

$$\lambda_1 x_1 = Ax_1, \lambda_2 x_2 = Ax_2, \dots, \lambda_n x_n = Ax_n \tag{4.4.9}$$

Lo anterior puede ser interpretado, como "*Las Direcciones De Los Eigenvectores, Pero No Sus Longitudes*" -

- CONCEPTO DE DETECTABILIDAD DE UNA DIRECCION DE FALLA -

Se requiere que para una arbitraria ubicación de los polos del filtro, las ganancias estén determinadas tal que, una dirección de Falla induzca una única medida de la dirección del Residual. Para asegurar que las direcciones de falla son detectables, ciertas consideraciones son impuestas al sistema: Se obliga a un grupo de Eigenvectores que produzcan direcciones en la salida del Residual idénticas a aquellas producidas por las direcciones de las Fallas.

El numero de Eigenvectores asociados con cada dirección del Residual, es determinado por el cálculo de la dimensión (ℓ_i) del Espacio de Detección asociado.

Cada dirección de falla tiene un Espacio de Detección Asociado, y con una dimensión no necesariamente igual a otros Espacios de Detección.

Si la suma de las dimensiones de todos los Espacios de Detección, es igual a la dimensión del Espacio-Estado (esta propiedad es referida como una Mutua Detectabilidad), entonces los Eigenvalores del filtro pueden ser arbitrariamente asignados, y mediante un algoritmo simple, se puede determinar la Ganancia de Detección y los Eigenvectores de lazo cerrado.

El vector evento falla, f_i es asignado a un Eigenvector de $(A - DC)$, y puede por tanto satisfacer la ecuación:

$$(A - DC)f_i = \lambda_i f_i \tag{4.4.10}$$

donde λ_i es un Eigenvalor asignado arbitrariamente.

Para encontrar una solución para D , el siguiente lema, sustentado en [1] pag. 1522, es necesario:

Lema 1: Si D , S y Q son matrices de dimensión $n \times m$, $m \times r$ y $n \times r$ respectivamente, donde $n \geq m \geq r$ y el rango $(S) = r$, entonces la solución general de $DS = Q$, es dada por:

$$D = QS^+ + E[I - SS^+] \quad (4.4.11.a)$$

donde:

E : es una matriz arbitraria $n \times n$

S^+ : Por definición es igual a $(S^T S)^{-1} S^T$ (La Seudoinversa de Moore-Penrose)

$E[I - SS^+]$: Representa una matriz de "exceso o de complemento" una vez que D haya satisfecho: $DS = Q$.

Aplicando el Lema 1 a la ecuación (4.4.10), con $n \geq m \geq 1$, una solución para D es obtenida como:

$$D = (A f_i - \lambda_i f_i)(C f_i)^+ + E[I - (C f_i)(C f_i)^+] \quad (4.4.11.b)$$

Ahora, con la Matriz D de arriba la Matriz de Estado del Sistema de Error Residual $(A - DC)$ será:

$$A - DC = A - (A f_i - \lambda_i f_i)(C f_i)^+ C - E[I - (C f_i)(C f_i)^+] C \quad (4.4.12)$$

$$= A_i - D_i C - E C_i \quad (4.4.13)$$

$$= A_i - E C_i \quad (4.4.14)$$

donde
$$D_i = (A f_i - \lambda_i f_i)(C f_i)^+ \quad (4.4.15)$$

$$C_i = [I - (C f_i)(C f_i)^+] C \quad (4.4.16)$$

$$A_i = A - D_i C \quad (4.4.17)$$

Analícemos lo planteado arriba:

La matriz D_i es una matriz de ganancia, (compárese con $A - DC$) que asigna el Eigenvector f_i a $A - D_i C = A_i$.

La matriz C_i representa el resto libre, después que se asignaron los Eigenvectores, con una matriz arbitraria $E \in R^{n \times m}$.

La ecuación (4.4.14) nos presenta una nueva presentación de la Matriz de Lazo Cerrado $A - DC$; permite determinar cuantos Eigenvalores pueden ser arbitrariamente especificados por la elección de E , y el número de Eigenvectores asociados con la salida q

Lema 2: Si A_i, C_i y E son matrices reales de dimensión $n \times m, m \times n$ y $n \times m$, respectivamente; el numero de Eigenvalores de $(A_i - E C_i)$ que pueden ser arbitrariamente especificados por la elección libre de E , es igual a $v_i = \text{rango}(M_i)$, donde:

$$M_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.4.18)$$

- Recordemos que el rango (M_i) son el numero de columnas o filas linealmente independientes de M_i .

El resto de los Eigenvalores $(l_i = n - v_i)$ de $(A_i - E C_i)$ es igual a los Eigenvalores correspondientes de A_i los cuales también son aquellos Eigenvalores de $(A - D C)$ asociados con f_i .

Por tanto el Espacio Nulo de M_i es el Espacio de Detección de f_i ; y la Dimensión del Espacio de Detección de f_i es definido como el Orden de Detección de f_i , y es $l_i = n - v_i$.

Una consecuencia de lo anterior es que el Número de Eigenvalores y sus correspondientes Eigenvectores (direcciones de las fallas) que pueden ser asignados al Vector Residual de Salida, está restringido por el Espacio de Detección Total.

La prueba de este lema, se desarrolla en [8] pag. 595.

Los Eigenvalores correspondientes al Espacio de Detección, se le denomina No-Observables, precisamente porque forman el Espacio Nulo del Espacio de Observabilidad (A_i, C_i) .

-COMENTARIOS SOBRE LAS DEFINICIONES ANTERIORES-

De esta forma se selecciona los Eigenvalores λ_i , los cuales están asociados con los Eigenvectores f_i ; lo anterior nos permite, para el caso de *Eigenvalores diferentes tener una dirección única para cada falla*. (Ver fig. 4.22)

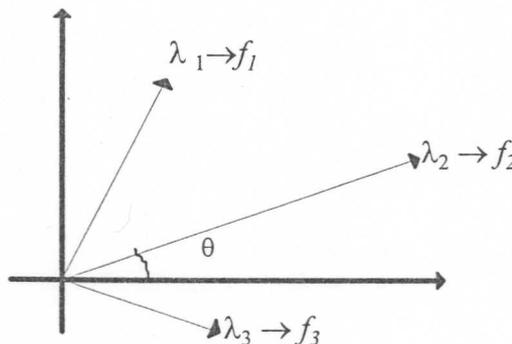


FIGURA 4.22 LA ASIGNACION DEL VECTOR EVENTO FALLA f_i A CADA EIGENVALOR

Para el caso de Eigenvalores iguales se puede presentar la situación en que dos fallas tengan la misma dirección, sin embargo con el conocimiento de las magnitudes de las fallas, esto puede ser útil para *distinguir diferentes fallas con la misma dirección de salida.*(ver fig. 4.23)

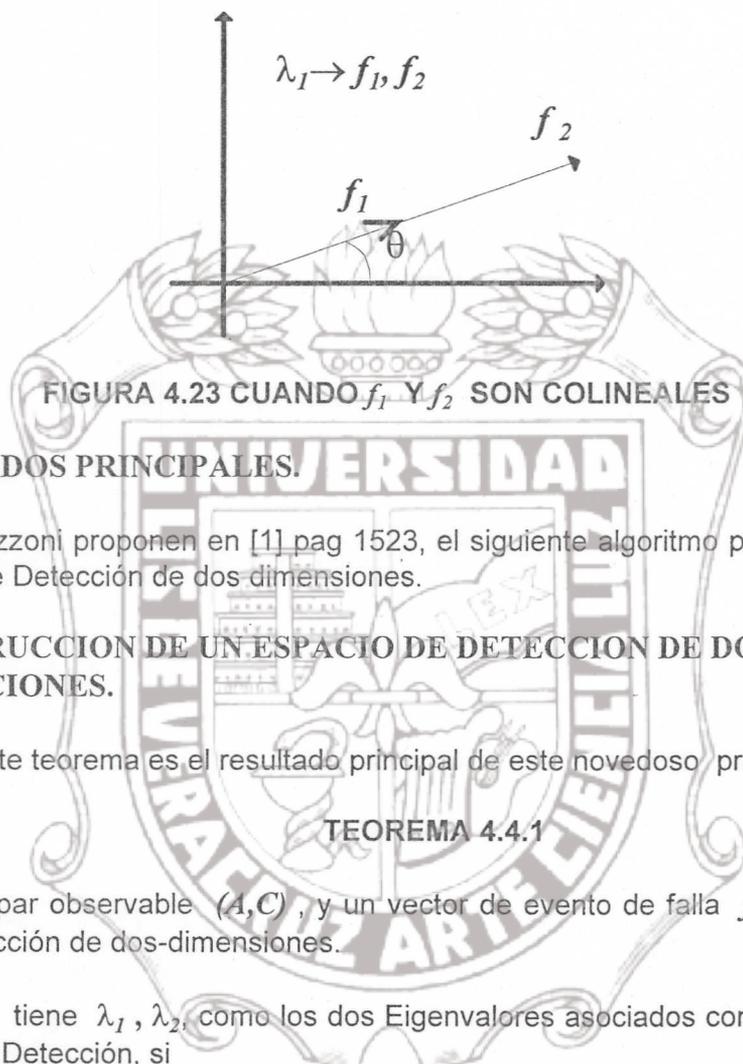


FIGURA 4.23 CUANDO f_1 Y f_2 SON COLINEALES

4.4.3 RESULTADOS PRINCIPALES.

Park y Rizzoni proponen en [1] pag 1523, el siguiente algoritmo para la construcción de un Espacio de Detección de dos dimensiones.

4.4.3.1 CONSTRUCCION DE UN ESPACIO DE DETECCION DE DOS DIMENSIONES.

El siguiente teorema es el resultado principal de este novedoso procedimiento ;

TEOREMA 4.4.1

Dado un par observable (A,C) , y un vector de evento de falla f_i , el cual tiene un Espacio de Detección de dos-dimensiones.

$(A - DC)$ tiene λ_1, λ_2 , como los dos Eigenvalores asociados con los Eigenvectores en el Espacio de Detección, si

$$D = (A w - \lambda_1 w)(Cw)^+ + E[I - (Cf_i)(Cf_i)^+] \quad (4.4.19)$$

donde E es una matriz real, arbitraria de $n \times m$, y w es un Eigenvector de:

$$[A - (A f_i - \lambda_2 f_i)(Cf_i)^+ C] \quad (4.4.20)$$

tal que $C w$ es colineal con $C f_i$, pero w no es colineal con f_i y $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

La prueba de este teorema, para el lector interesado se desarrolla en [1] pag.1523.

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

OBSERVACIONES

Según el teorema 4.4.1, el Espacio de Detección es construido por asignar directamente un Eigenvalor y el apropiado Eigenvector; aún más se da una expresión relativamente simple, para determinar la Matriz de Ganancia y Detección.

Recordemos que esta Matriz de Ganancia determina los Eigenvalores de Asignación, para los Eigenvectores de las direcciones de la Falla.

$w \rightarrow$ es un Eigenvector de $A - DC$.

λ_1, λ_2 son Eigenvalores de $A - DC$.

En base al teorema 4.4.1, el vector evento falla f_i puede representarse como la combinación lineal de dos Eigenvectores, asociados con dos Eigenvalores distintos de $(A - DC)$. (Ver. fig. 4.24)

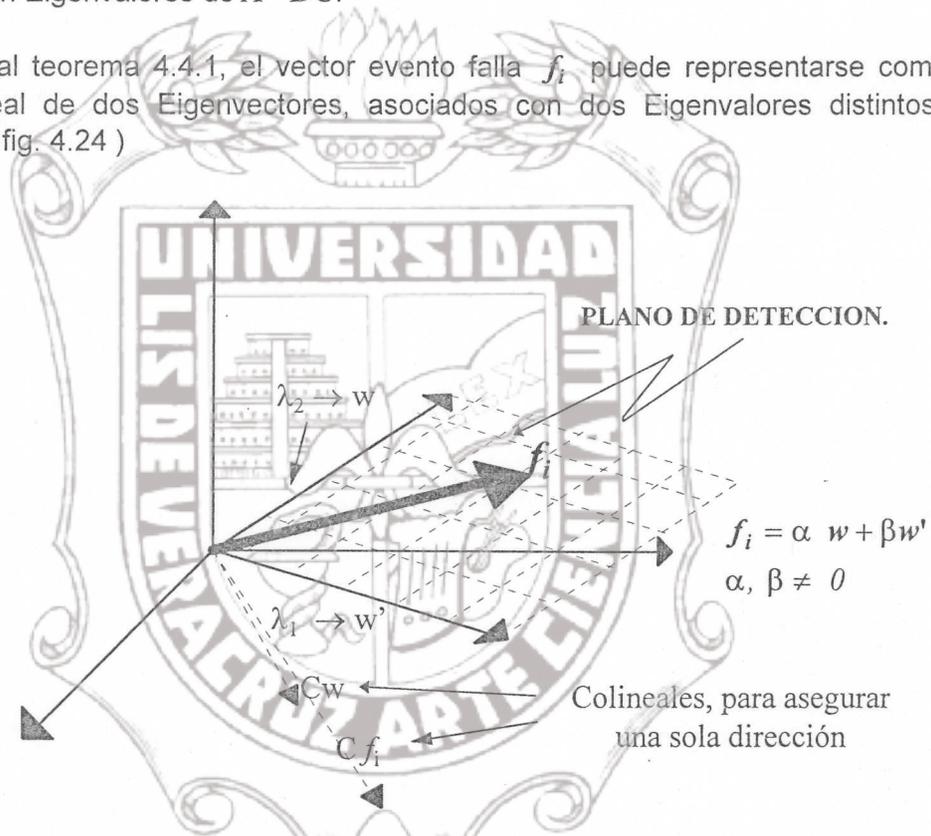


FIG. 4.24 VECTOR FALLA CON UN ESPACIO DE DETECCIÓN DE DOS DIMENSIONES

ALGORITMO Y EJEMPLO

El algoritmo es aplicado para la construcción de Espacios de Detección de dos-dimensiones. Un índice k es usado para expresar la naturaleza iterativa del proceso.

Se utiliza un ejemplo numérico estandar de R.V. Beard* donde la matriz A del sistema, la Matriz de Salida C y dos vectores de evento de fallas f_1, f_2 son dadas como:

* R.V. Beard, "Failure Accommodation in Linear Systems Through Self Reorganization", Rep MVT-71-1, Man-Vehicle Lab, MIT, Cambridge, MA, 1971.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

PROCEDIMIENTO

Paso 1.- Determinar el rango de los Espacios de Observabilidad (M_i), para cada falla f_i

Paso 2.- Determinar el rango del Espacio de Detección asociado a cada vector evento de falla (f_i).

$$l_i = n - \text{rango}(M_i)$$

El Orden de Detección: l_i , representa el numero de Eigenvalores No-Observables, y determina el numero de Eigenvalores asociados a cada falla f_i

Paso 3.- Si la suma de los Orden de Detección $\sum_{i=1} l_i$ es igual al orden del sistema: n

Entonces es Mutuamente Detectable, y pueden elegirse Eigenvalores arbitrarios para cada f_i

Paso 4.- Determinar los Eigenvectores asociados a los Eigenvalores No-Observables y obtener la Matriz de Ganancia D , por medio de un procedimiento iterativo.

REALIZACION:

PASO 1 .- Se requiere inicialmente formar las matrices de observabilidad (A_i, C_i) (4.4.18), a partir de (4.4.16) y (4.4.17)

NOTA: En este paso, se considera nulos los λ_i de la matriz A_i .

Los λ_i están comprendidos en el Espacio de Detección o sea en el Espacio Nulo del Espacio de Observabilidad, y por tanto no tienen ninguna incidencia en la matriz M_i . de Observabilidad.

Dos vectores de eventos de falla $\Rightarrow i = 2$
orden del sistema : $n = 3$.

Se obtienen las siguientes Matrices de Observabilidad.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(M_1) = 1$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 3.5 & 2.5 \\ 3.5 & 22.75 & 15.75 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(M_2) = 2$$

PASO 2.- El Orden de Detección asociado a cada vector evento de Falla .

para $f_1 \Rightarrow l_1 = n - \text{rango}(M_1) = 3 - 1 = 2$.

para $f_2 \Rightarrow l_2 = n - \text{rango}(M_2) = 3 - 2 = 1$.

Por tanto, el Espacio de Detección para f_1 . lo formaran 2 Eigenvectores a partir de 2 Eigenvalores asignados arbitrariamente; y el Espacio de Detección para f_2 . lo forma 1 Eigenvector a partir de 1 Eigenvalor asignado arbitrariamente.

PASO 3.- $\sum l_i = n ? = (2 + 1) = 3$

Es Mutuamente Observable, y si es posible una asignación arbitraria de Eigenvalores distintos. Otros casos posibles que se pueden presentar:

- 1) $\sum l_i < n$
- 2) Eigenvalores elegidos sean iguales.

Se requiere para estos casos aplicar un procedimiento adicional a este algoritmo; la idea básica es ampliar los Espacios de Detección lo suficiente, para lograr Mutua Detectabilidad. Ver interesante desarrollo de estos casos en [8] pag. 597-599.

Asignamos arbitrariamente los siguientes Eigenvalores:

Para: f_1 .	Para: f_2 .
$\lambda_{f_1,1} = -3$	$\lambda_{f_2,1} = -4$
$\lambda_{f_1,2} = -2$	

PASO 4.- Determinamos los Eigenvectores y Matrices de Ganancia para cada Espacio de Detección. Usando el teorema 4.4.1 para $k = 1$, lo cual corresponde al vector evento falla f_1 , y tiene un Espacio de Detección de dos dimensiones,

- 1) **Determinar el Eigenvector w asociado con el Eigenvalor λ_2 a partir de (4.4.20)**

$$[A_{k-1} - (A_{k-1}f_k - \lambda_{f_k} f_k)(C_{k-1}f_k)^+ C_{k-1}] \tag{4.4.21}$$

con la restricción que $C_{k-1} w$ es colineal con $C_{k-1} f_k$ pero w no es colineal con f_k .

con $k = 1$ y $A_0 = A$, $C_0 = C$, $\lambda_{f_1,2} = -2$

la matriz $[A_0 - (A_0 f_1 - \lambda_{f_1,2} f_1)(C_0 f_1)^+ C_0] = \Phi$

tiene los siguientes Eigenvalores:

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 = -2 \\ \lambda'_2 = 3 \\ \lambda'_3 = 5 \end{pmatrix} \text{ y los correspondientes Eigenvectores } x'_j \text{ (ver. 4.4.7)}$$

tal que : $\Phi x'_j = \lambda'_j x'_j$.

$$\text{son: } x'_1 = \begin{bmatrix} -0.9487 \\ 0.3162 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad x'_2 = \begin{bmatrix} -0.8944 \\ -0.4472 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad x'_3 = \begin{bmatrix} 0.8215 \\ 0.4591 \\ 0.3383 \end{bmatrix}$$

A continuación se define w tomando en cuenta la siguiente restricción :

Probando con cada x'_j , asignando a w cada x'_j , obtener $C_0 w$ y $C_0 f_1$; verificar con cual son colineales y además, que w es linealmente independiente con f_1 .

El Eigenvector que lo cumple es x'_2 , entonces $w = x'_2$.

2) Obtenemos la matriz de ganancia D_k , usando (4.4.19)

$$D_k = (A_{k-1} w - \lambda_{f_{k-1}} w)(C_{k-1} w)^+ + D_{k+1} [I - (C_{k-1} f_k)(C_{k-1} f_k)^+] \quad (4.4.22)$$

Obsérvese que la matriz de complemento E , desconocida, es sustituida por D_{k+1} . la cual es también desconocida.

Para el calculo de D_k , ahora utilizamos el otro Eigenvalor asociado al Espacio de Detección de f_1 . Esta matriz D_k tiene dos partes: Una, asociada con el Espacio de Detección de f_k , la otra con el correspondiente Espacio de Complemento*.

D_1 : representa la matriz de ganancia para el vector evento f_1

D_2 : asignada al vector evento f_2

$$D_1 = (A_0 w - \lambda_{f_1} w)(C_0 w)^+ + D_2 [I - (C_0 f_1)(C_0 f_1)^+]$$

haciendo sustitución, nos queda:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + D_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.23)$$

* Este Espacio de Complemento, está definido como el Espacio Nulo del Espacio de Detección [1] pag. 1524

3) Repetir el proceso con k incrementado en 1, ($k=2$).

Entonces corresponde al vector evento falla f_2 y este tiene un Espacio de Detección de una dimensión.

No es necesario realizar el procedimiento 1) del paso 4, ya que es demostrable que $w = f_k$ (es una asignación directa), satisface las restricciones del teorema 1 para el caso de una dimensión. (ver [1] pag.1524 para detalles).

Combinando (4.4.15) en (4.4.17), además (4.4.16) y procediendo a plantearlo en forma iterativa, nos queda:

$$A_k = A_{k-1} - D_k C_{k-1} \tag{4.4.24}$$

$$C_k = [I - (C_{k-1} f_k)(C_{k-1} f_k)^+] C_{k-1} \tag{4.4.25}$$

Ahora, el Espacio de Detección de una-dimensión para f_2 es construido por el procedimiento (2) del paso (4). Ecuación (4.4.22)

$$D_2 = [A_1 f_2 - \lambda_{f_2,1} f_2] (C_1 f_2)^+ + D_3 [I - (C_1 f_2)(C_1 f_2)^+]$$

Haciendo sustituciones, nos queda:

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + D_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.26}$$

4) Obtenemos la matriz de ganancia D .

Como D debe contener al Espacio de Detección de Mayor dimensión (D_1), entonces $D = D_1$

Esta ganancia de Detección para f_1 y f_2 , se encuentra sustituyendo (4.4.26) en (4.4.23), obteniéndose:

$$D = D_1 = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 7 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

4.4.4 COMENTARIOS ADICIONALES.

- La matriz D , debe de cumplir la definición (4.4.1) condición (2), o sea que los Eigenvalores de $A - DC$ deben ser los Eigenvalores elegidos arbitrariamente para formar los Espacios de Detección.

para f_1 y f_2 , verifiquemos:

$$|\lambda I - (A - DC)| = 0$$

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0$$

entonces:
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -4 \end{bmatrix}$$

los cuales corresponden a los asignados arbitrariamente.

El Residual de salida es: $q = Ce = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix}$

$$q_1 = e_{11}$$

$$q_2 = e_{13}$$

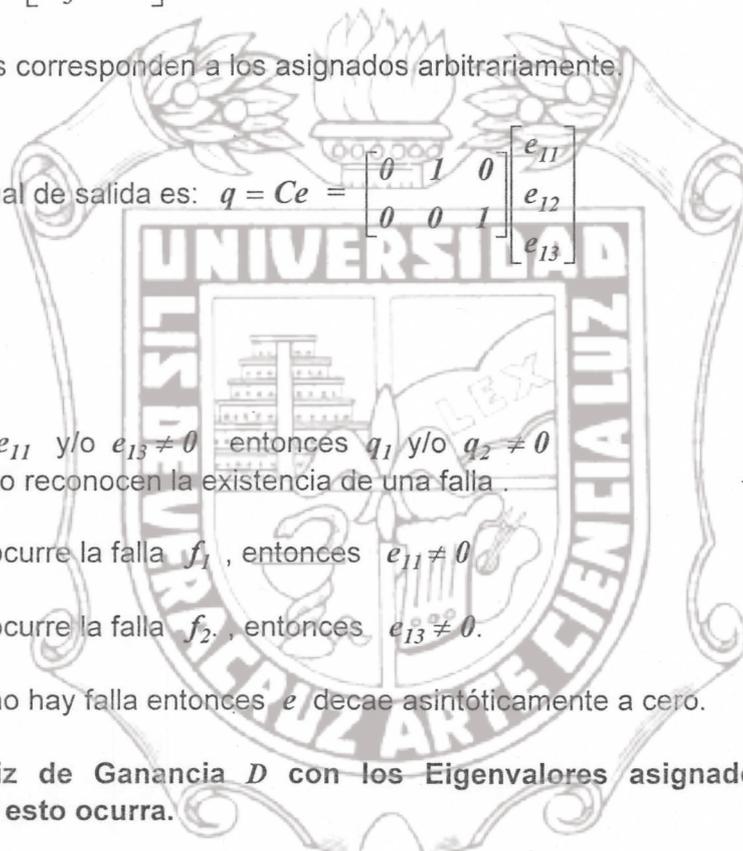
Cuando e_{11} y/o $e_{13} \neq 0$ entonces q_1 y/o $q_2 \neq 0$ y por tanto reconocen la existencia de una falla.

Cuando ocurre la falla f_1 , entonces $e_{11} \neq 0$.

Cuando ocurre la falla f_2 , entonces $e_{13} \neq 0$.

Cuando no hay falla entonces e decae asintóticamente a cero.

La matriz de Ganancia D con los Eigenvalores asignados anteriormente, condiciona que esto ocurra.



4.5 RESUMEN DE LAS TECNICAS GEOMETRICAS Y COMPARACIONES CON EL ENFOQUE ESTADISTICO

Se presenta en la sección 4.5.1 un resumen de las ideas principales de los algoritmos presentados en las secciones anteriores. La tabla 4.2 nos ayuda a englobar las ecuaciones matemáticas en que se fundamentan.

La sección 4.5.2 presenta comparaciones cualitativas entre estos dos enfoques.

4.5.1 SUMARIO DE LAS TECNICAS DE DETECCION DE FALLAS EN EL ENFOQUE GEOMETRICO

El termino 'GEOMETRICO' se deriva de los conceptos de Espacios Ortogonales o Espacios Nulos, los cuales contienen los Eigenvalores No-observables; Además se utilizan conceptos geométricos como :Espacios Invariantes , subespacios, etc

Un Generador de Residual básicamente esta formado por mediciones redundantes ,de puntos estratégicos de un proceso o sistema. Estas mediciones pueden ser procesadas analíticamente, mediante dos técnicas principales.

- La primera, con el concepto de Umbrales Dinámicos y que comprenden los algoritmos presentados en la sección 4.3.
- Y la segunda, con el concepto de Observadores para Filtros Detectores de Falla (FDF) presentados en la sección 4.4.

IDEAS PRINCIPALES DE LOS UMBRALES DINAMICOS

EL SELECTOR DE UMBRAL, tiene su Generador de Residual "enmascarado" por un filtro dinámico, el cual es un Observador de Estado.

Una inecuación denominada Selector de Umbral, permite definir un Umbral Mínimo y una Falla Mínima asociada a este umbral; todo en función de una Ventana de Detección arbitraria.

La dinámica del filtro juega un papel muy importante en las propiedades de sensibilidad a la falla y robusticidad a las variaciones del ruido e incertidumbres: El compromiso de aumentar la dinámica del filtro exige hacerse mas sensible al ruido y a los errores del modelado; aun mas, los requerimientos en la anchura de la ventana de detección son inversamente proporcional a la rapidez del filtro.

Por tanto una inadecuada sintonización de los parámetros del filtro, produce un mal rendimiento de este algoritmo.

UMBRAL DINAMICO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA, intenta relacionar al Generador de Residual, la Función de Evaluación del Residual y el Tamaño Mínimo de la Falla Detectable, además obtener una condición optima en el dominio de la frecuencia .

Para medir los efectos de la falla en los residuales, los conceptos de normas H_2 y H_∞ son útiles pero limitados; el uso de *-Valores Singulares-* en este algoritmo permite medir los efectos más pequeños de una falla detectable, y por consiguiente obtener un umbral óptimo.

Algo importante de este algoritmo es que no asume conocer la estructura y la dinámica de los vectores ruido e incertidumbre, solo asume su cota superior.

El Generador de Residual es una Factorización Estable del modelo de la planta, con una apropiada matriz de parametrización $R(s)$ (muy acorde con la técnica de Redundancia Analítica y Chequeo de Paridad.)

Una desventaja de este algoritmo, es que se requiere determinar una "Matriz de Distinción" con propiedades de diferenciar entre la falla y los disturbios.

UMBRAL DINAMICO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO, se fundamenta en dos ideas principales: La primera, es usar las mediciones de las señales disponibles para reconstruir analíticamente las señales de entrada y salida del bloque de incertidumbre; y la segunda, el concepto de energía relacionado con la norma, permite definir la existencia de una falla si hay desbalance de energía, aun más, al manejar el concepto de norma parcial ponderada da más valor a los datos recientes, disminuye el riesgo de falla no-detectada y disminuye los requerimientos de memoria.

Proporciona además una falla mínima detectable en función del ruido y el umbral :-
Para Que Sea Detectada Una Falla f , Su Energía Deberá Vencer La Barrera De Energía De $n + J_{th}$ -

El Generador de Residual, en este caso, estaría "representado" por las señales d_{out} y d_{in} , reconstruidas analíticamente, y que contienen la información de la existencia o no de una falla. La desventaja principal de este algoritmo, es que su rendimiento (tiempo de detección) disminuye con el tamaño de la falla, y el umbral que presenta no es óptimo, para disminuir el compromiso entre $p(FA)$ y $p(FP)$.

FILTROS DETECTORES DE FALLAS, son en esencia Observadores de Estado, cuya matriz de ganancia condiciona que el residual de salida presente diferentes salidas para diferentes fallas (Propiedad Direccional).

-Asignando una Eingenestructura - al Observador, se diseña para que se generen Espacios de Detección para diferentes vectores de falla. Estos Espacios de detección son formados por los Eingenectores, y estos a la vez son generados por los Eingenvalores de la dinámica del error.

Los conceptos de Espacios Nulos y Eingenvalores No-Observables son muy útiles en este enfoque.

El procedimiento de diseño es fácil cuando los Eingenvalores asignados son diferentes, complicándose cuando los Eingenvalores son iguales.

Aun cuando dos fallas pudieran tener la misma dirección, existe la posibilidad de identificación (si no ocurren simultáneamente) si tienen diferentes magnitud.

De lo anterior, un procedimiento para aumentar la capacidad de detección en un espacio de detección restringido, es la asignación múltiple de fallas en una sola dirección con la restricción de tener magnitudes diferentes.

Una de las principales desventajas de esta técnica, es que se requiere un observador de orden completo. La tabla 4.2 nos presenta un resumen de las ecuaciones más importantes en que se fundamentan cada algoritmo.

TABLA 4.2.a
RESUMEN DE LAS ECUACIONES PRINCIPALES DE CADA ALGORITMO
GEOMETRICO
UMBRALES DINAMICOS

I.- EL SELECTOR DE UMBRAL	FUNCION DE EVALUACION
$ f_{min} = 2 J_{th}(\tau) / \beta(\tau)$ $J_{th}(\tau) \equiv (\max_w \bar{\sigma}[L(jw)]) \bar{n} + \delta \bar{\sigma}[(Q_{\tau} L)(\tau)]$ $\beta(\tau) \equiv \underline{\sigma}[(Q_{\tau} L)(\tau - t_F)]$	$\ d_{out}\ _{2\beta}^{2(0,t)} - \ d_{in}\ _{2\beta}^{2(0,t)} \leq J_{th}$ $H(t) = \ h(\tau)\ _{2\beta}^{2(0,t)} = \int_0^t e^{\beta(\tau-t)} h(\tau)^T h(\tau) d\tau$
	EL VALOR DE UMBRAL $0 < J_{th} < J_{th \max}$ $J_{th \max} \equiv 2 \ n\ _{2\beta} \ d_{in}\ _{2\beta} + \ n\ _{2\beta}^2$
II.- UMBRAL DINAMICO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA FACTORIZACION ESTABLE DE LA PLANTA $G_u(s) = \hat{M}_u^{-1}(s) \hat{N}_u(s)$ GENERADOR DE RESIDUAL $r(s) = R(s) [\hat{M}_u(s) Y(s) - \hat{N}_u(s) U(s)]$ LA FUNCION DE EVALUACION DE RESIDUAL $J_f(\phi) = \varepsilon^{-1/2} \ r(jw)\ _{\varepsilon}$ UMBRAL OPTIMO $J_{th} = \max_{w \in \phi} \bar{\sigma} \left\{ \delta_d(w) R(jw) \hat{M}_u(jw) G_d(jw) \right\} \varepsilon^{-1/2}$ FALLA MINIMA DETECTABLE OPTIMA $\inf_{R(s)} \ f_{min}\ _{\varepsilon} = 2 \max_{w \in \phi} \left[\delta_d(w) \left(\sigma^2 [G_{f1}(jw)] - \delta^2(w) \right)^{1/2} \right]$	FALLA MINIMA DETECTABLE $\ f_{min}\ _{2\beta} = \ n\ _{2\beta} + \ d_{out}\ _{2\beta} + \sqrt{J_{th} + \ d_{in}\ _{2\beta}^2}$

III.- UMBRAL DINAMICO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

RECONSTRUCCION ANALITICA

$$d_{in} = WP_0 r$$

$$d_{out} \cong y - P_0 r$$

TABLA 4.2b

FILTROS DETECTORES DE FALLA
<p>INNOVACION</p> $\dot{e} = (A-DC)e + f_i g$
<p>MATRIZ DE GANANCIA</p> $D_k = (A_{k-1} w - \lambda_{f_{k-1}} w)(C_{k-1} w)^+ + D_{k+1} [I - (C_{k-1} f_k)(C_{k-1} f_k)^+]$
<p>w ES UN EIGENVECTOR QUE SATISFACE:</p> $[A_{k-1} - (A_{k-1} f_k - \lambda_{f_k} f_k)(C_{k-1} f_k)^+ C_{k-1}]$
$A_k = A_{k-1} - D_k C_{k-1}$
$C_k = [I - (C_{k-1} f_k)(C_{k-1} f_k)^+] C_{k-1}$

4.5.2 ALGUNAS RELACIONES Y EQUIVALENCIAS ENTRE AMBOS ENFOQUES

Ambos enfoques pueden utilizar observadores. El Estadístico con el uso de filtros Kalman permite manejar Innovaciones que tomen en cuenta la distribución del ruido en el sistema .

El Geométrico con el uso de observadores, principalmente de orden completo, generan Residuales por medio de Observadores de Estados, y permiten el diseño con Filtros Detectores de Fallas

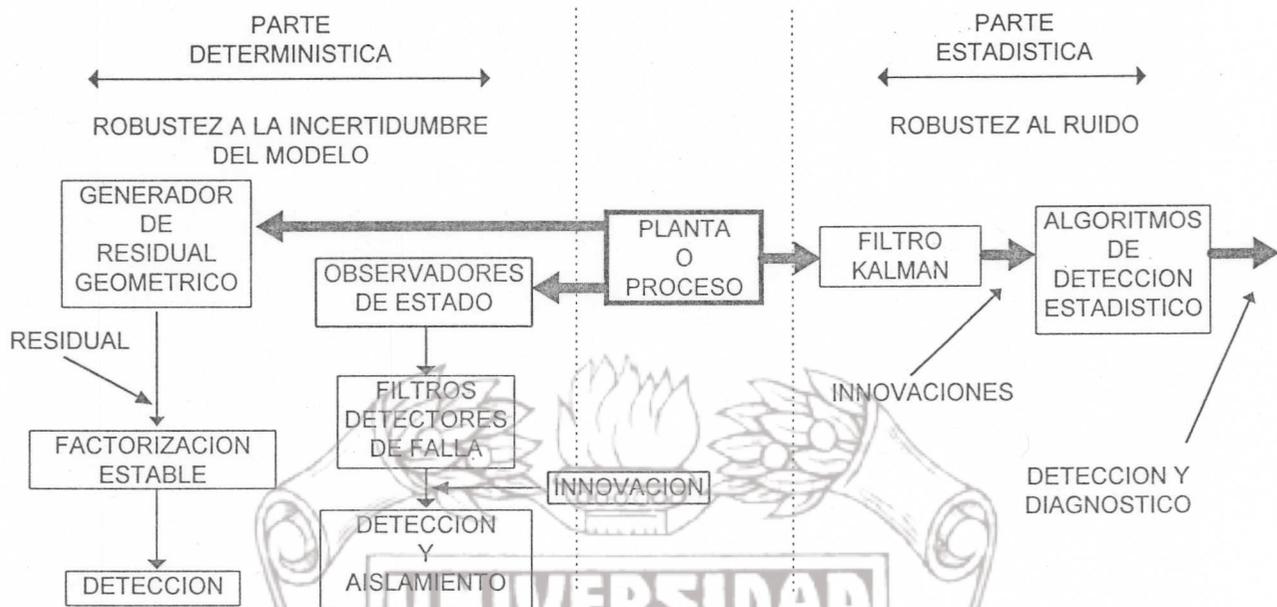


FIG. 4.25 AREA DE APLICACION DE CADA ENFOQUE

El Enfoque Estadístico y Geométrica consideran ambos la presencia de ruido ;sin embargo, el primero presenta modelos de ruido estructurados, dándole una especial preferencia.

Además, siempre en el Enfoque Estadístico, consideraciones Bayesianas son tomadas en cuenta, y esto difícilmente puede ser modelado en una estructura Geométrica.

El Enfoque Geométrico, aunque también considera el ruido, el procedimiento de análisis del mismo es muy limitado, precisamente porque las herramientas principales para el tratamiento del ruido están en el enfoque probabilístico-estadístico; por el contrario el Enfoque Geométrico dispone de recursos para analizar las incertidumbres del modelado, ,precisamente porque, aunque estructuralmente son desconocidas total o parcialmente, tienen un comportamiento determinístico.

Las funciones de decisión de ambos Residuales, si bien no son iguales, ambas utilizan Residuales o Innovaciones ,para comparar con Umbrales ,y decidir si una falla está ocurriendo o está próxima a ocurrir .

Otra característica similar entre estos enfoques, es que las Innovaciones del Filtro Kalman y los Residuales del Espacio Generalizado mediante Factorización Estable ,operan con la misma información contenida en las observaciones. [6] pag. 335.

CAPITULO V

SIMULACION

Para cumplir el Segundo Objetivo de este trabajo de tesis ,se ha escogido tres algoritmos de Detección, con los cuales se realizo Simulación en SIMNON y MATLAB.

Los Algoritmos escogidos son :

- 1.- Umbral Dinámico en el Dominio del Tiempo (Geométrico)
- 2.- Filtrado-Derivativo (Estadístico)
- 3.- El Selector de Umbral (Geométrico)

DEFINICION DEL PROBLEMA

Los Algoritmos Estadísticos y Geométricos ,por su misma estructura matemática están orientados ,los primeros a ambientes ruidosos ,y los segundos al manejo de Incertidumbres en el Modelo.

Sin embargo en ambientes no-extremosos ,y bajo las mismas condiciones de operación(considerando ambos ,ruido e incertidumbre), **¿Cual Detecta mas rápido una falla ?**

FORMULACION DE LA HIPOTESIS

Utilizando el Esquema de Simulación para detectar fallas de la Fig. 4.16

- 1) En presencia de una Falla Grande ,ambos Algoritmos detectan la Falla al mismo tiempo.
- 2) El Algoritmo Geométrico presenta ,sino rapidez, un mejor Rendimiento para el caso de una Falla Pequeña.

Los *Elementos de Comparación* son los algoritmos (1) y (2) mencionados arriba ,y las *Variables de Trabajo* serán el Tiempo de Detección ,el nivel de ruido y la Incertidumbre del Modelo, además serán considerados dos tipos de Fallas, Grande y Pequeña, con respecto al nivel de la señal de referencia .

Las *Condiciones de Operación*, las definimos como un Nivel de Ruido que en su magnitud no alcance valores al 10% de las señales de control y de observación ,similar para su energía espectral. Tambien las Incertidumbres del Modelo no deben presentarse arriba de una frecuencia de 100 rad/seg. y una magnitud de 0 db.

El ultimo algoritmo (Selector de Umbral) lo utilizamos para verificar el comportamiento del Umbral y la Falla Mínima Detectable ,para diferentes velocidades del Estimador ,y en dos diferentes tiempos de ocurrencia de la Falla.

La Simulación No.1 nos permite analizar el Algoritmo Geométrico; La Simulación No.2 el Algoritmo Estadístico, y la comparación entre ambos algoritmos lo comprende la Simulación No.3 . Por ultimo la Simulación No.4 presenta el comportamiento del Selector de Umbral.

5.1 SIMULACION No.1 EN SIMNON

UMBRAL DINAMICO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
(GEOMETRICO)

I.- DIAGRAMA EN BLOQUES

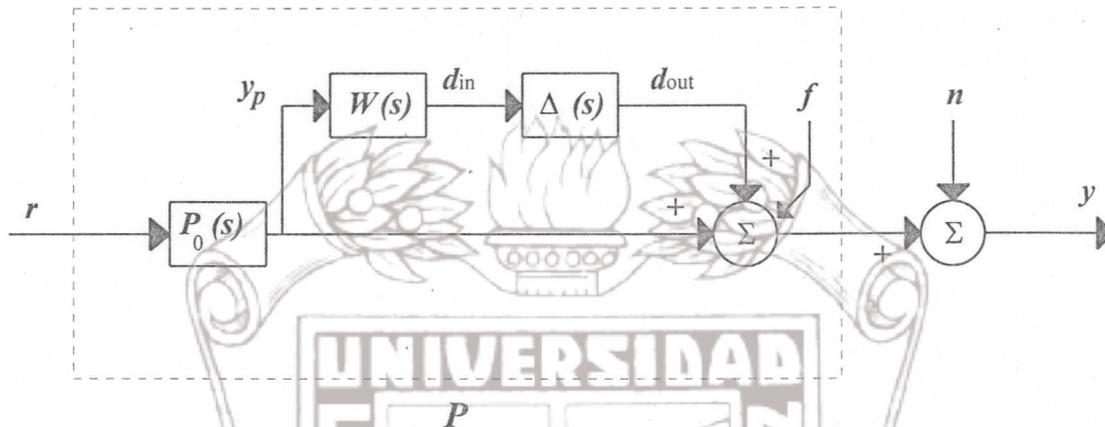


FIG. 5.1 PARA IMPLEMENTAR EL ALGORITMO GEOMETRICO

II.-PROCEDIMIENTO PARA LA SIMULACION

- 1) Plantear en Ecuaciones Diferenciales los bloques del sistema .
- 2) Dado r ,medir y
 - a) sin Falla
 - b) con Falla (Escalón)en $t = 2$ seg.
 - b.1)Falla Grande de 0.11 (100% de r)
 - b.2)Falla Pequeña de 0.003 (aprox. 3% de r)
- 3) Obtener din y $dout$,a partir de r y y

$$din_{exp} = WP_0 r$$

$$dout_{exp} = y - rP_0$$
- 4) Calcular las Energías de din_{exp} y $dout_{exp}$ mediante la Norma Parcial Ponderada

$$Edin = \|din_{exp}\|_{2\beta}$$

$$Edout = \|dout_{exp}\|_{2\beta}$$

- 5) Obtener $Edout - Edin$
- 6) Calcular J_{th} :

$$J_{th} = 0.7\|n\|_{2\beta} \cdot \|din_{exp}\|_{2\beta} + \|n\|_{2\beta}^2$$

- 7) Graficar simultáneamente : J_{th} , $Edout - Edin$ para una ventana de tiempo de 10 seg.

III.- DATOS

Planta : $P_0 = \frac{y_p}{r} = \frac{1}{s+1}$

Señal de referencia : $r = 0.11$ (escalón)

Filtro para el bloque de Incertidumbre : $W = \frac{d_{in}}{y_p} = \frac{s+0.001}{s+5}$

El bloque de Incertidumbre :

$$\Delta(s) = \frac{200}{s^2 + 15s + 400} + \frac{200}{s^2 + 10s + 1600} + \frac{200}{s^2 + 10s + 4900}$$

Ruido :

tipo rectangular, con magnitud ≤ 0.005

y un nivel de Energía : $\|n\| \leq 0.05$

Para definir β :

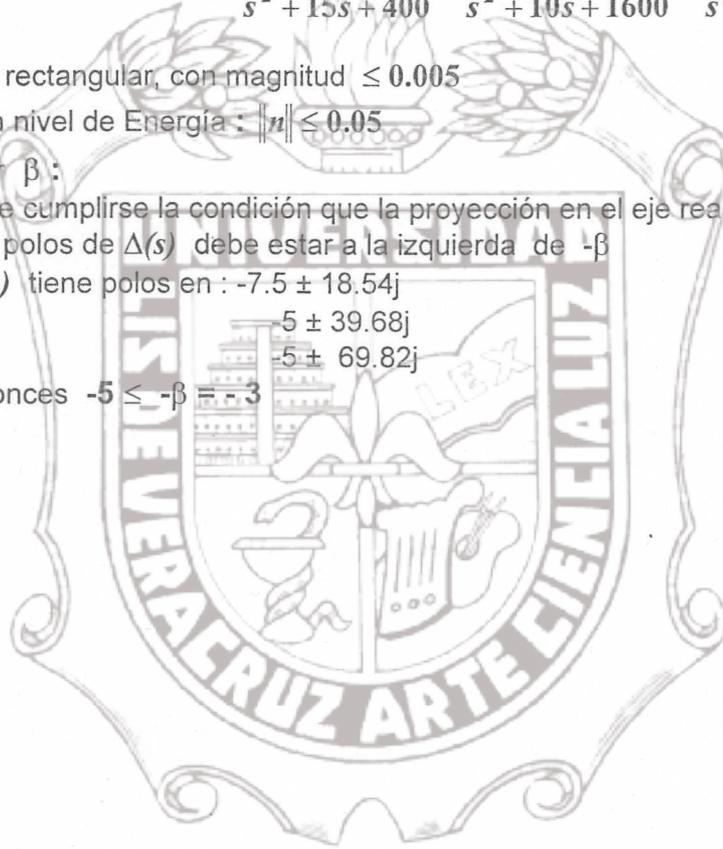
debe cumplirse la condición que la proyección en el eje real negativo de los polos de $\Delta(s)$ debe estar a la izquierda de $-\beta$

$\Delta(s)$ tiene polos en : $-7.5 \pm 18.54j$

$-5 \pm 39.68j$

$-5 \pm 69.82j$

entonces $-5 \leq -\beta = -3$



PROGRAMA EN SIMNON FALLA1.T

CONTINUOUS SYSTEM falla1

Time t

STATE x1 y11 y12 y21 y22 y31 y32 z1 E2din E2dout E2ruido

DER dx1 dy11 dy12 dy21 dy22 dy31 dy32 dz1 dE2din dE2dout dE2ruido

"REALIZADO POR: ING RICARDO ESPINOZA SALVADO"

"ALGORITMO DE DETECCION GEOMETRICO: UMBRAL DINAMICO EN EL TIEMPO

"SE CONSIDERA EL RUIDO DESCONOCIDO PERO ACOTADO EN SU ENERGIA ($n < 0.0025$)

"LA PROYECCION EN $Re(s)$ DE LOS POLOS DEL BLOQUE DE INCERTIDUMBRE ESTA A

" LA IZQUIERDA DEL POLO BETA (FACTOR DE PONDERACION)

"Planta p0

dx1=-x1+r

yp=x1

"Filtro W

dz1=-5*z1-4.999*yp

din=yp+z1

"Delta

dy11=y12

dy12=-15*y12-400*y11+200*din

dy21=y22

dy22=-10*y22-1600*y21+200*din

dy31=y32

dy32=-10*y32-4900*y31+200*din

dout=y11+y21+y31

"Generador de ruido

ruido=k*rect(a+t/h)

a:0

b:1

k:.005

"Senales de entrada al sistema

r:0.11

f=if t>2 then magfall else 0

magfall:0

"Salida total

y=yp+dout+f*ruido

"Reconstrucion Analitica de dinexp y calculo de su

"Norma Parcial Ponderada(E_{din})

dinexp=din

dE2din=-beta*E2din + dinexp*dinexp

E_{din}=sqrt(E2din)

E2din:0

beta:3

"Reconstrucion Analitica de doutexp y calculo de su

"Norma Parcial Ponderada(E_{dout})

doutexp=y-yp

dE2dout=-beta*E2dout + doutexp*doutexp

E_{dout}=sqrt(E2dout)

E2dout:0

"Calculo de E_{out}-E_{in}

difEner=E_{dout}-E_{din}

"Calculo de la Energia del ruido

dE2ruido=-beta*E2ruido + ruido*ruido

E_{ruido}=sqrt(E2ruido)

E2ruido:0

"calculo del valor Umbral

umbral1=.5*E_{ruido}*E_{din} + E2ruido

umbral=.7*.05*E_{din} + .0025

END

Simulación Para el Algoritmo del Umbral Dinámico en el Tiempo

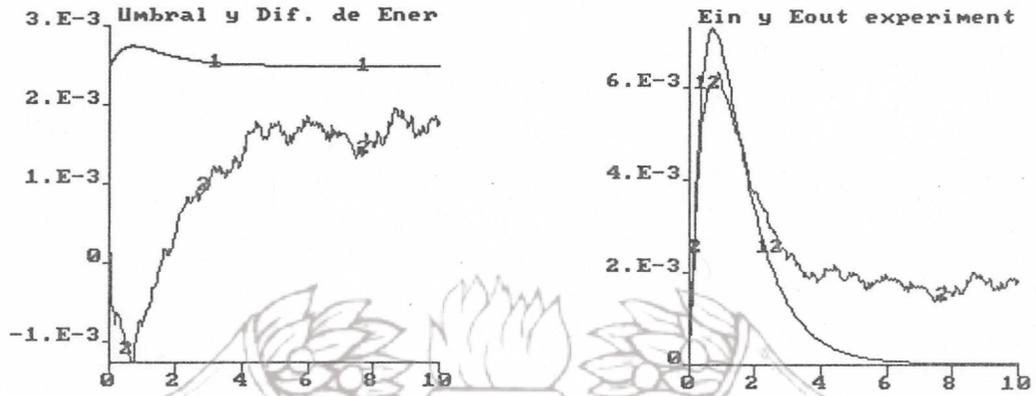


Fig. 5.2 Sin Falla

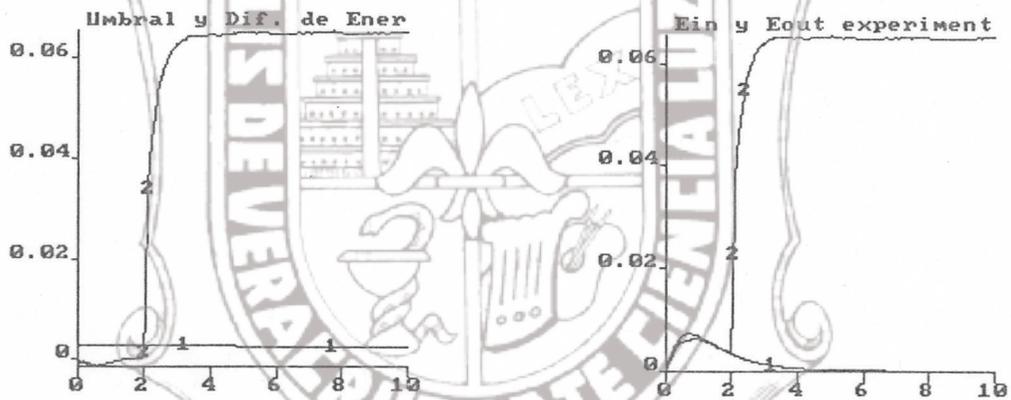


Fig. 5.3 Con Falla Grande; macfal=0.11

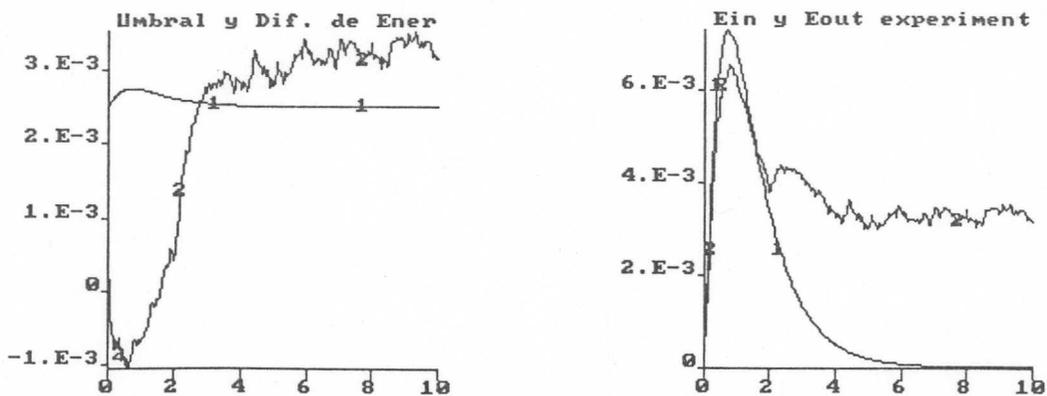


Fig. 5.4 Con Falla Pequeña; macfal=0.003

5.2 SIMULACION No. 2 EN SIMNON

ALGORITMO FILTRADO-DERIVATIVO (ESTADISTICO)

I.- DIAGRAMA EN BLOQUES

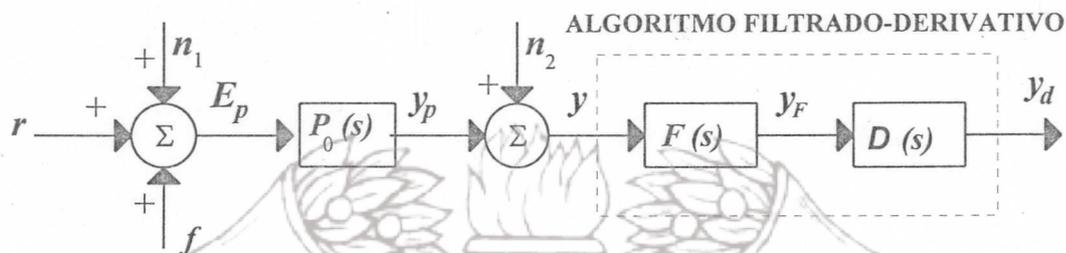


FIG.5.5 IMPLEMENTAR UN ALGORITMO F-D

II.-PROCEDIMIENTO PARA LA SIMULACION

- 1) Plantear en ecuaciones diferenciales los Bloques del sistema
- 2) dado r , $n1$ y $n2$ (ruido aleatorio con acotamiento conocido)
- 3) dado una falla en $t = 3$ seg.
 - a) sin Falla
 - b) con Falla Grande = 2.5 (66%)
 - c) con Falla Pequeña = 1.7 (13%)
 para un valor Umbral Fijo de 1.5
- 4) medir y_d
- 5) Graficar y_d y el valor Umbral para una ventana de tiempo de 10 seg. ; y verificar cuando y_d cruza el Umbral

III DATOS

$$\text{Filtro : } F(s) = \frac{10}{s+10}$$

$$\text{Etapa Derivativa : } D(s) = \frac{100s}{s+100}$$

$J_{th} = 1.5$; Fijo

Señal de referencia : $r = 1$

magnitud máxima del ruido: $|n1| = |n2| \leq 0.05$

PROGRAMA EN SIMNON FALLA2.T

CONTINUOUS SYSTEM falla2

Time t
STATE x1 z1 z2
DER dx1 dz1 dz2

"REALIZADO POR :ING. RICARDO ESPINOZA SALVADO'
"TECNICA DE DETECCION ESTADISTICO,CON RUIDO ADITIVO EN AMBOS,
ENTRADA DE
"LA PLANTA Y SENAL DE OBSERVACION. LA FALLA SE CONSIDERA ADITIVA A
LA ENTRADA
"DEL SISTEMA.
"EL ALGORITMO DE DETECCION ES EL FILTRADO/DERIVATIVO

"Planta p0
dx1=-x1+Ep
Ep=r + f + ruido1
yp=x1

"Generadores de Ruidos
ruido1=k1*NORM(t/a1)
a1:100
k1:0.05
ruido2=k2*NORM(t/a2)
a2:100
k2:0.05

"Senales de entrada al sistema
r:1
f=if t>3 then magfall else 0
magfall:0
"Salida total
y=yp + ruido2

"Algoritmo de Deteccion Estadistica
"ETAPA-1 Filtro Pasa Baja
dz1=-a*z1+b*y
yf=z1
a:10
b:10

"ETAPA-2 DERIVAR LA SENAL FILTRADA
dz2=-c*z2 + kd*c*yf
yd=kd*yf - z2
c:100
kd:100

"FUNCION DE DECISION
"VALOR UMBRAL DEL CAMBIO
jth=1.5

END

Simulación Para el Algoritmo de Filtrado-Derivativo

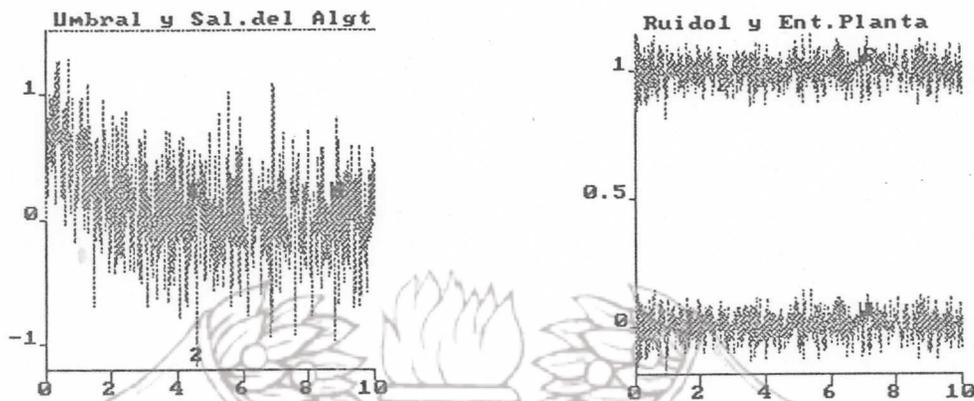


Fig. 5.6 Sin Falla

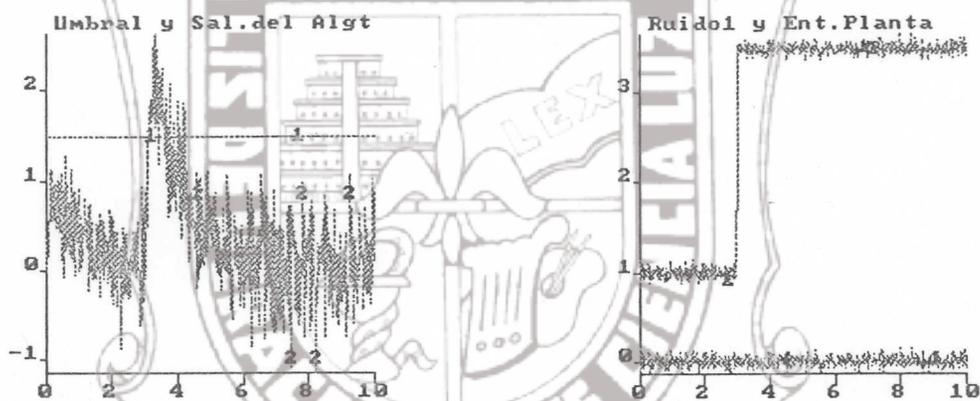


Fig. 5.7 Con Falla Grande; macfal=2.5

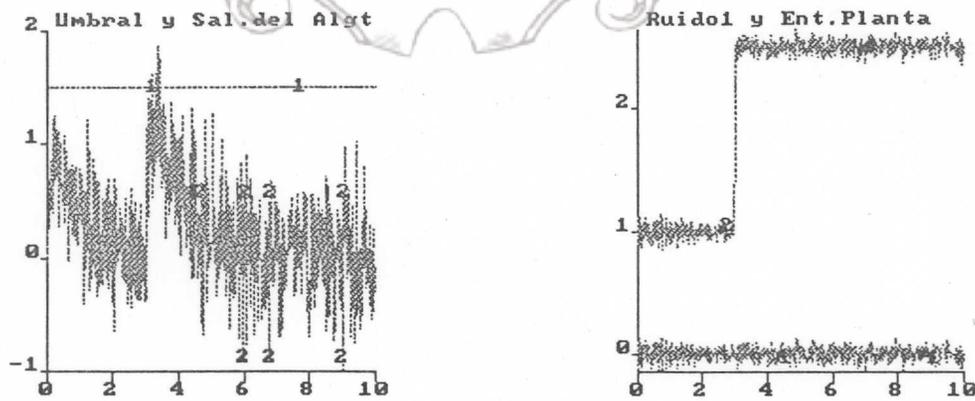


Fig. 5.8 Con Falla Pequeña; macfal=1.5

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

5.3 SIMULACION No. 3 EN SIMNON

COMPARACION ENTRE EL ALGORITMO GEOMETRICO Y EL ESTADISTICO

I.- DIAGRAMA EN BLOQUES

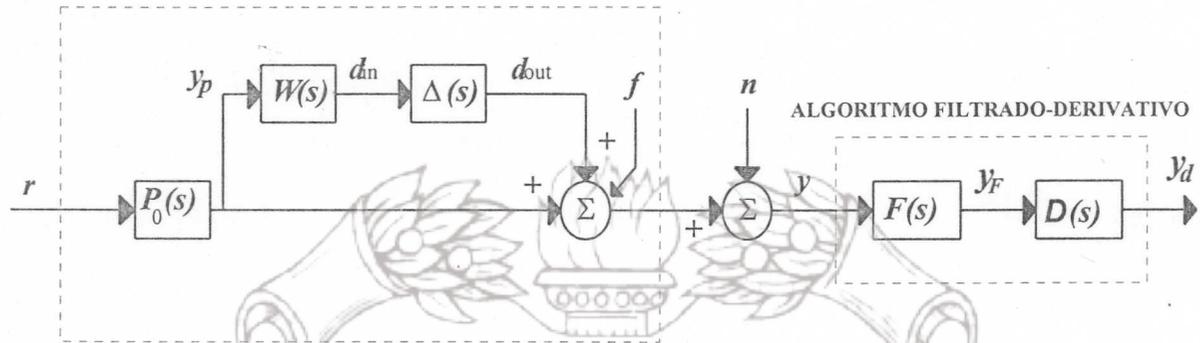


FIG.5.9 PARA COMPARAR AMBOS ALGORITMOS

II.- PROCEDIMIENTO PARA LA SIMULACION

- 1) Medir y y y_d
- 2) Graficar para la Técnica Geométrica : el Umbral y la diferencia de Energías.
- 3) Graficar para la Técnica Estadística : y_d y el Umbral Fijo correspondiente.
- 4) Con la misma Técnica Estadística : y_d y un valor Umbral Adaptivo (versión similar a CUSUM)

Todo lo anterior para una ventana de tiempo de 10 seg.

PROGRAMA EN SIMNON (MACRO)
MACGE1.T

MACRO MACGE

"REALIZADO POR:ING.RICARDO ESPINOZA SALVADO'

"ESTA MACRO SIRVE PARA CORRER EL PROGRAMA DE COMPARACION
ENTRE

"EL ALGORITMO GEOMETRICO Y EL ESTADISTICO.

"SE CONSIDERA QUE EL RUIDO ES DESCONOCIDO PERO ACOTADO
($n < 0.0025$).ADEMAS

"LA PROYECCION EN $Re(s)$ DE LOS POLOS DEL BLOQUE DE
INCERTIDUMBRE ESTA AL

"LADO IZQUIERDO DEL POLO BETA(FACTOR DE PONDERACION)

SYST falla5

STORE umbral difener edin edout ruido jthfd yd jthcsum ycusum

write 'Valor de la falla: '

read magf REAL

default magf=0.0

par magfall:magf

simu 0 10

split 2 2

area 1 1

"switch color blue

ashow umbral difener -mark

text 'Umbral y Dif. de Ener'

area 1 2

"switch color red

ashow Edin Edout -mark

text 'Ein y Eout experiment'

area 2 1

"switch color blue

ashow jthfd yd -mark

text 'F-D :Umbral, yfd'

area 2 2

"switch color blue

ashow jthcsum ycusum -mark

text 'CUSUM:Umbral,ycusum'

"switch color reset

END

Comparación entre los Algoritmos Gemétrico y Estadístico

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

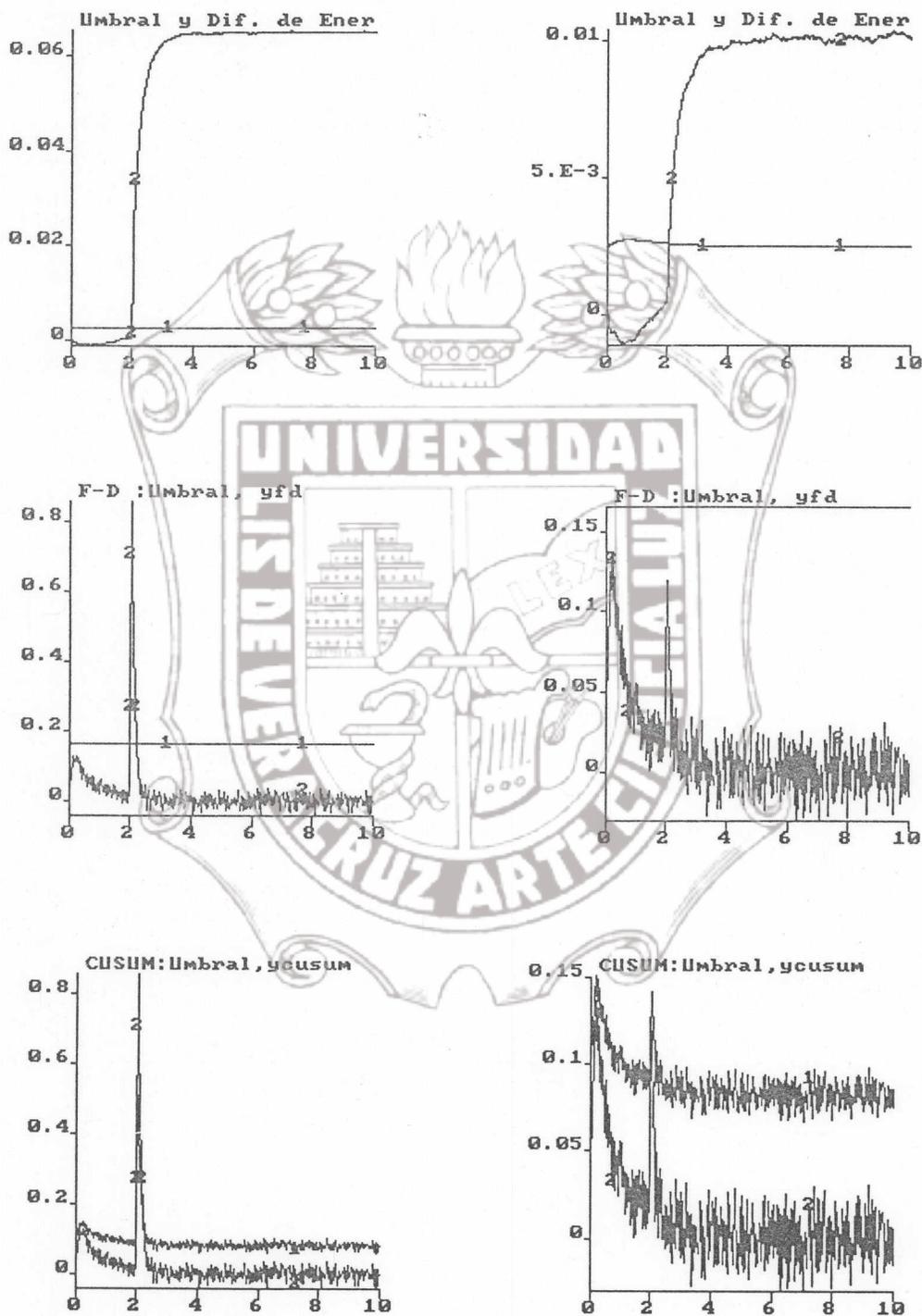


Fig. 5.10 Con Falla Grande
macfal=0.11

Fig. 5.11 Con Falla Pequeña
macfal=0.015

5.4 SIMULACION No. 4 EN MATLAB

COMPORTAMIENTO DEL UMBRAL Y LA FALLA MINIMA DETECTABLE, EN FUNCION DE LA VELOCIDAD DEL ESTIMADOR . EL SELECTOR DE UMBRAL (GEOMETRICO)

I.- PROCEDIMIENTO PARA SIMULACION

CASO 1.- Para un tiempo asumido de ocurrencia de la Falla ,al inicio de la Ventana de Detección (0.001 seg.).

$$|f| \geq \underline{f}(\tau) = 2 J_{th}(\tau) / \beta(\tau)$$

$$J_{th}(\tau) = (\max_w \bar{\sigma} [L(jw)]) \bar{n} + \delta |r| \bar{\sigma} [(Q_{\tau,1} LT)(\tau)]$$

Se analiza para 2 diferentes Ganancias del Estimador :

K = 2 (lento)

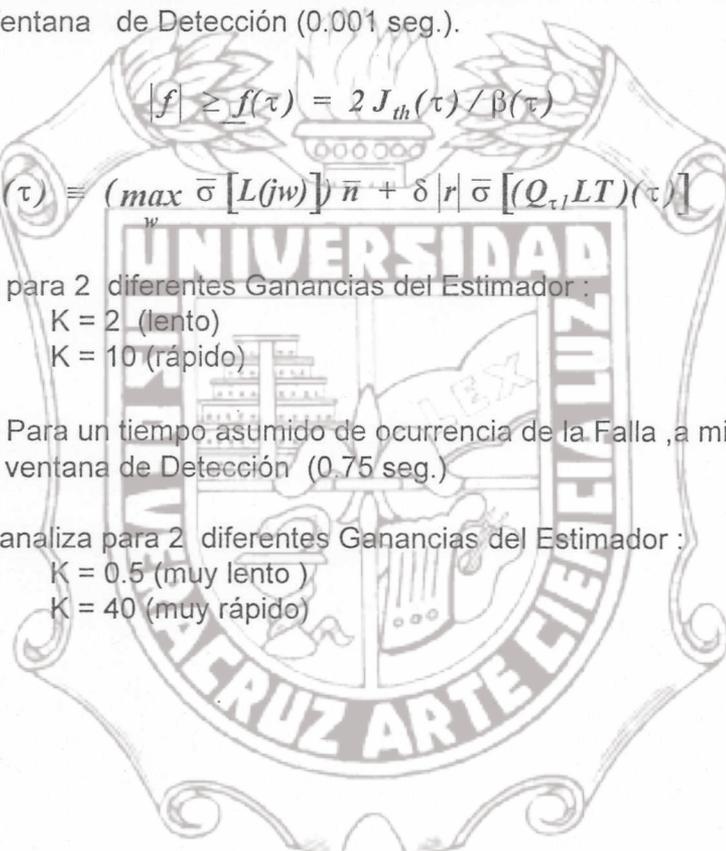
K = 10 (rápido)

CASO 2 .- Para un tiempo asumido de ocurrencia de la Falla ,a mitad de la ventana de Detección (0.75 seg.)

Se analiza para 2 diferentes Ganancias del Estimador :

K = 0.5 (muy lento)

K = 40 (muy rápido)



PROGRAMA EN MATLAB FALLA 3.M

%REALIZADO POR :ING RICARDO ESPINOZA SALVADO'
%ESTIMADO DEL VALOR UMBRAL Y LA FALLA MINIMA DETECTABLE,CON
RESPECTO
%A UNA VENTANA DE DETECCION .
%SE CONSIDERAN 2 VELOCIDADES DEL ESTIMADOR,ADEMAS PARA 2 DIFERENTES
%TIEMPOS DE OCURRENCIA DE LA FALLA.

```
%DATOS DEL PROBLEMA
%EL MODELO DE LA PLANTA NOMINAL ES  $G_o = a/(s+a)$ 
a=1;
tf=input('Tiempo de la falla tf= ');
n=0.01; %VALOR DEL RUIDO(RMS)
w=0.05; %COTA SUPERIOR DEL LA INCERTIDUMBRE DEL MODELO
r=1; %ENTRADA ESCALON PARA  $t \geq 0$ 
k=input('Velocidad del estimador K= ');
t=0.00001:.01:1.5;
%
%
numdat=max(size(t));
k9=(k^2)+(4*a*k);

% CICLO FOR-END PARA MANIPULAR VECTORES
for i=1:numdat,
    k1(i)=2*(a+k)*i(i)-3;
    k2(i)=4*exp(-(a+k)*t(i));
    k3(i)=exp(-2*(a+k)*t(i));
    k4(i)=(a^2)/(2*((a+k)^3)*t(i));
    qt(i)=sqrt(k4(i)*(k1(i)+k2(i)-k3(i)));
    k5(i)=1/(2*t(i)*(a+k)^3);
    k6(i)=2*(a^2)*(a+k)*(t(i)-tf);
    k7(i)=(k^2)*exp(-2*(a+k)*(t(i)-tf));
    k8(i)=4*a*k*exp(-(a+k)*(t(i)-tf));
    qtt(i)=sqrt(k5(i)*(k6(i)-k7(i)-k8(i)+k9));
    J(i)=n+(w*r*abs(qt(i)));
    b(i)=abs(qtt(i));
    f(i)=2*J(i)/b(i);
end;

%SE PROCEDE A GRAFICAR
subplot(1,2,1),plot(t,J) %SUBPLOT DIVIDE LA PANTALLA
title('VALOR UMBRAL')
grid
axis([0 1.5 .01 .024])
subplot(1,2,2),plot(t,f)
title('FALLA MIN.DETECTABLE')
grid
axis([0 1.5 .02 .22])
```

VERIFICACION DEL SELECTOR DE UMBRAL

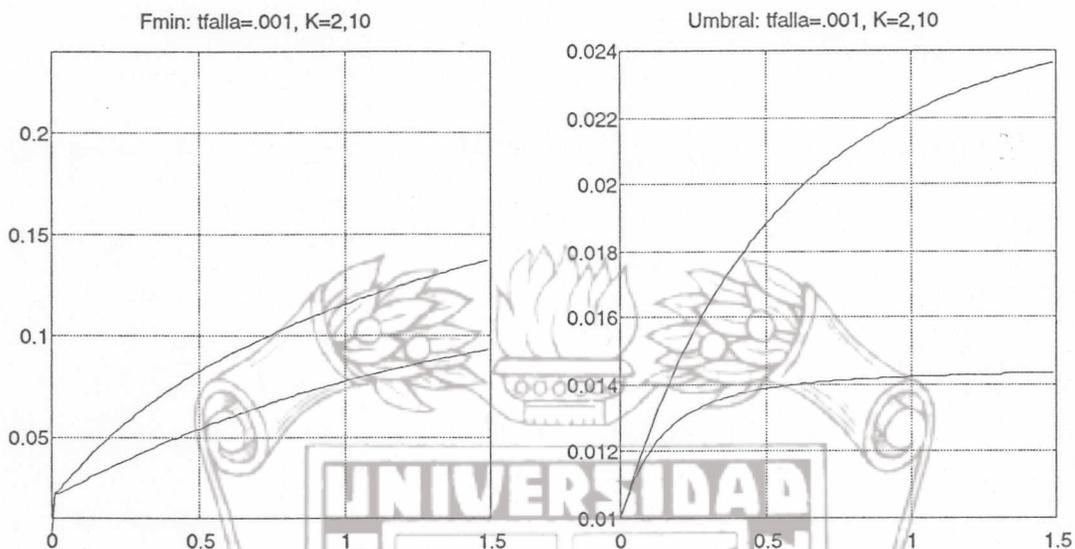


Fig. 5.12 Caso 1 al Inicio de la Ventana de Detección

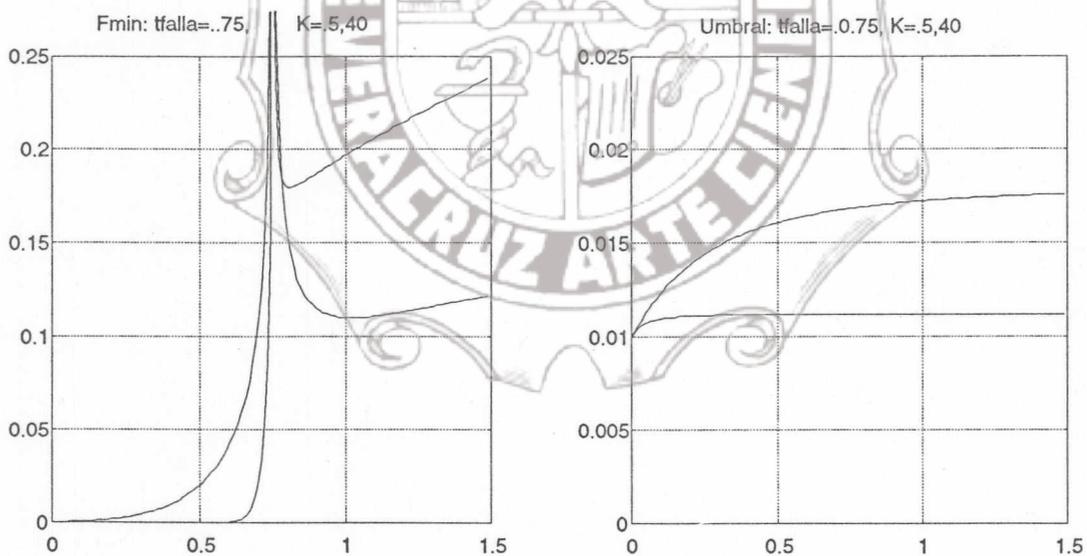


Fig. 5.13 Caso 2 a Mitad de la Ventana de Detección

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

6.1 ACERCA DE LAS SIMULACIONES

Después de analizar las gráficas de todas las Simulaciones, se pueden establecer las siguientes conclusiones :

1.- Para la Simulación No. 1 :El Rendimiento del Umbral Dinámico en el Dominio del Tiempo es excelente cuando la Falla es Grande y Aditiva ;siempre y cuando el Bloque de Incertidumbre cumpla las restricciones de acotamiento y ubicación en el plano complejo s .

Cuando la Falla es muy pequeña(alrededor del 3%) con respecto a la señal de referencia, empieza a ser evidente el tiempo de retardo para la detección.

Una observación adicional es ,que el Retardo de Detección aumenta en la medida que disminuimos el factor β .Recordemos que β condiciona el efecto de ponderación para el calculo de las Energías , *el costo de usar toda la información ,es con el compromiso de sacrificar el Tiempo de Detección.*

2.- Para la Simulación No. 2 : La Principal desventaja que presenta el Algoritmo de Filtrado-Derivativo, es el uso de un Valor Umbral Fijo.

Si el ambiente es muy ruidoso o la dinámica del proceso es muy rápida ,no resulta práctico, la sintonización de este Umbral y el contador de saltos que atraviesan este valor.

3.- Para la Simulación No. 3 : La comparación entre ambos Algoritmos ,arroja las siguientes conclusiones :

Para Fallas Grandes ,ambos algoritmos detectan la falla al mismo tiempo .

En la medida que la magnitud de la falla a detectar va disminuyendo ,el Algoritmo Estadístico pierde su capacidad de detección, y el Geométrico permite un retardo en la detección.

Para una Falla menor del 10% (0.01), el Algoritmo Estadístico No detecta la Falla. Para mejorar la capacidad de detección del Algoritmo F-D, usamos un Umbral Adaptivo similar al Algoritmo CUSUM. De esta forma para la misma falla de 0.01, el F-D con Umbral Adaptivo todavía es capaz de detectar la falla.

Resulta claro que para las condiciones de Simulación anteriores, el Umbral Dinámico en el Dominio del Tiempo tiene un mejor Rendimiento que el Filtrado -Derivativo. Pero no podemos afirmar nada si las condiciones en que se desarrolla la Simulación son diferentes.

4.- Para la Simulación No. 4 : El Umbral disminuye cuando aumenta la Ganancia del Estimador, y aumenta entre mayor sea la ventana de detección.

Con la Falla Mínima Detectable ocurre lo contrario con respecto a la Ganancia del Estimador, y se mantiene que entre mas amplia sea la ventana de tiempo ,aumenta la Falla Mínima Detectable, o visto de otro modo, disminuye la Sensitividad del Algoritmo.

Entre mas lento es un Estimador, mas tiempo se requiere para colocar la información en las Innovaciones ,y estos a su vez no permiten que el Umbral disminuya. Entre mayor es la Innovación, mayor seguridad hay de una Falla ,y un menor Umbral es requerido.

Para la Falla Mínima Detectable ocurre lo contrario; entre mas rápido sea el observador, mas sensible es a las variaciones de la carga, y por consiguiente mas sensitivo a la Falla que ocurre. La principal desventaja de un Estimador rápido ,es que permite una mayor influencia del ruido en las Innovaciones .

Por ultimo con respecto a la ventana de tiempo, entre mayor es, aumentara la incidencia del ruido en las Innovaciones , por lo que se tiene que elevar la Falla Mínima que puede ser detectada, para diferenciarla del nivel de ruido.

6.2 ASPECTOS RELEVANTES EN LAS TECNICAS DE DETECCION DE FALLAS

Los Procedimientos Estadísticos de Detección analizados en esta tesis ,utilizan algoritmos que pueden usarse directamente en la señal de Observación.

Sin embargo, al igual que los procedimientos Geometricos, pueden utilizarse mediante métodos basados en Modelos; de tal forma que al Residual obtenido(que este caso es mas apropiado considerar Innovación) se le aplicara finalmente los algoritmos desarrollados anteriormente, y mediante la Regla de Decisión indicaran la presencia de la Falla.

Resulta evidente que la ventaja del Algoritmo CUSUM con respecto a los otros Algoritmos, es su Umbral Adaptivo; como se pudo apreciar en la Simulación N#3.

Los Procedimientos Geométricos de Detección están orientados a optimizar o actualizar Umbrales, para obtener Mínimas Fallas Detectables, en presencia de Ruido e Incertidumbre del Modelado. Esta optimización de los Umbrales depende del tipo de Generadores de Residual que se utilice y de sus parámetros propios.

En la situación ideal, asumiendose conocido el modelo exacto del sistema, el Generador de Residual puede ser construido mediante una Factorización Estable, de tal forma que en ausencia de Falla el Residual es cero, y diferente de cero cuando se presenta una Falla.

Pero las Incertidumbres y el ruido impiden construir Generadores Optimos, por lo que se necesita trabajar la Detección en un ambiente de incertidumbre y ruido : - *como no se puede evitar ,es necesario hacerlo parte del procedimiento de Detección* * -

* Ver interesante explicación en [5] pag 1722

Se asume que aunque la Incertidumbre y el ruido son desconocidos, están acotados, evaluado en su mayoría por Normas y Valores singulares.

Las Técnicas de Umbrales Dinámicos expuestas en el capítulo IV, pretenden solucionar el problema anterior, con muy buenos resultados.

Por último, la Técnica de Filtros Detectores de Falla es muy atractiva, sin embargo encierra dificultades principalmente en la complejidad del cálculo y requerimientos de memoria.

Ambos enfoques son complementarios. El Estadístico nos proporciona una herramienta muy buena sobre todo en condiciones ambientales "ruidosas" o impredecibles; también, cuando es posible obtener información OFF-LINE del parámetro θ (después del cambio), se puede estimar el tiempo de cambio, y mejora la certidumbre de la prueba.

Por el contrario, el Enfoque Geométrico es muy apropiado para el manejo de Incertidumbre por dinámicas no modeladas, cuando los niveles de ruido son, aunque desconocidos, estrictamente acotados.

No podemos afirmar en el enfoque Geométrico, que los algoritmos en el dominio del tiempo son mejores o no que los algoritmos en el dominio de la frecuencia; pero si podemos afirmar que si un algoritmo es capaz de trasladarse con facilidad de un dominio a otro, esto es superior a otros que no.

La ventaja, de trabajar en el tiempo es evidente, ya que nos permite evaluar directamente el tiempo de detección y la operación en ON-LINE, por el contrario en la frecuencia, los aspectos de Optimización del Umbral y la mínima falla detectable son fácilmente manejables y disminuyen el riesgo de $p(FA)$ y $p(FD)$.

El novedoso método del Filtro Detector de Falla es una alternativa muy buena, principalmente por la característica de Aislamiento e Identificación de la falla que esta ligada al proceso de detección. De hecho, si una falla ha sido detectada ella misma indica donde esta ubicada.

Para aumentar la capacidad de detección en FDF en un Espacio de Detección restringido, la técnica de "Asignación Múltiple" de falla en una misma dirección es factible, siempre que las magnitudes de la fallas asociadas sean diferentes.

La mayoría de las técnicas de detección actualmente utilizan

- Filtros Kalman (Innovaciones), o
- Observadores Luenberger (Residuales)

generalmente de orden completo, y una evaluación correcta de estos residuales para determinar si hay falla o no, depende principalmente (bajo condiciones ideales) de:

- Para las Innovaciones, que sean blancos y no influenciadas, y

- Para el Residual, que sea cero.

Sin embargo, en la practica esto no sucede; las Innovaciones o Residuales son influenciadas y no-blancos, o diferente de cero respectivamente; y esto es debido a las siguientes razones:

- Porque una falla ha ocurrido.
- Porque una mala medición fue recibida. (ruido, incertidumbre del modelado, datos a la deriva, etc.).
- Por el uso de observadores y filtros de orden reducido debido a las restricciones por el calculo y capacidad de memoria.

Cualquier técnica que no toma en cuenta las dos ultimas razones expuestas arriba, está imposibilitada para tener un buen desempeño.

Una solución "arcaica" de sólo levantar el valor de umbral, para soslayar las dos ultimas razones anteriores, podría disminuir la tasa de Falsas Alarmas, pero hace a la vez la prueba menos sensitiva a las fallas, y la probabilidad de detecciones perdidas aumentaría drásticamente.

Otro aspecto muy importante, es que las técnicas expuestas para el cap. IV, son asumiendo sistemas lineales e invariantes en el tiempo, por lo que no son directamente aplicables cuando estas condiciones no se cumplen. Interesantes propuestas para modelos lineales, variables en el tiempo son expuestos por T. H. Kerr*.

6.3 NOTA FINAL

Es importante enfatizar que los algoritmos Estadísticos y Geométricos, presentados en este trabajo de tesis, han sido desarrollados bajo la hipótesis de Falla Simple, en su mayoría Aditiva y que generalmente no afectan la Estructura Dinámica del proceso o de la Planta, pero si al Vector de Observación y de Entrada.

Es necesario aclarar que en la practica también los parámetros de la estructura de un sistema "resiente" la presencia de una falla, aun más, los acotamientos asumidos de las incertidumbres del modelado y del ruido pueden alterarse.

Hay excelentes propuestas para solucionar lo anterior y aun continúan en investigación.

Otros temas que también están bajo estudio son:

- Estrategias de selección de Umbrales Optimos.

* T. H. Kerr, "Real-time Failure Detection: A nonlinear optimization problem that yields a two-ellipsoid overlap test", Journal Optimiz theory Appl; vol 22, pp 509-535, Aug 1977.

- Minimización del compromiso entre Falsa Alarma y Detecciones Perdidas .
- Detectar e Identificar una falla en un conjunto de fallas simultáneas.

Este trabajo de tesis es un primer paso para otras aplicaciones y desarrollos posteriores:

- 1.- Análisis comparativo entre los Enfoques Estadístico y Geométrico.
- 2.- Análisis comparativo entre algoritmos en el Dominio del Tiempo y en el Dominio de la Frecuencia.
- 3.- Estudios de técnicas orientadas a la Identificación y diagnóstico de fallas.
- 4.- Construcción de un Sistema Experto, para la Detección y Diagnóstico de Fallas y el manejo de software de Autoprotección.



BIBLIOGRAFIA

- [1] J.Park and G.Rizzoni,"An Eigenstructure Assignment Algorithm for the Design of Fault Detection filters".IEEE T.A.C.,vol 39,Nº 7 ,julio 1994, pag 1521-1524.
- [2] A.Emani-Naeini,M.M.Akhter and S.M.Rock,"Effect of Model Uncertainty on Failure Detection:The Threshold Selector".IEEE T.A.C.,vol 33, No. 12 ,dec 1988, pag 1106-1115.
- [3] C.-C Tsui,"A General Failure Detection, Isolation and Accommodation System with Uncertainty and Measurement Noise" IEEE T.A.C.,vol 39,nov 1994, pag 2318-2321.
- [4] P.P.Khargonekar and T.L.Ting,"Fault Detection in the Presence of Modeling Uncertainty",IEEE T.A.C.dec 1993, pag 1716-1721.
- [5] X.Ding ,L.Guo and P.M.Frank,"A Frequency Domain Approach to Fault Detection of Uncertain Dynamic Systems".IEEE T.A.C.,dec 1993, pag 1722-1727.
- [6] M.Basseville,I.V.Nikiforov,"Detection of Abrupt Changes: Theory and Application".Prentice Hall 1993.
- [7] J.-F.Magni and P.Mouyon,"On Residual Generation by Observer and Parity Space Approaches ".IEEE T.A.C.,vol 39,Nº 2,feb 1994, pag 441-447.
- [8] J.E.White and J.L.Speyer,"Detection filter Design:Spectral Theory and Algorithms",IEEE T.A.C.,vol AC-32, Nº 7,julio 1987, pag 593-603.
- [9] C.-C.Tsui,"On the Solution to the State Failure Detection Problem".IEEE T.A.C.,vol 34, Nº 9,sept 1989, pag 1017-1018.
- [10] T.H.Kerr,"A Critique of Several Failure Detection Approaches for Navigation Systems",IEEE T.A.C.,vol 34, Nº 7,julio 1989, pag 791-792.
- [11] J.J.Gertler,"Survey of Model-Based Failure Detection and Isolation in Complex Plants".IEEE Control Systems Magazine, dec 1988, pag 3-11.
- [12] K.Warwick and M.T.Than, "Failsafe Control Systems".Chapman and Hall Editor,1991.
- [13] M.-ALI Massoumnia,G.C. Verghese and A.S.Willsky, "Failure Detection and Identification". IEEE T.A.C., vol 34, Nº 3,marzo 1989, pag 316-321.
- [14] B.Friedland, "Control System Design An Introduction to State-Space Methods". Mc. Graw-Hill International, 1987.
- [15] Frederick Holtz, "Expert Systems, Programming in Turbo C", Edit.Windcrest Books,1989.

- [16] M. Tamayo y Tamayo, "El proceso de la Investigación Científica", 2a. edición, editorial LIMUSA, 1981.
- [17] Katsuhiko Ogata , "Ingeniería de Control Moderna", 2da Edición, Prentice Hall, 1993.
- [18] N.P.Piercy, "Sensor Failure Estimators for Detection Filters" .IEEE T.A.C.,vol 37, N° 10,oct 1992, pag 1553-1557.
- [19] M.Basseville, A.Benveniste, G.V.Moustakides y A. Rougee, "Optimal Sensor Location for Detecting Changes in Dynamical Behavior". IEEE T.A.C., vol AC-32, N° 12, dec 1987, pag 1067-1075.
- [20] A.-Benveniste, M.Basseville and G.Moustakides, "The Asymptotic local Approach to Change Detection and Model Validation". IEEE T.A.C., vol AC-32, N° 7,julio 1987, pag 583-592.
- [21] B.D. Brumback and M. D. Srinath, "A Chi-Square Test for Fault-Detection in Kalman Filters". IEEE T.A.C., vol AC-32, N° 6,junio 1987, pag 552-554.
- [22] X. Ding and P. M. Frank, "Frequency Domain Approach to Optimally Robust Residual Generation and Evaluation for Model-Based Fault Diagnosis", submitted to Automatica, 1992.
- [23] M.Massoumnia, "A Geometric Approach to the Synthesis of Failure Detection Filters." IEEE T.A.C., vol AC-31, N° 9, sept 1986, pag 839-846.
- [24] R. J. Patton, P. M. Frank y R. N. Clark, "Fault Diagnosis in Dynamic Systems, Theory and Application". Prentice Hall,1989
- [25] K. Astrom and B. Wittermark, "Computer Controlled Systems", Prentice Hall,1990.
- [26] Frank L. Lewis, "Applied Optimal Control and Estimation: Digital Design and Implementation". Prentice Hall,1992.
- [27] Louis Maisel, "Probabilidad y Estadística", 1973. Fondo Educativo Interamericano.
- [28] Serge Lang, "Algebra Lineal", 1976. Fondo Educativo Interamericano.
- [29] Guia del Usuario para SIMNON, Ver. 3.2 para MS-DOS
- [30] Guia del Usuario para MATLAB para Windows, Ver. 4.20

FE DE ERRATAS

Por un descuido involuntario en la impresión de esta tesis, se omitieron los símbolos } y] en las siguientes ecuaciones:

(3.2.19), (3.2.22), (3.2.24), (3.2.26), (3.3.3), (3.3.4), (4.3.11), (4.3.28), (4.3.38), (4.3.51), (4.3.71), (4.3.84), (4.3.85) (4.3.86) y (4.3.91)

asi como tambien en algunas ecuaciones sin número de las siguientes páginas:

pag. 76, pag. 101 y pag. 102

