



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

INSTITUTO DE INGENIERIA

**"ANÁLISIS DE PLACAS DELGADAS
RECTANGULARES POR EL METODO
DEL ELEMENTO FINITO"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA DE ESTRUCTURAS

PRESENTA:

ING. ALEJANDRO VARGAS COLORADO

H. VERACRUZ, VER.

AGOSTO, 1998

Tesis de Maestría



UNIVERSIDAD VERACRUZANA INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., a 20 de Julio de 1998
DI358/98

Al candidato al Grado:
ING. ALEJANDRO VARGAS COLORADO
PRESENTE:

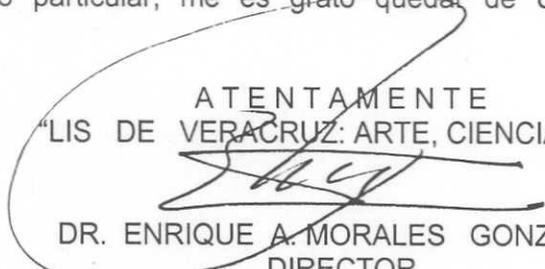
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Dr. Bonifacio C.A. Peña Pardo, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería de Estructuras:

TEMA
"ANALISIS DE PLACAS DELGADAS RECTANGULARES POR EL METODO DEL
ELEMENTO FINITO"

- I .- Introducción
- II .- Flexión de placas
- III .- Placas rectangulares simplemente apoyadas
- IV .- Placas rectangulares con diferentes condiciones de frontera
- V .- El método del elemento finito aplicado en la solución de placas
- .- Resumen
- .- Referencias
- .- Apéndice

Sin otro particular, me es grato quedar de Usted como atento y seguro
servidor

ATENTAMENTE
"UNIVERSIDAD DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"


DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ
DIRECTOR

EMG/apm*.

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

A la memoria de mi madre:

Dolores Colorado Díaz.

A mi padre y hermano:

*Rafael Vargas Castillo.
Rafael Vargas Colorado.*

A mis tíos:

*Guadalupe Colorado Díaz.
Concepción Colorado Díaz.
Vicente C. Colorado Díaz.*



Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Tesis de Maestría

Agradezco profundamente al Dr. Bonifacio C. A. Peña Lardo por su asesoría y consejos que fueron de gran valía para la elaboración de esta tesis.

También quiero agradecer a todos mis maestros, pasados y presentes, ya que sin ellos me hubiese sido imposible tener la adecuada preparación que me permitiese desarrollar este trabajo.



Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

ÍNDICE.

Introducción.

Capítulo 1: Flexión de placas.

1.- Pendiente y curvatura de placas con pequeñas deflexiones.	1
2.- Relación entre momento y curvatura.	4
3.- Casos particulares de flexión pura.	9
4.- Límites de aplicación de las fórmulas deducidas.	13
5.- Ecuación diferencial de la deformada.	15

Capítulo 2: Placas rectangulares simplemente apoyadas.

6.- Placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga sinusoidal.	26
7.- Solución de Navier para placas rectangulares simplemente apoyadas.	30
8.- Solución de Lévy para placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas.	33
9.- Placas rectangulares simplemente apoyadas sujetas a diferentes condiciones de carga.	41

Capítulo 3: Placas rectangulares con diferentes condiciones de frontera.

10.- Flexión de placas rectangulares mediante momentos distribuidos a lo largo de la frontera.	57
11.- Placas rectangulares con distintos tipos de apoyos.	62

Capítulo 4: El método del elemento finito aplicado en la solución de placas.

12.- Introducción.	86
13.- Funcionales.	89
14.- El símbolo variacional.	90
15.- Formulación débil de problemas con valores en la frontera.	91
16.- Formas lineales y bilineales, funcionales cuadráticos.	95
17.- Teoría clásica de placas.	97
18.- Polinomios de interpolación.	105
19.- Integración numérica.	109
20.- Transformación de coordenadas.	112
21.- Integración numérica sobre un elemento maestro rectangular.	116
22.- Implementación del programa PLACA para el análisis de placas rectangulares.	120

Capítulo 5: Resumen.

Referencias.

Apéndice.

Introducción.

Antes de hablar de la importancia que las placas tienen dentro de una estructura, es necesario definir lo que son. Desde el punto de vista de la mecánica del medio continuo una placa es un cuerpo en el cual una de sus dimensiones es pequeña comparada con las otras dos (por ejemplo, una losa de concreto), además pueden soportar cargas aplicadas de manera perpendicular a ellas y también sobre sus lados.

Existen dos formas de clasificarlas, como placas delgadas y, como placas gruesas. Si las placas son delgadas se puede considerar que la variación de los esfuerzos a lo largo de la menor dimensión pueden despreciarse, es decir podemos simplificar un problema tridimensional para analizarlo como uno bidimensional. En cambio si la placa es gruesa será necesario tomar en cuenta la variación de los esfuerzos a lo largo del espesor de ésta.

Las placas, ya sean delgadas o gruesas, de forma cualquiera, son elementos estructurales muy importantes y comunes en casi cualquier tipo de estructura. Si analizamos, por ejemplo, algunas de las partes más importantes de un edificio, sin importar que sea de concreto o de acero, encontraremos que éstas están formadas por placas, por ejemplo si el edificio es de concreto las losas se pueden modelar como placas sujetas a diferentes condiciones de carga y frontera, de manera similar los muros también se pueden modelar como placas. En edificios con estructura de acero encontraremos que las almas y patines de la mayoría de las vigas y columnas están formadas por placas; otros elementos que se consideran como placas son: los atiesadores, placas de unión, placas base, etc. Muchos tipos de cimentación también se pueden modelar como dichos elementos. No solo dentro de este tipo de estructuras podemos encontrar elementos placas, éstos también son muy comunes en barcos y aviones, por ejemplo los cascos y cubiertas de los barcos, así como en la mayoría de las partes del "esqueleto" de éstos podemos encontrar a los elementos placas. Los fuselajes de los aviones y su "esqueleto", también cuentan con dichos elementos.

Los casos anteriores son solo una pequeña cantidad de los elementos que dentro de una estructura pueden modelarse como placas, como se dijo anteriormente casi cualquier tipo de estructura cuenta con elementos placa como componentes. Por lo tanto esta claro que es muy importante contar con los medios suficientes para poder analizarlas. El análisis no es sencillo, debido a la gran cantidad de condiciones de carga y de apoyo a las que pueden estar sujetas. En este trabajo solo se considerarán placas delgadas rectangulares con algunos casos de diferente condición de carga y apoyos a las que pueden estar sujetas.

Aún y cuando el problema por resolver es bidimensional, tenemos que tratar con una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x,y)$$

la cual se conoce como ecuación de Lagrange. Desafortunadamente la solución de esta ecuación diferencial no es fácil de obtener, y solo se han podido encontrar soluciones cerradas ("exactas") en casos particulares simples.

Navier obtuvo en 1820 las primeras soluciones de la ecuación de Lagrange, usando series dobles infinitas de Fourier para describir las deflexiones y momentos de placas rectangulares simplemente apoyadas y sujetas a diferentes condiciones de carga, pero la convergencia de dichas series es lenta. Lévy en 1899 propuso una solución más practica, desde el punto de vista numérico, para resolver este problema, su método se basaba en utilizar una serie infinita simple de senos y cosenos hiperbólicos en vez de la doble propuesta por Navier, con ello logró acelerar la convergencia de la solución.

Las soluciones de Navier y Lévy no son los únicos métodos que existen para resolver el problema de flexión de placas. Durante algún tiempo se utilizó el método de modelos elásticos para resolver dicho problema. Este método consistía en modelar a la placa utilizando materiales tan diversos como el yeso, vidrio, plástico, metales y caucho endurecido, después eran sometidos a las cargas de interés. Sin embargo muchos problemas complejos que hace algunos años se hubieran podido resolver mediante el método de modelos elásticos, ahora se resuelven utilizando métodos numéricos y modernas computadoras electrónicas. Dentro de los métodos numéricos utilizados podemos citar el método de las diferencias finitas o ecuaciones de diferencias, y el método del elemento finito. Es precisamente éste último el método que utilizaremos en este trabajo para encontrar la solución al problema de la flexión de placas.

El método del elemento finito es un procedimiento numérico para obtener las soluciones a muchos de los problemas que hay dentro de la ingeniería. Este método se puede separar en dos ramas. La primera que utiliza elementos discretos para obtener los desplazamientos nodales, así como las fuerzas en los miembros de un marco estructural. A esta formulación también se le conoce como "Análisis matricial de estructuras", y nos conduce a resultados que son idénticos a los obtenidos con el análisis clásico de las mismas. La segunda, utiliza elementos continuos para obtener las soluciones aproximadas a los problemas de transferencia de calor, mecánica de fluidos y, mecánica de sólidos. Esta segunda aproximación es el método verdadero del elemento finito, ya que nos conduce a los valores aproximados de los parámetros deseados en puntos específicos llamados nodos.

El método del elemento finito combina varios conceptos matemáticos para producir un sistema de ecuaciones lineales o no lineales. Este método es poco práctico si no se cuenta con una computadora en la cual podamos desarrollar un programa de este tipo.

CAPÍTULO 1.

FLEXIÓN PURA DE PLACAS.

1. Pendiente y curvatura de placas con pequeñas deflexiones. Para estudiar las pequeñas deflexiones de una placa, tomaremos el *plano medio* de ésta, antes de la flexión, como el plano xy . Durante la flexión las partículas que se encontraban en el plano xy sufren pequeños desplazamientos w perpendiculares al plano xy formando la *superficie media* de la placa, a estos desplazamientos les llamaremos *deflexiones de la placa*. Si se toma una sección normal de la placa paralela al plano xz , Fig. 1a, se ve que la pendiente de la superficie media en la dirección de las x es $i_x = \partial w / \partial x$. Igualmente la pendiente en la dirección de las y es $i_y = \partial w / \partial y$. Sea an una dirección cualquiera en el plano xy , Fig. 1b, y α el ángulo que forma con el eje de las x , la diferencia entre los desplazamientos de dos puntos próximos a y a_1 , es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

y la pendiente correspondiente

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha \quad (a)$$

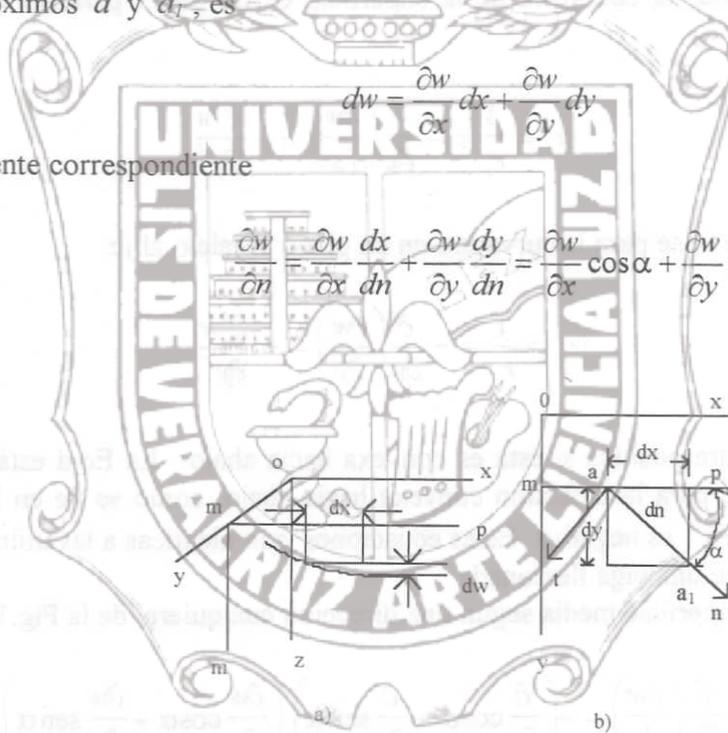


Fig. 1

Para determinar la pendiente máxima en la dirección α_1 , obtenemos la derivada respecto a α en la Ec.a., e igualamos a cero este resultado, obteniendo

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial y} / \frac{\partial w}{\partial x} \quad (b)$$

De igual manera igualando con cero a la Ec.a se determina la dirección correspondiente a la pendiente nula de la superficie. El ángulo correspondiente α_2 está dado por la ecuación

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\partial w / \partial x}{\partial w / \partial y} \quad (c)$$

De las Ecs. b y c observamos que

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$$

lo que demuestra que las direcciones de la pendiente nula y la pendiente máxima son perpendiculares.

Para pequeñas deflexiones la curvatura de la superficie en un plano paralelo al plano xz , Fig.1, es igual a

$$\psi_x = \frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (d)$$

De la misma manera, se tiene para la curvatura en un plano paralelo al yz .

$$\psi_y = \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (e)$$

Consideremos la curvatura positiva si ésta es convexa hacia abajo. La Ec.d está precedida del signo menos, ya que para la deflexión convexa hacia abajo, como se ve en la Fig.1, la derivada segunda $\partial^2 w / \partial x^2$ es negativa. Estas ecuaciones son idénticas a las utilizadas en el estudio de la curvatura de una viga flexionada.

Para la curvatura de la superficie media según una dirección cualquiera, de la Fig.1 se tiene

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \right)$$

Después de aplicar el operador $\partial / \partial n$, se obtiene

$$\frac{1}{r_n} = \psi_x \cos^2 \alpha - \psi_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha + \psi_y \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (f)$$

donde las curvaturas ψ_x y ψ_y están definidas anteriormente. Introduciendo el término ψ_{xy} que se denomina *torsión* con respecto a los ejes xy

$$\psi_{xy} = \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (g)$$

se ve que la curvatura en una dirección n en un punto de la superficie media puede calcularse si se conocen en dicho punto las curvaturas ψ_x, ψ_y y ψ_{xy} .

Si en lugar de la dirección an Fig.1b, tomamos la dirección at perpendicular a an , la curvatura en esta nueva dirección se obtendrá de la Ec.f poniendo $\pi/2 + \alpha$ en lugar de α .

Así se obtiene

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha + \frac{1}{r_y} \cos^2 \alpha \quad (h)$$

Sumando las Ecs. f y h tenemos

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \quad (1.1.1)$$

lo que muestra que en cualquier punto de la superficie media la suma de las curvaturas en dos direcciones perpendiculares tales como n y t es independiente del ángulo α . Esta suma se llama *curvatura media* de la superficie en un punto.

La torsión en a con respecto a las direcciones an y at es

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

Para calcular la derivada respecto a t , debe notarse que la dirección at es perpendicular a an . Así se obtiene la derivada buscada poniendo $\pi/2 + \alpha$ en lugar de α en la Ec.a. De este modo se tiene

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \sin 2\alpha + \frac{1}{r_{xy}} \cos 2\alpha \quad (i)$$

En el estudio sucesivo interesará determinar, en función de α , las direcciones en que la curvatura es máxima o mínima y hallar los correspondientes valores de la curvatura. Se obtiene la ecuación necesaria para determinar α , igualando a cero la derivada respecto a α de la Ec.f, así

$$-\frac{1}{r_x} \sin 2\alpha - \frac{2}{r_{xy}} \cos 2\alpha + \frac{1}{r_y} \sin 2\alpha = -2 \frac{1}{r_{nt}} = 0 \quad (j)$$

donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{\frac{2}{r_{xy}}}{\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}} \quad (1.1.2)$$

De esta ecuación se obtienen dos valores de α que difieren en $\pi/2$. Sustituyéndolos en la Ec.f se hallan dos valores de $1/r_n$, correspondientes a las curvaturas máxima y mínima en el punto a . Estas dos curvaturas se denominan *curvaturas principales* de la superficie, y los planos correspondientes *naz* y *taz*, *planos principales de curvatura*, y en consecuencia

$$\frac{1}{r_{nt}} = 0$$

De las Ecs. f e i, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \cos 2\alpha - \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha \\ \frac{1}{r_m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \cos 2\alpha + \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Teniendo en cuenta que el primer miembro de la Ec.j es igual al doble de la segunda de las Ecs.1.1.3, se deduce que si las direcciones *an* y *at* (Fig.1) están en los planos principales la torsión correspondiente $1/r_{nt}$ es nula.

En nuestro ejemplo la curvatura en cualquier dirección es positiva, de ahí que la superficie esta flexionada con la convexidad hacia abajo. Si las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son ambas negativas, la curvatura en cualquier dirección es también negativa, y tenemos una flexión de placa convexa hacia arriba. Las superficies en las que las curvaturas en todos los planos tienen el mismo signo se llaman *sinclásticas*. A veces encontramos superficies en las cuales las curvaturas principales tienen signos contrarios, por ejemplo una silla de montar. Tales superficies se llaman *anticlásticas*.

2.-Relación entre momento y curvatura. Recordemos que para el caso de flexión pura de barras prismáticas una solución rigurosa para la distribución de esfuerzos se obtiene haciendo la hipótesis de que las secciones transversales de la barra permanecen planas durante la flexión y únicamente giran al rededor de su eje neutro de manera que siempre permanecen normales a la deformada. La combinación de tal flexión en dos direcciones perpendiculares nos lleva a la flexión pura de placas. Comencemos con la flexión pura de una placa rectangular debida a momentos uniformemente distribuidos sobre su frontera, como indica la Fig.2. Tomamos el plano *xy* como el plano medio de la placa antes de la flexión y los ejes *x* e *y* a lo largo de la frontera de la placa. El eje *z* es entonces perpendicular al plano medio y positivo hacia abajo. Sea M_x el momento flexionante por unidad de longitud que actúa sobre la frontera paralela al eje *y* y, M_y el momento flexionante por unidad de longitud que actúa sobre la frontera paralela al eje *x*, estos momentos los consideramos positivos cuando están actuando como se indica en la figura, esto es, cuando producen compresión en la cara superior de la placa y tensión en la inferior. El espesor de la placa lo representamos por *h* y lo consideramos pequeño en comparación con las otras dimensiones.

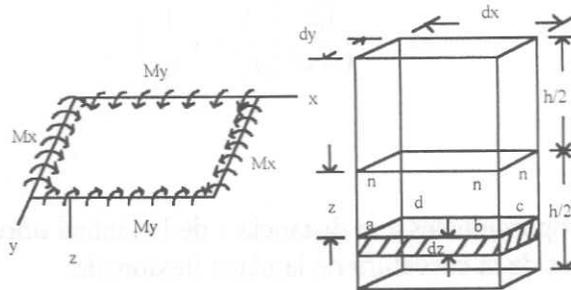


Fig.2

Fig.3

Consideremos un elemento separado de la placa por dos pares de planos paralelos a los planos xz y yz como lo indica la Fig.3, puesto que el caso de la Fig.2 es la combinación de dos flexiones uniformes las condiciones de los esfuerzos son idénticas en todos los elementos como indica la Fig.3 y se tiene una flexión uniforme de la placa. Haciendo la hipótesis de que durante la flexión de la placa las caras laterales del elemento permanecen planas y giran sobre las fibras neutras m de tal modo que permanecen normales a la superficie media deformada de la placa, puede concluirse que el plano medio de la placa no sufre variación alguna de dimensiones en esta flexión y por lo tanto se dice que la superficie media es además *superficie neutra*. Las deformaciones longitudinales en las direcciones x y y de una lámina elemental $abcd$, Fig.3, a una distancia z de la superficie neutra son, como en el caso de una viga

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (a)$$

Utilizando ahora la ley de Hooke

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = 0$$

los esfuerzos correspondientes en la lámina $abcd$ son

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right)$$
(b)

Estos esfuerzos son proporcionales a la distancia z de la lámina $abcd$ a la superficie neutra y dependen de los valores de la curvatura de la placa flexionada.

Los esfuerzos normales, distribuidos sobre las caras laterales del elemento en la Fig.3, pueden reducirse a pares de fuerzas, cuyo valor total por unidad de longitud debe ser evidentemente igual a los momentos externos M_x y M_y . Así obtenemos las ecuaciones

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dy dz = M_x dy$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dx dz = M_y dx$$
(c)

Utilizando las Ecs.b obtenemos

$$M_x = D \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$
(1.2.1)

$$M_y = D \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$
(1.2.2)

donde D es la rigidez a flexión de la placa y se define como

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Consideremos a la Fig.4, el esfuerzo que actúa sobre ac puede ser determinado por medio de las ecuaciones de la estática. Reduciendo esta ecuación a una componente normal σ_n y una componente tangencial τ_{nt} , los valores de estas componentes se obtienen proyectando las fuerzas que actúan sobre el elemento acd sobre las direcciones n y t respectivamente, que dan las conocidas ecuaciones:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \tag{d}$$

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha$$

en las que α es el ángulo entre la normal n y el eje x o entre la dirección t y el eje y , ver Fig.4a. El ángulo se considera positivo si se mide en el sentido de las agujas del reloj.

Sumando todos los σ_n que actúan sobre el espesor de la placa obtenemos el momento flexionante que actúa sobre la sección ac de la placa, cuyo valor por unidad de longitud según ac es

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha \tag{1.2.3}$$

De igual manera se calcula el momento torsionante que actúa sobre ac

$$M_{nt} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z dz = \frac{1}{2}(M_x - M_y) \sin 2\alpha \tag{1.2.4}$$

Los signos de M_n y M_{nt} se determinan con la regla del tornillo para la mano derecha.

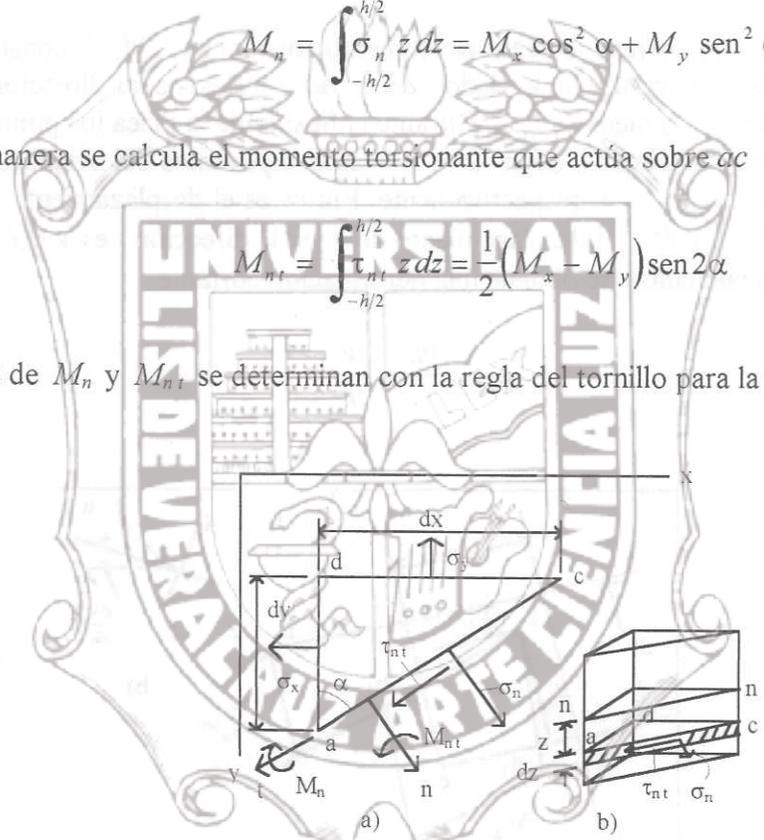


Fig.4

Cuando α vale 0 ó π la Ec.1.2.3 da $M_n = M_x$. Para $\alpha = \pi/2$ ó $3\pi/2$ se obtiene $M_n = M_y$. Los momentos M_{nt} se anulan para estos valores de α . Así se obtienen las condiciones indicadas en la Fig.2.

Representemos ahora M_n y M_{nt} , en función de las curvaturas y torsión de la superficie media de la placa, sustituyendo en la Ec.1.2.3 M_x y M_y por sus expresiones 1.2.1 y 1.2.2 hallamos

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \right) + \nu D \left(\frac{1}{r_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \cos^2 \alpha \right)$$

Utilizando la primera de las Ecs.1.1.3 resulta que las expresiones entre paréntesis de la ecuación anterior, representan las curvaturas de la superficie media en las direcciones n y t respectivamente. De ahí que

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_n} + \nu \frac{1}{r_t} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (1.2.5)$$

Para obtener la expresión correspondiente al momento torsionante M_{nt} , consideremos la deformación de una lámina $abcd$ con los lados ab y ad paralelos a las direcciones n y t y a una distancia z del plano medio, Fig.5. Durante la flexión de la placa los puntos a, b, c y d sufren pequeños desplazamientos. Sean u y v las componentes del desplazamiento del punto a en las direcciones n y t respectivamente. Entonces el desplazamiento de d en la dirección n es $u + (\partial u / \partial t) dt$, y el desplazamiento de b en la dirección t es $v + (\partial v / \partial n) dn$. Debido a estos desplazamientos, se obtiene una deformación cortante

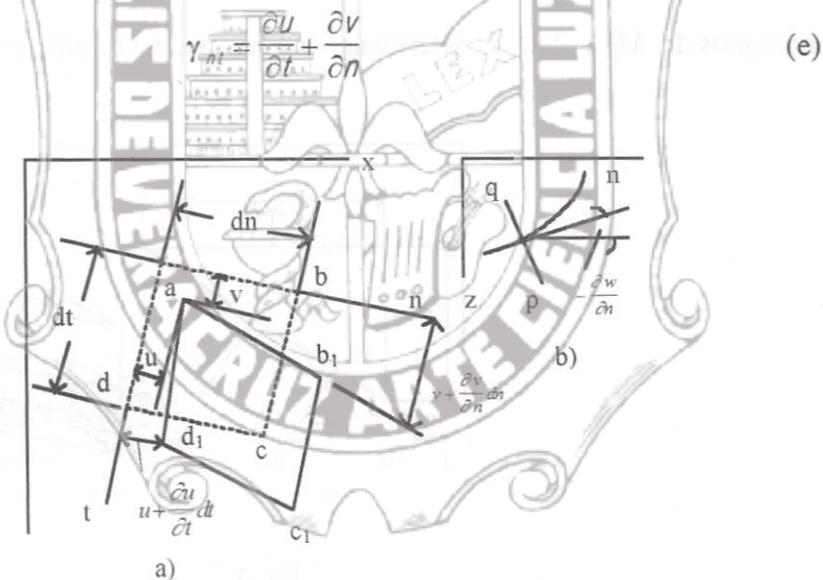


Fig.5

El correspondiente esfuerzo cortante es

$$\tau_{nt} = G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \right) \quad (f)$$

De la Fig.5b, que representa la sección de la superficie media cortada por un plano normal a través del eje n , se puede ver que el ángulo de giro en el sentido de las agujas del reloj de un elemento pq , que inicialmente era perpendicular al plano xy respecto a un eje perpendicular

al plano nz es igual a $-\partial w / \partial n$. Debido a este giro un punto del elemento a una distancia z de la superficie neutra tiene un desplazamiento en la dirección n que vale

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial n}$$

Considerando la sección normal a través del eje t se puede demostrar que el mismo punto tiene un desplazamiento en la dirección t que vale

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial t}$$

Sustituyendo estos valores de u y v en la Ec.f se tiene

$$\tau_{nt} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (1.2.6)$$

y la expresión 1.2.4, del momento flexionante toma la forma

$$M_{n,t} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z dz = \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (1.2.7)$$

Se ve que el momento torsionante para las direcciones perpendiculares dadas n y t es proporcional a la torsión de la superficie media correspondiente a las mismas direcciones.

Cuando las direcciones n y t coinciden con los ejes x y y sólo existen los momentos flexionantes M_x y M_y que actúan sobre las secciones perpendiculares a esos ejes, Fig.2. Por consiguiente la correspondiente torsión es nula, y las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son las curvaturas principales de la superficie media de la placa. Estas curvaturas pueden calcularse por las Ecs.1.2.1 y 1.2.2 si son dados los momentos flexionantes M_x y M_y . La curvatura en cualquier otra dirección definida por el ángulo α , puede calcularse por la primera de las Ecs.1.1.3.

3. Casos particulares de flexión pura. En el estudio del apartado anterior se trató el caso de una placa rectangular con momento flexionante uniformemente distribuido a lo largo de la frontera. Para obtener un caso general de flexión pura de una placa, imaginemos una sección de forma cualquiera separada de la placa considerada en la Fig.2 por una superficie cilíndrica o prismática perpendicular a la placa. Las condiciones de flexión de esta porción permanecerán invariables con tal que a lo largo del contorno de la porción aislada de la placa estén distribuidos momentos flexionantes y torsionantes que cumplan las Ecs.1.2.3 y 1.2.4. Así llegamos al caso de flexión pura de una placa de forma cualquiera y se llega a la conclusión de que se produce siempre, si sobre la frontera de la placa actúan momentos flexionantes M_n y momentos torsionantes M_{nt} distribuidos en la forma dada por las Ecs.1.2.3 y 1.2.4.

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

Consideremos como primer ejemplo el caso particular de que

$$M_x = M_y = M$$

De las Ecs.1.2.3 y 1.2.4 puede deducirse que en este caso, para una placa de cualquier forma, los momentos flexionantes están uniformemente distribuidos a lo largo de la frontera y los momentos torsionantes se anulan. De las Ecs. 1.2.1 y 1.2.2 se deduce que

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} = \frac{M}{D(1+\nu)} \quad (1.3.1)$$

esto es, la placa se deforma según una superficie esférica, cuya curvatura está dada por la Ec.1.3.1.

En el caso general en que M_x y M_y son diferentes hacemos

$$M_x = M_1 \quad \text{y} \quad M_y = M_2$$

Entonces de las Ecs.1.2.1 y 1.2.2 deducimos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_1 - \nu M_2}{D(1-\nu^2)} \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_2 - \nu M_1}{D(1-\nu^2)}$$

y además

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (b)$$

Integrando estas ecuaciones hallamos

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1-\nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1-\nu^2)} y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3 \quad (c)$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son constantes de integración. Estas constantes definen el plano a partir del cuál se miden las deflexiones w . Si este plano se toma tangente a la superficie media de la placa en el origen, las constantes de integración se anulan y la deformada tiene por ecuación

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1-\nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1-\nu^2)} y^2 \quad (d)$$

En el caso particular en que $M_1 = M_2 = M$ de la Ec.d se obtiene

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

$$w = - \frac{M(x^2 + y^2)}{2D(1+\nu)} \quad (e)$$

esto es, un paraboloides de revolución en lugar de la superficie esférica dada por la Ec.1.3.1. La contradicción de estos resultados proviene del uso de las expresiones aproximadas $\partial^2 w / \partial x^2$ y $\partial^2 w / \partial y^2$ para las curvaturas $1 / r_x$ y $1 / r_y$ al obtener la Ec.e. Estas derivadas segundas del desplazamiento se usarán también en sucesivos estudios con preferencia a las expresiones exactas de las curvaturas, de acuerdo con las hipótesis del apartado 1. Esto simplifica las ecuaciones fundamentales de la teoría de placas.

Volviendo ahora a la Ec.d, sea $M_2 = -M_1$. En este caso las curvaturas principales de las Ecs. a son

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_1}{D(1-\nu)} \quad (f)$$

y obtenemos una superficie anticlástica cuya ecuación es

$$w = - \frac{M_1}{2D(1-\nu)} (x^2 - y^2) \quad (g)$$

Las rectas paralelas al eje x se deforman según parábolas convexas hacia abajo Fig.6, mientras las rectas paralelas al eje y lo hacen según parábolas convexas hacia arriba. Los puntos de las bisectrices de los ángulos formados por los ejes x e y , verifican $x = y$ ó $x = -y$; por lo tanto, las deflexiones a lo largo de estas líneas como puede verse en la Ec.g son nulas. Todas las rectas paralelas a estas bisectrices permanecen rectas durante la flexión y únicamente giran. Un rectángulo $abcd$ limitado por tales rectas sufrirá una torsión como indica la Fig.6. Imaginemos secciones normales a la placa que pasan por las rectas ab , bc , cd , ad . De las Ecs.1.2.3

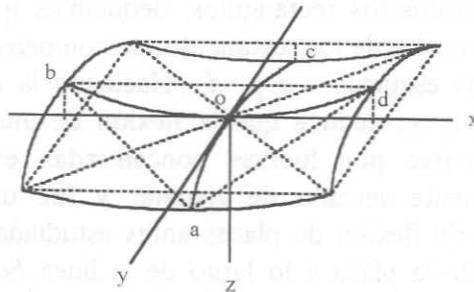


Fig.6

y 1.2.4 se deduce que los momentos flexionantes a lo largo de dichas secciones son nulos y los momentos torsionantes valen M_t en las secciones ad y bc y $-M_t$ en las secciones ab y cd .

Así la porción $abcd$ de la placa esta en las condiciones de una placa sometida a flexión pura debida a la aplicación de momentos torsionantes uniformemente distribuidos a lo largo de la frontera, ver Fig.7a. Estos momentos torsionantes son debidos a los esfuerzos cortantes horizontales distribuidos de modo continuo sobre la frontera, Ec.1.2.4. Esta distribución de esfuerzos horizontales puede ser sustituida por esfuerzos cortantes verticales que producen el mismo efecto que dicha distribución de esfuerzos.

Para demostrarlo, divídase el lado ab en rectángulos infinitamente estrechos tales como el $mnpq$ de la Fig.7b.

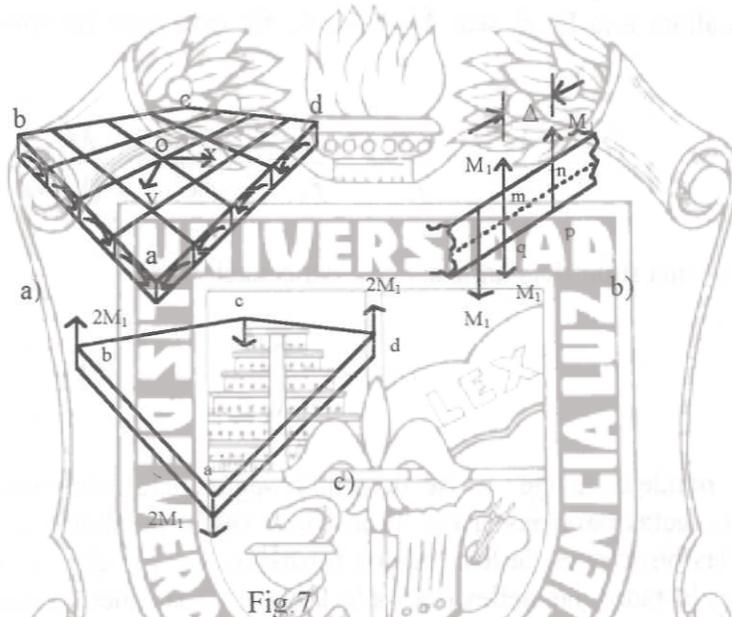


Fig. 7

Si Δ es el ancho elemental del rectángulo, el correspondiente par torsionante es $M_t \Delta$ y puede ser debido a los esfuerzos verticales del valor M_t y sentidos contrarios que actúan en los lados verticales del rectángulo. Esta sustitución de las fuerzas horizontales distribuidas por un sistema estáticamente equivalente de dos fuerzas verticales, no puede ocasionar modificación sensible en la placa, excepto a distancias comparables con el espesor de la placa, que por hipótesis es pequeño.

Haciendo lo mismo con todos los rectángulos, deducimos que todas las fuerzas M_t que actúan según los lados verticales de los rectángulos se compensan entre sí y quedan sólo dos fuerzas M_t en las que las esquinas a y d . Haciendo la misma transformación en los restantes lados de la placa, se deduce que la flexión de una placa según una superficie anticlástica puede producirse por fuerzas concentradas en las esquinas Fig.7c. Tal experimento es relativamente sencillo de ejecutar y fué utilizado para la verificación experimental de la teoría de flexión de placas antes estudiadas. En estos experimentos se midieron las deflexiones de la placa a lo largo de la línea bod , ver Fig.6, y se halló que estaban de acuerdo con los resultados teóricos deducidos de la Ec.g. las únicas discrepancias se encontraron cerca de la frontera, y eran más pronunciadas en el caso de placas relativamente gruesas, como era de esperar del anterior estudio de la transformación de los pares de torsión a lo largo de los lados.

Como último ejemplo consideremos la flexión de una placa Fig.2 según una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje y , en tal caso $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ y de las Ecs.1.2.1 y 1.2.2 se deduce

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad M_y = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (h)$$

Se ve que para producir la flexión de la placa según una superficie cilíndrica debemos aplicar no sólo momentos M_y sino también momentos M_x . Sin estos últimos la placa se flexionaría según una superficie anticlástica.

4. Límites de aplicación de las fórmulas deducidas. En el estudio de la distribución de esfuerzos para el caso de flexión pura (apartado 2) se ha supuesto que la superficie media es la superficie neutra de la placa. Esta condición sólo se cumple rigurosamente si la superficie media de la placa flexionada es una *superficie desarrollable*. Considerando, por ejemplo, la flexión pura de una placa según una superficie cilíndrica, la única limitación de la aplicación de la teoría será el requisito de que el espesor sea pequeño en comparación con los radios de curvatura.

Si una placa se flexiona según una superficie no desarrollable la superficie media sufre deformaciones longitudinales durante la flexión y la teoría de la flexión pura que hemos desarrollado será suficientemente aproximada sólo si los esfuerzos correspondientes a este alargamiento de la superficie media son pequeños en comparación con los esfuerzos máximos o, lo que es lo mismo, si la deformación en la superficie media es pequeña en comparación con la máxima deformación de flexión $h / 2r_{min}$. Este requisito impone una nueva limitación a las deflexiones de la placa, y es la de que las deflexiones w de la placa sean pequeñas en comparación con su espesor h .

Para demostrarlo consideremos la flexión de una placa circular por momentos flexionantes M uniformemente distribuidos en la frontera. La deformada, para pequeñas deformaciones, es esférica con radio r definido por la Ec.1.3.1. Sea AOB , Fig.8, una sección diametral de la placa circular flexionada, a (segmento CB) es el radio exterior del círculo antes de la flexión y δ el desplazamiento en el centro. Supongamos primero que no hay alargamiento de la superficie media de la placa en dirección radial. En tal caso el arco OB debe ser igual al radio inicial exterior a .

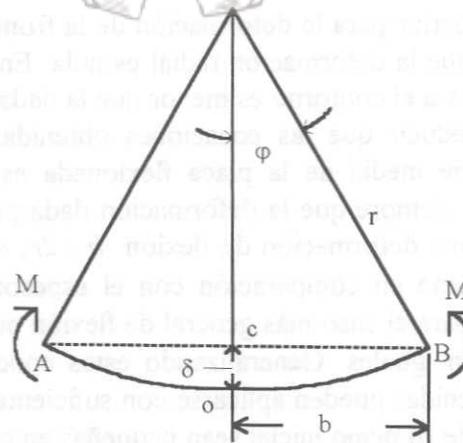


Fig.8

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

El ángulo φ y el radio b de la placa después de la flexión vienen dados por las relaciones

$$\varphi = \frac{a}{r}; a = r\varphi \qquad b = r \operatorname{sen} \varphi$$

Se ve que la flexión supuesta de la placa implica un acortamiento de la superficie media en la dirección de las circunferencias.

El valor de esta deformación en el contorno es

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} = \frac{r\varphi - r \operatorname{sen} \varphi}{r\varphi} \tag{a}$$

Para ángulos pequeños se puede decir que

$$\operatorname{sen} \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \qquad \operatorname{cos} \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

sustituyendo la primera de estas expresiones en la Ec.a obtenemos

$$\varepsilon = \varphi^2 / 6 \tag{b}$$

Para representar esta deformación en función del desplazamiento máximo δ , notemos que

$$\delta = r(1 - \operatorname{cos} \varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2}$$

De donde

$$\varphi^2 = \frac{2\delta}{r}$$

Sustituyendo en la Ec.b se obtiene finalmente

$$\varepsilon = \frac{\delta}{3r} \tag{1.4.1}$$

Esto representa un límite superior para la deformación de la frontera de la placa. Esto se ha deducido de la hipótesis de que la deformación radial es nula. En las condiciones reales hay deformación radial, la cuál, para el contorno es menor que la dada por la Ec.1.4.1.

Por lo anterior podemos deducir que las ecuaciones obtenidas en este trabajo, bajo la hipótesis de que la superficie media de la placa flexionada es su superficie neutra, son suficientemente aproximadas siempre que la deformación dada por la Ec.1.4.1 sea pequeña en comparación con la máxima deformación de flexión $h / 2r$, o lo que es lo mismo, si el desplazamiento δ es pequeño en comparación con el espesor h de la placa. Similar conclusión puede obtenerse para el caso más general de flexión pura de una placa en que las curvaturas principales no son iguales. Generalizando estas conclusiones podemos afirmar que las ecuaciones antes obtenidas pueden aplicarse con suficiente exactitud siempre que las deflexiones de una placa desde su plano inicial sean pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

5.- Ecuación diferencial de la deformada. La ecuación diferencial de la deformada se puede obtener mediante equilibrio o mediante métodos energéticos que son más generales. Primeramente utilizaremos el método del equilibrio, consideremos ahora a la siguiente figura 9, en donde existe una carga distribuida sobre la superficie superior de la placa. La intensidad de esta carga es denotada por q , tal que la carga actuando sobre el elemento¹ es $q dx dy$.



Fig.9

Sumando todas las fuerzas actuando en el elemento sobre el eje z obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

de la cual

¹ Ya que la componente de esfuerzo σ_z es despreciada, no somos actualmente capaces de aplicar la carga sobre la superficie superior o inferior de la placa. De esta forma, cualquier carga transversal simple considerada en la teoría de placas delgadas es meramente una discontinuidad en la magnitud de las fuerzas cortantes, las cuales varían de acuerdo a una ley parabólica a través del espesor de la placa. De esta forma, el peso de la placa puede ser incluido en la carga q sin afectar la exactitud de los resultados. Si el efecto de las cargas de la superficie llega a tener un especial interés, tiene que ser usada la teoría de las placas gruesas.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (1.5.1)$$

Tomando momento de todas las fuerzas actuando sobre el elemento con respecto al eje x , obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy + 0 \quad (a)$$

El momento de la carga q y el momento debido al cambio en la fuerza Q_y son despreciados en esta ecuación, ya que estos son cantidades pequeñas de orden superior. Después de simplificar, la Ec.a se convierte en

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (b)$$

De la misma forma, tomando momentos con respecto al eje y , obtenemos

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (c)$$

Ya que no hay fuerzas en las direcciones x y y , y no hay momentos con respecto al eje z , las tres ecuaciones, 1.5.1, b, y c definen completamente el equilibrio del elemento. De las ecuaciones b y c despejamos a Q_x y Q_y , las cuales se sustituyen en la Ec.1.5.1 para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q, \quad M_{yx} = M_{xy} \quad \therefore \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Para representar esta ecuación en términos de las deflexiones w de la placa, suponemos que las expresiones (1.2.5) y (1.2.7), desarrolladas para el caso de flexión pura, pueden también usarse para el caso de placas cargadas lateralmente. Esta suposición es equivalente a despreciar el efecto sobre las fuerzas cortantes Q_x y Q_y y el esfuerzo de compresión σ_z producido por la carga q .

Usando las direcciones x y y en lugar de las n y t , las cuales fueran usadas en las Ecs.1.2.5 y 1.2.7, obtenemos

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.5.3)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones para los momentos dadas por la Ec.1.5.3 en la Ec.1.5.2, obtenemos la ecuación diferencial para la deformada:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.5.4)$$

Las Ecs.(b) y (c) son usadas para calcular las fuerzas cortantes Q_x y Q_y de las cuales

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.5.5)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Como se mencionó al principio del apartado, la ecuación diferencial de la deformada también puede encontrarse mediante métodos energéticos, los cuales son más generales y nos serán de gran utilidad al plantear el método del elemento finito. Para encontrar la ecuación diferencial de la deformada mediante métodos energéticos será necesario encontrar una expresión para la energía de deformación debido a la flexión de la placa. Considérese que la placa es flexionada por momentos uniformemente distribuidos (Ver Fig.2), de tal modo que los planos xz y yz sean los planos principales de la deformada, la energía de deformación almacenada en un elemento tal como el indicado en la Fig.3, se determina calculando el trabajo producido por los momentos $M_x dy$ y $M_y dx$ sobre el elemento durante la flexión de la placa. Dado que las caras del elemento permanecen planas, el trabajo producido por los momentos $M_x dy$ se determina tomando la mitad del producto del momento y el ángulo entre las correspondientes caras del elemento después de la flexión. Puesto que $-\partial^2 w / \partial x^2$ representa la curvatura de la placa en el plano xz , el ángulo correspondiente a los momentos $M_x dy$ es $-(\partial^2 w / \partial x^2) dx$, y el trabajo producido por estos momentos es

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$$

Una expresión análoga se obtiene también para el trabajo producido por los momentos $M_y dx$. Por lo tanto, el trabajo total, igual a la energía de deformación del elemento es

$$dV = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Sustituyendo los momentos por sus expresiones 1.2.1 y 1.2.2 tenemos que la

energía de deformación del elemento viene dada en la forma siguiente

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (d)$$

Para el caso de flexión pura, las curvaturas son constantes en toda la superficie de la placa, y la energía total de deformación de la placa se obtendrá integrando la expresión anterior, quedando

$$V = \frac{1}{2} DA \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.5.6)$$

Si las direcciones x y y no coinciden con los planos principales de curvatura, actuarán sobre las caras del elemento de la Fig.3 no solo los momentos flexionantes $M_x dy$ y $M_y dx$ sino también los momentos torsionantes $M_{xy} dy$ y $M_{yx} dx$. La energía de deformación debida a los momentos flexionantes viene dada por la Ec.d.

Para determinar la expresión para la energía de deformación debida a los momentos torsionantes $M_{xy} dy$ hay que encontrar el trabajo realizado por éste a lo largo de la torsión de la superficie de la placa, así que la energía de deformación debida a $M_{xy} dy$ es

$$dV_{t1} = \frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy$$

sustituyendo la Ec.1.2.7 tenemos que

$$dV_{t1} = \frac{1}{2} D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

La misma cantidad de energía (dV_{t2}) producen los momentos $M_{yx} dx$ de modo que la energía de deformación debida a ambos momentos torsionantes es

$$dV_T = dV_{t1} + dV_{t2} = D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (e)$$

Puesto que la torsión no afecta al trabajo producido por los momentos flexionantes, la energía total de deformación de un elemento de placa se obtiene sumando la energía de la flexión (d) y la energía de la torsión (e). Así obtenemos

$$dV = \frac{1}{2}D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

o bien

$$dV = \frac{1}{2}D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (1.5.7)$$

La energía total de deformación de la placa se obtiene integrando como sigue:

$$V = \frac{1}{2}D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (1.5.8)$$

donde la integración se extiende sobre la superficie entera de la placa.

Ahora bien, la ecuación diferencial de la superficie flexionada de la placa y las condiciones de frontera se obtendrán utilizando el principio de los desplazamientos virtuales junto con la expresión para la energía de deformación de una placa deformada.

Antes de aplicar el principio de los desplazamientos virtuales consideremos a la Fig.10. Supongamos que la carga que actúa sobre la placa es normal a su superficie y los desplazamientos son pequeños en comparación con el espesor. Respecto a la frontera, supongamos que los extremos tienen libertad para moverse en el plano de la placa; en estas condiciones las reacciones en éstos son normales a la de la placa. Con estas hipótesis pueden desprejarse las deformaciones en el plano medio de la placa durante la flexión. Tomando como antes

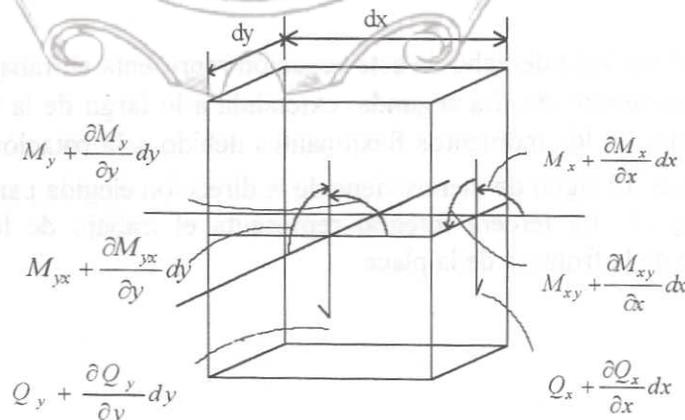


Fig.10

los ejes de coordenadas x e y en el plano medio de la placa y el eje z

perpendicular a dicho plano, consideremos un elemento separado de la placa por dos pares de planos paralelos a los planos xz y yz como indica la figura 10. Además de los momentos flexionantes M_x y M_y y los momentos torsionantes M_{xy} que se consideraban en la flexión pura, hay esfuerzos cortantes verticales¹ que actúan en las caras del elemento. Los valores de estos esfuerzos cortantes por unidad de longitud paralela a los ejes y y x se denominan Q_x y Q_y respectivamente y valen

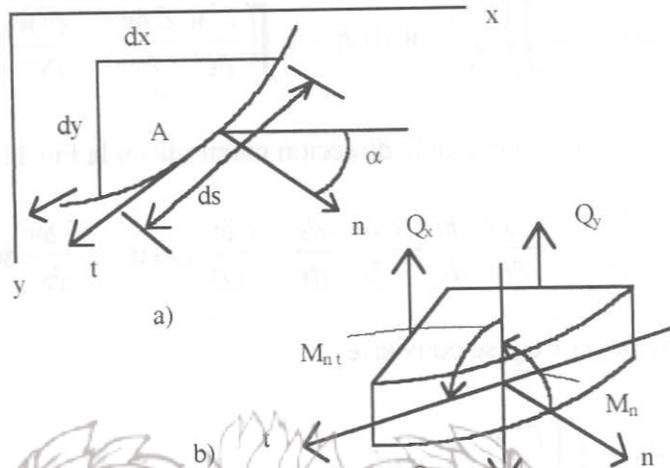
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (f)$$

Aplicando ahora el principio de los desplazamientos virtuales, suponemos que se produce una pequeña variación infinitesimal δw de la deflexión w . Entonces el correspondiente cambio en la energía de deformación de la placa debe ser igual al trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento virtual. Para calcular este trabajo debemos considerar no solamente la carga lateral q distribuida sobre la superficie de la placa sino también el momento flexionante M_n y las fuerzas transversales $Q_n - (\partial M_n / \partial s)$ distribuidas a lo largo de la frontera de la placa, estas fuerzas transversales o cortantes son el resultado de sustituir el momento torsionante a lo largo de la frontera de la placa por un par de fuerzas mecánicamente equivalente. Por lo tanto la ecuación general, dada por el principio de los desplazamientos virtuales, es

$$\delta V = \iint q \delta w \, dx \, dy - \int M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, ds + \int \left(Q_n - \frac{\partial M_n}{\partial s} \right) \delta w \, ds \quad (g)$$

La primera integral del lado derecho de esta ecuación representa el trabajo de la carga lateral durante el desplazamiento δw . La segunda, extendida a lo largo de la frontera de la placa, representa el trabajo de los momentos flexionantes debido a la rotación $\partial(\delta w)/\partial n$ de los extremos de la placa. El signo de menos viene de la dirección elegida para M_n y la normal n indicado en la Fig.11. La tercera integral representa el trabajo de la fuerza transversal aplicada a lo largo de la frontera de la placa.

¹ No habrá esfuerzos cortantes horizontales ni esfuerzos normales en las caras del elemento, puesto que se considera despreciable la deformación en el plano medio de la placa.



a)

b)

Fig. 11

Para calcular la variación δV de la energía de deformación de la placa usaremos integración por partes la cual se demostrará a detalle para el primer término de la Ec. 1.5.8. La pequeña variación de este término es

$$\begin{aligned}
 \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy = 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy \\
 &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] dx dy \\
 &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{h}$$

En los primeros dos términos después del signo de integral en la Ec.h la doble integración puede ser reemplazada por una integral simple si recordamos que para cualquier función F de x y y se cumple el teorema de la divergencia:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int F \cos \alpha ds \quad \iint \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int F \sin \alpha ds \tag{i}$$

En estas expresiones las integrales simples se extienden a lo largo de la frontera, y α es el ángulo entre la normal y el eje x , como se muestra en la Fig. 11. Usando las primeras de las Ecs.i, podemos representar el lado derecho de la Ecs.h como sigue

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + 2 \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) \cos \alpha ds \quad (j)$$

Avanzando a lo largo de la frontera en la dirección mostrada en la Fig. 11, tenemos

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \frac{dn}{dx} + \frac{\partial \delta w}{\partial s} \frac{ds}{dx} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha$$

Con esta transformación, la Ec.j se convierte

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + \\ &2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos^2 \alpha ds - 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \cos \alpha ds \\ &- 2 \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \cos \alpha ds \end{aligned} \quad (k)$$

Fijemos nuestra atención en la tercera integral del lado derecho de la Ec.k, si a ésta la integramos por partes, tenemos

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \cos \alpha ds = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \delta w \Big|_A^B - \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación es nulo, ya que la variación de w en los puntos A y B es igual a cero. De esta manera obtenemos

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \cos \alpha ds = - \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec.k, finalmente obtenemos la variación del primer término en la expresión 1.5.8. para la energía de deformación en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \\ &+ 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos \alpha \right] \delta w ds \end{aligned} \quad (l)$$

Transformando de manera similar la variación de los otros términos de la expresión 1.5.8, obtenemos

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{sen}^2 \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{sen} \alpha \cos \alpha \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \text{sen} \alpha \right] \delta w ds \quad (m)$$

análogamente

$$\delta \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy + \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{sen}^2 \alpha \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \int \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \text{sen} \alpha + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \text{sen} \alpha \cos \alpha \right] \right\} \delta w ds \quad (n)$$

finalmente la variación del último término de la Ec. 1.5.8 es

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \text{sen} \alpha \cos \alpha ds + \int \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \right] - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \text{sen} \alpha \right\} \delta w ds \quad (o)$$

Sustituyendo las variaciones dadas por las Ecs. l, m, n y o tenemos que la variación de la energía potencial de la placa puede representarse en la forma siguiente:

$$\delta V = D \left(\iint \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w dx dy + \int \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{sen}^2 \alpha \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \text{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) \right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \text{sen} \alpha \right\} \delta w ds \right) \quad (1.5.9)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec.g y recordando que δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ son cantidades arbitrariamente pequeñas que satisfacen las condiciones de frontera, concluimos que la Ec.g será válida solamente si las tres integrales del lado derecho de la Ec.1.5.9 son iguales a cero (debido a el teorema fundamental del cálculo variacional, ver L. Elsgoltz ,1977 pag. 302):

$$\iint_D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q \right) \delta w \, dx dy = 0 \quad (p)$$

$$\int \left\{ D \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} \right\} ds = 0 \quad (q)$$

$$\int \left\{ D \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \alpha \right\} - \left(Q_s - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) \right\} \delta w \, ds = 0 \quad (r)$$

La Ec.p se satisface solamente si en cada punto de la superficie media de la placa tenemos

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.5.10)$$

la cual la podemos escribir de manera diferente si introducimos los siguientes operadores:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

asi tenemos que

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (1.5.11)$$

esta expresión es la ecuación diferencial de la superficie flexionada de la placa. De las ecuaciones (q) y (r) podemos obtener las condiciones de frontera.

Por ejemplo, si la placa esta empotrada a lo largo de la frontera tenemos que δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ son cero a lo largo de ésta; y las Ecs. q y r se satisfacen.

En el caso de un extremo simplemente apoyado, $\delta w=0$ y $M_n=0$. Por lo tanto la Ec. r se cumple, y será necesario que la Ec. q cumpla con la condición

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha\right) + \nu \nabla^2 w = 0 \quad (s)$$

Para el caso particular de un lado recto simplemente apoyado y paralelo al eje y , $\alpha = 0$; por lo que de la Ec.(s) obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

la condición para un extremo simplemente apoyado.

Si la frontera de una placa esta enteramente libre, las cantidades δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ en las Ecs. q y r son arbitrarias; además, $M_n=0$ y $Q_n - (\partial M_{nt}/\partial s) = 0$. Por lo tanto, de las Ecs. q y (r), para una frontera libre tenemos

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha\right) + \nu \nabla^2 w = 0$$

$$(1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \alpha = 0$$

En el caso particular de un frontera libre rectilínea paralela al eje y , $\alpha=0$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

En el caso cuando se dan M_n y la fuerza transversal $Q_n - (\partial M_{nt}/\partial s)$ y son distribuidos a lo largo de la frontera de la placa, las correspondientes condiciones de frontera una vez más pueden ser fácilmente obtenidas usando las Ecs. q y r.

CAPITULO 2.

PLACAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE APOYADAS.

6.- Placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga sinusoidal. Tomemos los ejes coordenados como se ve en la Fig.12, y supongamos que la carga distribuida sobre la superficie de la placa se puede expresar como

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (a)$$

en donde q_0 representa la intensidad en el centro de la carga. Para este caso la Ec.1.5.10 para la superficie deformada se convierte en

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (b)$$



Fig.12

Las condiciones de frontera para los apoyos simples son

$$\begin{aligned} (1) \quad w &= 0 & (2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & \text{para } x=0 \text{ y } x=a \\ (3) \quad w &= 0 & (4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 & \text{para } y=0 \text{ y } y=b \end{aligned} \quad (c)$$

Si tomamos a

$$w = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (d)$$

como la ecuación de la deformada, podemos ver, que ésta satisface las condiciones de frontera, además, podemos determinar la constante C sustituyendo la Ec.d en la Ec.b, así encontramos que

$$C = \frac{q_0}{D} \frac{1}{\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

con esta expresión podemos determinar la superficie deformada que satisface la Ec.b y las condiciones de frontera (c), así:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (e)$$

Usando esta expresión junto con la Ec.1.5.3, encontramos que

$$M_x = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (f)$$

$$M_{xy} = \frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

Si ahora utilizamos las Ec.1.5.5, podemos calcular las fuerzas cortantes en la placa, que son

$$Q_x = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$Q_y = \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (g)$$

Para encontrar las reacciones en los extremos apoyados, procedemos como se mencionó en la sección 4. Procediendo de esa manera encontramos que para la frontera $x = a$, y la $y = b$, tenemos

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = - \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) \text{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=b} = - \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \text{sen} \frac{\pi x}{a} \quad \text{(h) e (i)}$$

De estas ecuaciones podemos observar que la distribución de presiones, sobre los extremos, sigue una ley sinusoidal. El signo menos indica que la reacción sobre la placa actúa hacia arriba. Por simetría, podemos concluir, que las Ecs. h e i representan también la distribución de presiones a lo largo de los lados $x = 0$ y $y = 0$ respectivamente. La resultante de la distribución de presiones es

$$\frac{2q_0}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) \int_0^b \text{sen} \frac{\pi y}{b} dy + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \int_0^a \text{sen} \frac{\pi x}{a} dx \right] =$$

$$= \frac{4q_0 ab}{\pi^2} + \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad \text{(j)}$$

Observando que

$$\frac{4q_0 ab}{\pi^2} = \int_0^a \int_0^b q_0 \text{sen} \frac{\pi x}{a} \text{sen} \frac{\pi y}{b} dx dy \quad \text{(k)}$$

puede concluirse que la suma de las reacciones distribuidas es mayor que la carga total sobre la placa, dada por la Ec. (k).

Este resultado puede fácilmente explicarse si notamos que, procediendo como en la sección 4, obtuvimos no solamente las reacciones distribuidas, sino también, reacciones concentradas en las esquinas de la placa.

Estas reacciones concentradas son iguales, por la simetría de la placa, y su magnitud, como puede verse en la Fig. 13, es

$$R = 2 \left(M_{xy} \right)_{x=a, y=b} = \frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad \text{(l)}$$

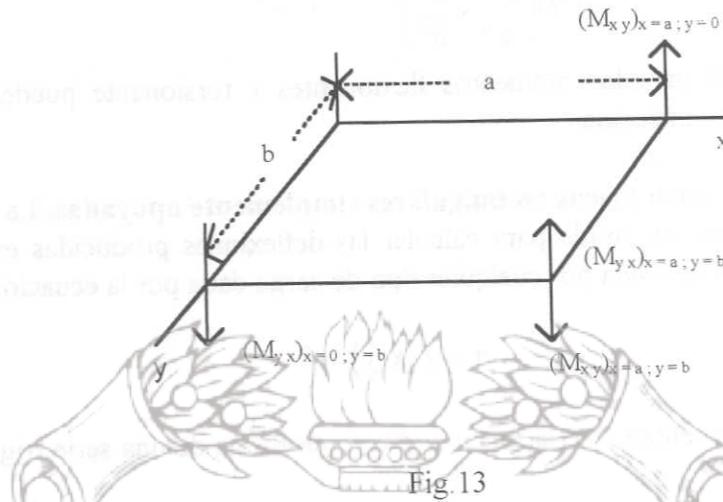


Fig. 13

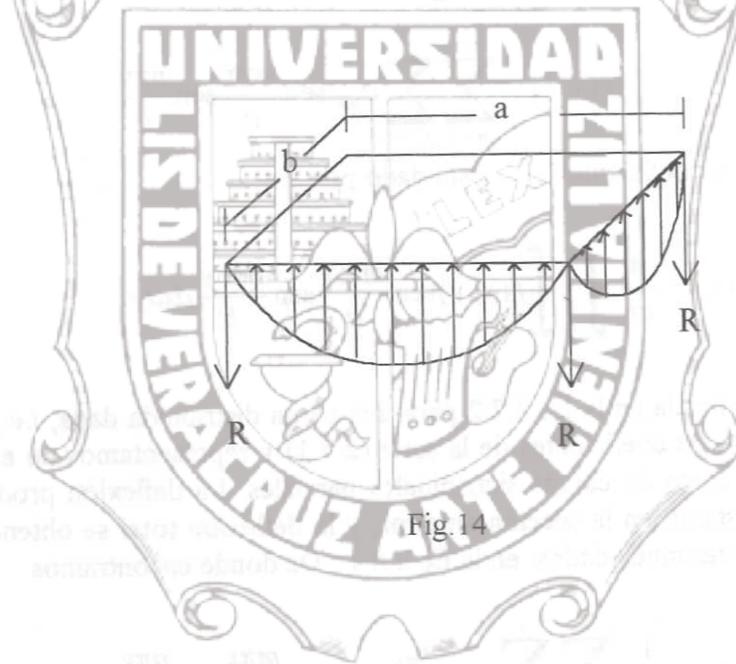


Fig. 14

El signo positivo indica que la reacción actúa hacia abajo. Su suma es exactamente igual al segundo término en la ecuación (j). Las reacciones distribuidas y concentradas, que están en equilibrio con la carga aplicada (Ec.a) se muestran en la Fig.14. De esta figura podemos observar que las esquinas de la placa tienden a subir, debido a la aplicación de la carga, y que la reacción concentrada R debe de existir para prevenirlo.

Si la distribución de la carga sinusoidal esta dada por la ecuación

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (m)$$

donde m y n son enteros, podemos proceder como antes, y obtendremos para la superficie flexionada, la siguiente expresión:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6.1)$$

de la cuál la expresión para los momentos flexionantes y torsionante pueden obtenerse fácilmente mediante diferenciación.

7.- Solución de Navier para placas rectangulares simplemente apoyadas. La solución de la sección anterior puede ser usada para calcular las deflexiones producidas en una placa rectangular simplemente apoyada por cualquier tipo de carga dada por la ecuación

$$q = f(x, y) \quad (a)$$

para este propósito representaremos la función $f(x, y)$ en forma de una serie trigonométrica doble de Fourier - Euler:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.7.1)$$

en donde cada uno de los coeficientes a_{mn} esta dado por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (2.7.2)$$

Evaluando la integral indicada en la Ec.2.7.2 para una carga distribuida dada, *i.e.*, para una $f(x, y)$ dada, encontramos los coeficientes de la serie (2.7.1) y representamos de esta forma, la carga dada, como la suma de cargas sinusoidales parciales. La deflexión producida por cada carga parcial se discutió en la sección anterior, y la deflexión total se obtendrá por la suma de cada uno de los términos dados en la Ec.2.6.1. De donde encontramos

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.7.3)$$

Suponiendo que tenemos una carga uniformemente distribuida sobre la placa, cuya expresión es

$$f(x, y) = q_0 \quad (b)$$

donde q_0 es la intensidad de la carga uniformemente distribuida. De la fórmula 2.7.2 obtenemos

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (c)$$

donde m y n son enteros impares. Si m o n , o ambos, son números pares, $a_{mn}=0$. Sustituyendo en la Ec.2.7.3, encontramos

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.7.4)$$

donde m y n son impares.

Para el caso de una carga uniforme tendremos una deflexión de la superficie simétrica con respecto a los ejes $x = a/2, y = b/2$; naturalmente todos los números pares en la serie 2.7.4 para m o n desaparecen, ya que ellos no son simétricos con respecto a los ejes arriba mencionados. La deflexión máxima de la placa se encuentra en el centro y su valor lo encontramos sustituyendo $x=a/2, y=b/2$ en la Ec.2.7.4, y vale

$$w_{max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.7.5)$$

Esta es una serie de convergencia rápida, y podemos obtener muy buena aproximación tomando solamente el primer término de la serie, el cual, por ejemplo, en el caso de una placa cuadrada vale

$$w_{max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0.00416 \frac{q_0 a^4}{D}$$

o, sustituyendo la expresión para D y suponiendo $\nu = 0.3$,

$$w_{max} = 0.0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3}$$

este resultado tiene un 2.5% de error comparado con el valor "exacto" (ver tabla 3).

La expresión para los momentos flexionantes y torsionantes se pueden obtener de la solución general Ec.2.7.4 usando las Ecs.1.5.3. Las series obtenidas de esta forma son de convergencia más lenta que la de la serie 2.7.4, en una sección subsecuente daremos una solución con convergencia más rápida.

La solución de Navier también puede aplicarse al caso de una carga simple P uniformemente distribuida sobre

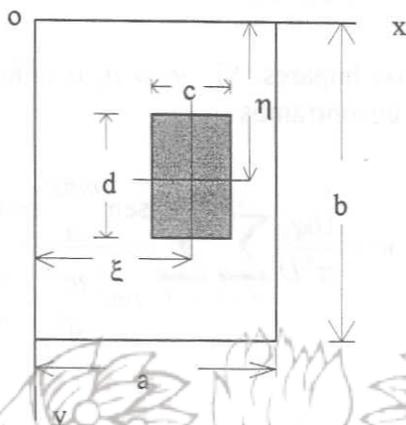


Fig. 15

el área de un rectángulo, mostrado en la Fig. 15. En virtud de la Ec. 2.7.2 tenemos

$$a_{mn} = \frac{4P}{abcd} \int_{\xi-\frac{c}{2}}^{\xi+\frac{c}{2}} \int_{\eta-\frac{d}{2}}^{\eta+\frac{d}{2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

o

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mncd} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b} \quad (d)$$

Si, $\xi = a/2$, $\eta = b/2$, $c = a$ y $d = b$, la Ec. d se reduce a Ec. c para placas uniformemente cargadas.

Otro caso de interés práctico es el de una carga concentrada simple en cualquier punto dado $x = \xi$, $y = \eta$ de la placa. Usando la Ec. d y haciendo que c y d tiendan a cero, obtenemos la expresión

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \quad (e)$$

y, de la Ec. 2.7.3, la deflexión en ese punto es

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.7.6)$$

La serie converge rápidamente, y podemos obtener la deflexión en cualquier punto de la placa con suficiente exactitud tomando solamente algunos de los primeros términos de la serie. Por ejemplo, calculemos la deflexión a la mitad de la placa, cuando la carga también está aplicada a la mitad. Entonces, tenemos $\xi = x = a/2$, $\eta = y = b/2$, así la serie 2.7.6 se convierte en

$$w_{max} = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (f)$$

donde m y n son impares. En el caso de una placa cuadrada, la expresión (f) se convierte en

$$w_{max} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}$$

Tomando los primeros cuatro términos de la serie encontramos que

$$w_{max} = \frac{0.01121Pa^2}{D}$$

este resultado es 3.5% menor que el valor "exacto" (ver tabla 16).

Como la serie 2.7.1, que representa la intensidad de la carga concentrada, es divergente en $x = \xi$ y $y = \eta$, también lo serán las series que expresan los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes en el punto de aplicación de la carga.

8.- Solución de Lévy para placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas. En la discusión del problema de flexión de placas rectangulares que tienen dos lados opuestos simplemente apoyados, M. Lévy¹ sugirió tomar la solución en la forma de una serie

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.8.1)$$

donde Y_m es una función de y solamente. Consideremos que los lados $x = 0$ y $x = a$ (Fig.16) están simplemente apoyados, además el eje de las x se colocará a la mitad de la placa para aprovechar la simetría de ésta sobre el eje x . Cada término de la serie 2.8.1 satisface las condiciones de frontera $w = 0$ y $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ sobre los lados $x = 0$ y $x = a$. Queda determinar Y_m de tal forma que satisfaga las condiciones de frontera en los lados $y = \pm b / 2$ y también la ecuación de la superficie deformada.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (a)$$

¹ Ver *Compt.rend.*, vol. 129, pp 535-539, 1899

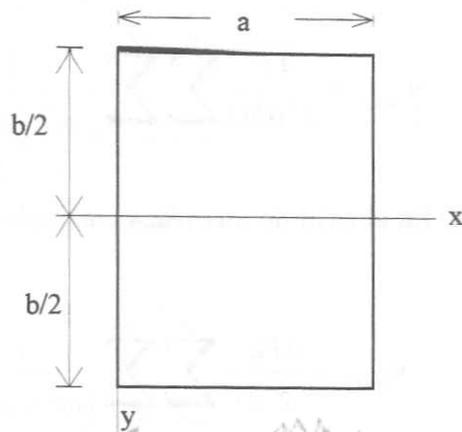


Fig.16

Al aplicar este método a placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas, unas simplificaciones adicionales pueden hacerse tomando la solución de la Ec.a en la forma

donde

$$w = w_1 + w_2 \tag{b}$$

$$w_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) \tag{c}$$

representa la deflexión de una franja uniformemente cargada y paralela al eje x . Esta satisface la Ec.a y también las condiciones de frontera en los extremos $x = 0$ y $x = a$. La expresión w_2 evidentemente también satisface la ecuación

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = 0 \tag{d}$$

ya que w_1 satisface la parte no homogénea de la Ec.a; w_2 debe de elegirse de tal manera que haga que la suma (b), satisfaga todas las condiciones de frontera de la placa. Tomando w_2 en la forma de la serie de Fourier Euler 2.8.1 y sustituyéndola en la Ec.d encontramos que Y_m es igual a:

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

Observando que la deflexión de la superficie de la placa es simétrica con respecto al eje x , solo conservaremos las funciones pares de y , además $C_m = D_m = 0$. De esta manera

$$w_2 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \tag{e}$$

la cuál satisface la Ec.d y también las condiciones de frontera en los extremos $x = 0$ y $x = a$. Tendremos que w es igual a

$$w = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

que satisface a la Ec.a y las condiciones de frontera.

Solo restar ajustar las constantes de integración A_m y B_m de tal manera que satisfaga las condiciones de frontera

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (g)$$

sobre los lados $y = \pm b/2$. Llamando

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m$$

estas constantes de integración son

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad (h)$$

Con ellas encontramos que el valor de la deformada es:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \operatorname{senh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad \text{Ec.(2.8.2)}$$

donde m es un número impar, con esta ecuación la deflexión puede ser fácilmente calculada en cualquier punto de la placa.

La deflexión máxima se obtiene al centro de la placa ($x = a/2, y = 0$), donde

$$w_{m \text{ a } x} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) \quad (i)$$

donde m es un número impar. No tomando en cuenta el segundo término en los paréntesis, esta serie representa la deflexión en la parte media de una franja uniformemente cargada. Por lo tanto podemos representar la expresión (i) en la forma siguiente:

$$w_{m \text{ a } x} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \quad (2.8.3)$$

para m impar. La serie de esta expresión converge muy rápidamente, y podemos obtener una buena aproximación tomando únicamente los primeros términos. Considerando una placa cuadrada como ejemplo, con la expresión para α_m usada en la Ec. h tenemos

$$\alpha_1 = \pi/2 \quad \alpha_3 = 3\pi/2 \quad \dots$$

de donde la Ec. 2.8.3 da

$$w_{max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} (0.68562 - 0.00025 + \dots) = 0.00406 \frac{qa^4}{D}$$

Se puede ver que el segundo término entre paréntesis es pequeño y podemos considerar solamente el primer término de la serie, ya que la fórmula para la deflexión es correcta para tres cifras significativas.

Utilizando la Ec.2.8.3, podemos representar la deformación máxima de la placa en la forma

$$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad (2.8.4)$$

donde el factor numérico α depende de la relación b/a de los lados de la placa. En la Tabla 3 se dan algunos valores de α .

Para el extremo x la expresión del momento flexionante es

$$(M_x)_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 [2\nu B_m - (1-\nu) A_m] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(M_y)_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 [2B_m + (1-\nu) A_m] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

para m impar. Las dos series convergen rápidamente y los momentos pueden fácilmente calcularse y representarse en la forma

$$(M_x)_{y=0} = \beta' qa^2 \quad (M_y)_{y=0} = \beta_1' qa^2 \quad (j)$$

Los valores numéricos de los factores β' y β_1' son dados en la Tabla 1.

Los momentos flexionantes que actúan a lo largo de la línea media $x = a/2$ pueden calcularse y representarse en forma similar

$$(M_x)_{x=a/2} = \beta'' qa^2 \quad (M_y)_{x=a/2} = \beta_1'' qa^2 \quad (k)$$

Los valores de los exponentes β'' y β_1'' son dados en la Tabla 2.

Los valores máximos para estos momentos,

$$(M_x)_{max} = \beta qa^2 \quad (M_y)_{max} = \beta_1 qa^2 \quad (l)$$

están en el centro de la placa ($x = a/2, y = 0$), y los correspondientes factores β y β_1 están dados en la Tabla 3. La distribución de los momentos en el caso particular de una placa cuadrada se muestran en la Figura 17.

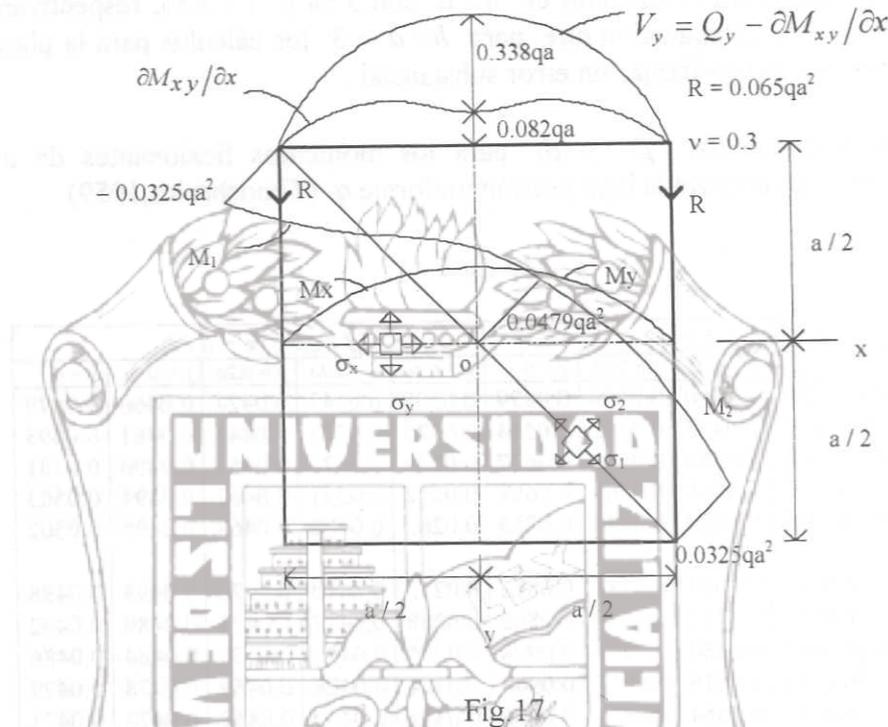


Tabla 1. Valores numéricos de β y β_1 para los momentos flexionantes de una placa rectangular simplemente apoyada bajo presión uniforme q . (Timoshenko, 1959)
 $v = 0.3, b \geq a$

b/a	$M_x = \beta q a^2, y = 0$					$M_y = \beta_1 q a^2, y = 0$				
	$x = 0.1a$	$x = 0.2a$	$x = 0.3a$	$x = 0.4a$	$x = 0.5a$	$x = 0.1a$	$x = 0.2a$	$x = 0.3a$	$x = 0.4a$	$x = 0.5a$
1.0	0.0209	0.0343	0.0424	0.0466	0.0479	0.0168	0.0303	0.0400	0.0459	0.0479
1.1	0.0234	0.0389	0.0486	0.0541	0.0554	0.0172	0.0311	0.0412	0.0475	0.0493
1.2	0.0256	0.0432	0.0545	0.0607	0.0627	0.0174	0.0315	0.0417	0.0480	0.0501
1.3	0.0277	0.0472	0.0599	0.0671	0.0694	0.0175	0.0316	0.0419	0.0482	0.0503
1.4	0.0297	0.0509	0.0649	0.0730	0.0755	0.0175	0.0315	0.0418	0.0481	0.0502
1.5	0.0314	0.0544	0.0695	0.0783	0.0812	0.0173	0.0312	0.0415	0.0478	0.0498
1.6	0.0330	0.0572	0.0736	0.0831	0.0862	0.0171	0.0309	0.0411	0.0472	0.0492
1.7	0.0344	0.0599	0.0773	0.0874	0.0908	0.0169	0.0306	0.0405	0.0466	0.0486
1.8	0.0357	0.0623	0.0806	0.0913	0.0948	0.0167	0.0301	0.0399	0.0459	0.0479
1.9	0.0368	0.0644	0.0835	0.0948	0.0985	0.0165	0.0297	0.0393	0.0451	0.0471
2.0	0.0378	0.0663	0.0861	0.0978	0.1017	0.0162	0.0292	0.0387	0.0444	0.0464
2.5	0.0413	0.0729	0.0952	0.1085	0.1129	0.0152	0.0272	0.0359	0.0412	0.0430
3.0	0.0431	0.0763	0.1000	0.1142	0.1189	0.0145	0.0258	0.0340	0.0390	0.0406
4.0	0.0445	0.0791	0.1038	0.1185	0.1235	0.0138	0.0246	0.0322	0.0369	0.0384
∞	0.0450	0.0800	0.1050	0.1200	0.1250	0.0135	0.0240	0.0315	0.0360	0.0375

De la Tabla 3 vemos que, como la relación b/a crece, la deflexión máxima y el momento máximo de la placa rápidamente se aproxima a los valores calculados para una franja uniformemente cargada o para una placa flexionada en una superficie cilíndrica obtenida haciendo $b/a = \infty$. Para $b/a = 3$ la diferencia entre la deflexión de la franja y la placa es de 6.5 %. Para $b/a = 5$ es menor de 0.5 %. Las diferencias entre los máximos momentos flexionantes para las mismas relaciones de b/a son 5 % y 1/3 %, respectivamente. Se puede concluir de esta comparación que para $b/a > 3$ los cálculos para la placa pueden reemplazarse por los de una franja, sin error substancial.

Tabla 2. Valores numéricos β y β_1 para los momentos flexionantes de una placa rectangular simplemente apoyada bajo presión uniforme q . (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3, b \geq a$

b/a	$M_x = \beta q a^2, x = a/2$					$M_y = \beta_1 q a^2, x = a/2$				
	$y = 0.4a$	$y = 0.3a$	$y = 0.2a$	$y = 0.1a$	$y = 0$	$y = 0.4a$	$y = 0.3a$	$y = 0.2a$	$y = 0.1a$	$y = 0$
1.0	0.0168	0.0303	0.0400	0.0459	0.0479	0.0209	0.0343	0.0424	0.0466	0.0479
1.1	0.0197	0.0353	0.0465	0.0532	0.0554	0.0225	0.0363	0.0442	0.0481	0.0493
1.2	0.0225	0.0401	0.0526	0.0600	0.0627	0.0239	0.0379	0.0454	0.0490	0.0501
1.3	0.0252	0.0477	0.0585	0.0667	0.0694	0.0252	0.0391	0.0462	0.0494	0.0503
1.4	0.0275	0.0491	0.0639	0.0727	0.0755	0.0263	0.0402	0.0468	0.0495	0.0502
1.5	0.0302	0.0532	0.0690	0.0781	0.0812	0.0275	0.0410	0.0470	0.0493	0.0498
1.6	0.0324	0.0571	0.0737	0.0832	0.0862	0.0288	0.0417	0.0471	0.0489	0.0492
1.7	0.0348	0.0607	0.0780	0.0877	0.0908	0.0295	0.0423	0.0470	0.0484	0.0486
1.8	0.0371	0.0641	0.0819	0.0917	0.0948	0.0304	0.0428	0.0469	0.0478	0.0479
1.9	0.0392	0.0673	0.0854	0.0953	0.0985	0.0314	0.0433	0.0467	0.0472	0.0471
2.0	0.0413	0.0703	0.0887	0.0986	0.1017	0.0322	0.0436	0.0464	0.0465	0.0464
2.5	0.0505	0.0828	0.1012	0.1102	0.1129	0.0360	0.0446	0.0447	0.0435	0.0430
3.0	0.0586	0.0923	0.1092	0.1168	0.1189	0.0389	0.0447	0.0431	0.0413	0.0406
4.0	0.0723	0.1054	0.1180	0.1224	0.1235	0.0426	0.0436	0.0406	0.0389	0.0384
∞	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375

Las fuerzas cortantes para los extremos $x = 0$ y $y = -b/2$ son

$$(Q_x)_{x=0} = \frac{qa}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cosh \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m}$$

$$(Q_y)_{y=-b/2} = 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \sinh \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh \alpha_m}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Estas fuerzas cortantes tienen su valor numéricamente máximo a la mitad de la frontera, donde

$$(Q_x)_{x=0, y=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh \alpha_m} = \gamma qa \quad (m)$$

$$(Q_y)_{x=a/2, y=-b/2} = \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \tanh \alpha_m = \gamma_1 qa$$

Los valores numéricos de γ y γ_1 son dados en la Tabla 3.

Tabla 3. Valores numéricos de α , β , γ , δ , n para una placa rectangular simplemente apoyada y uniformemente cargada. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$w_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$(M_x)_{max} = \beta qa^2$	$(M_y)_{max} = \beta_1 qa^2$	$(Q_x)_{max} = \gamma qa$	$(Q_y)_{max} = \gamma_1 qa$	$(V_x)_{max} = \delta qa$	$(V_y)_{max} = \delta_1 qa$	$R = n qa^2$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1.0	0.00406	0.0479	0.0479	0.338	0.338	0.420	0.420	0.065
1.1	0.00485	0.0554	0.0493	0.360	0.347	0.440	0.440	0.070
1.2	0.00564	0.0627	0.0501	0.380	0.353	0.455	0.453	0.074
1.3	0.00638	0.0694	0.0503	0.397	0.357	0.468	0.464	0.079
1.4	0.00705	0.0755	0.0502	0.411	0.361	0.478	0.471	0.083
1.5	0.00772	0.0812	0.0498	0.424	0.363	0.486	0.480	0.085
1.6	0.00830	0.0862	0.0492	0.435	0.365	0.491	0.485	0.086
1.7	0.00883	0.0908	0.0486	0.444	0.367	0.496	0.488	0.088
1.8	0.00931	0.0948	0.0479	0.452	0.368	0.499	0.491	0.090
1.9	0.00974	0.0985	0.0471	0.459	0.369	0.502	0.494	0.091
2.0	0.01013	0.1017	0.0464	0.465	0.370	0.503	0.496	0.092
3.0	0.01223	0.1189	0.0406	0.493	0.372	0.505	0.498	0.093
4.0	0.01282	0.1235	0.0384	0.498	0.372	0.502	0.500	0.094
5.0	0.01297	0.1246	0.0375	0.500	0.372	0.501	0.500	0.095
∞	0.01302	0.1250	0.0375	0.500	0.372	0.500	0.500	0.095

Las fuerzas de reacción a lo largo del lado $x = 0$ son dadas por la expresión

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cosh \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} + \frac{2(1-\nu)qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh^2 \alpha_m}$$

$$\left(\alpha_m \sinh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

El máximo valor numérico de esta presión esta a la mitad del lado ($y = 0$), en cuyo punto encontramos

$$(V_x)_{x=0, y=0} = qa \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \cosh \alpha_m} + \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m}{m^2 \cosh^2 \alpha_m} \right] = \delta qa \quad (n)$$

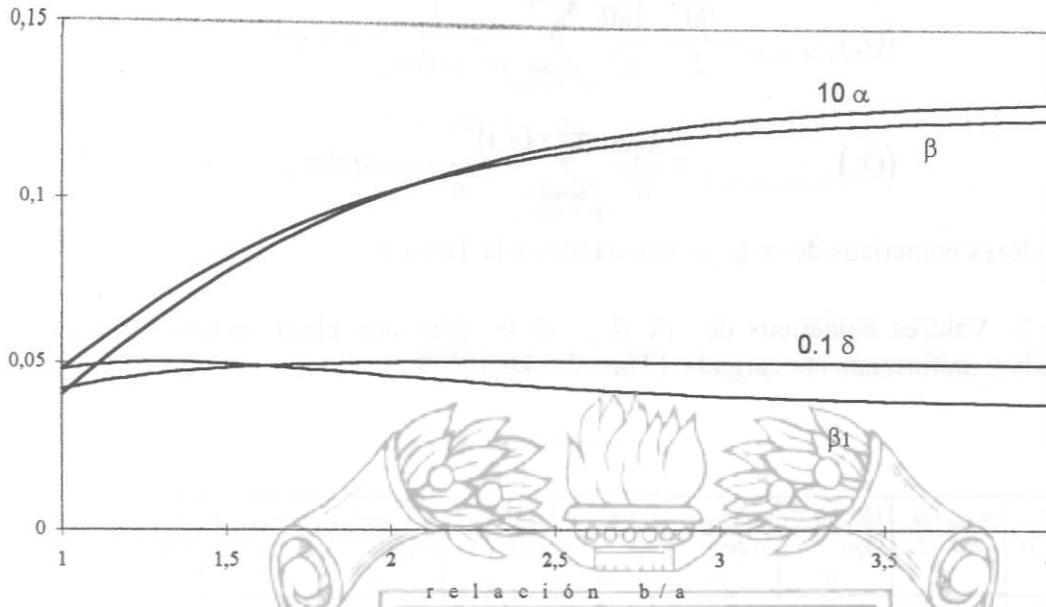


Fig.18

donde δ es un factor numérico que depende de ν y de la relación b/a , el cuál puede obtenerse fácilmente recapitulando la rápida convergencia de la serie en la expresión (n). Los valores numéricos de δ y δ_1 , los cuales corresponden a los de la mitad de los lados paralelos a el eje x , son dados en la Tabla 3. La distribución de la presión (q) a lo largo de los lados de una placa cuadrada se muestra en la Fig.17. La parte de la presión producida por el momento torsionante M_{xy} también se muestra. Esta ultima presión se equilibra por las fuerzas reactivas concentradas en las esquinas de la placa. La magnitud de esta fuerza esta dada por la expresión

$$R = 2(M_{xy})_{x=a, y=b/2} = 2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b/2} = \frac{4(1-\nu)qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \cosh \alpha_m} [(1 + \alpha_m \tanh \alpha_m) \sinh \alpha_m - \alpha_m \cosh \alpha_m] = nqa^2 \quad (o)$$

Las fuerzas se dirigen hacia abajo y previenen que las esquinas de la placa se levanten durante la flexión. Los valores de los coeficientes n son dados en la Tabla 3.

Los valores de los factores α , β , β_1 , δ como funciones de la relación b/a están representados por las curvas en la Fig.18.

Aún con la presencia de las fuerzas R , las cuales actúan hacia abajo, se debe proporcionar un anclaje a las esquinas de la placa, si ésta no esta sólidamente unida con sus apoyos.

9. Placas rectangulares simplemente apoyadas sujetas a diferentes condiciones de carga.

- *Presión hidrostática.*

Suponga que una placa rectangular simplemente apoyada se carga como se muestra en la Fig.19.

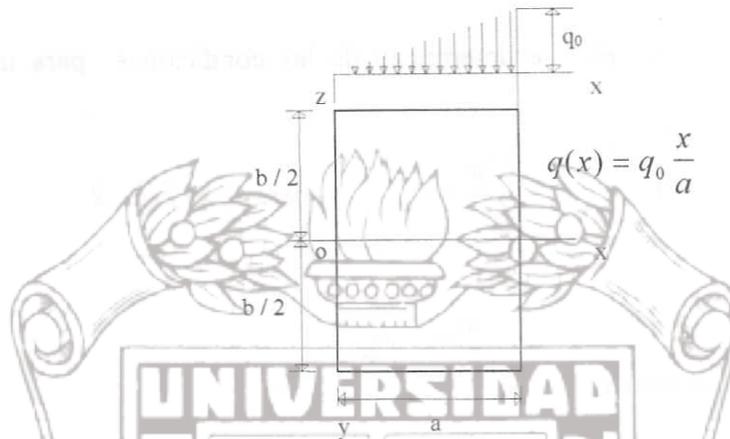


Fig.19

La deflexión para esta placa la vamos a encontrar procediendo como en el caso de una placa con carga uniformemente distribuida, así tomamos la deflexión de la placa en la forma

en la cuál $w = w_1 + w_2$ (a)

$$w_1 = \frac{q_0}{360D} \left(\frac{3x^5}{a} - 10ax^3 + 7a^3x \right) = \frac{2q_0a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$
 (b)

representa la deflexión de una franja de la placa sujeta a una carga triangular paralela a el eje x . La expresión satisface la ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} = \frac{q_0 x}{aD}$$
 (c)

y las condiciones de frontera

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = a$$

Igual que en el apartado 8, la deflexión w_2 se toma en la forma de la serie de Fourier - Euler

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$
 (d)

donde la deflexión w_2 tienen la misma forma de la sección anterior, debido también a la simetría con respecto a el eje x . Sustituyendo las expresiones (b) y (d) en la Ec.a, obtenemos

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

donde las constantes A_m y B_m se determinan de las condiciones para una frontera simplemente apoyada

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } y = \pm b/2$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

llamando

de estas condiciones encontramos

$$A_m = - \frac{(2 + \alpha_m \tanh \alpha_m)(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad (f)$$

Haciendo $y = 0$, tenemos que la deflexión de la placa a lo largo del eje x es

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{m^5 \pi^5} + A_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.1)$$

Para el caso particular de una placa cuadrada $a = b$, por lo que la deflexión a lo largo del eje x es

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \left(0.002055 \sin \frac{\pi x}{a} - 0.000177 \sin \frac{2\pi x}{a} + 0.000025 \sin \frac{3\pi x}{a} - \dots \right) \quad (g)$$

La deflexión al centro de la placa es

$$(w)_{x=a/2, y=0} = 0.00203 \frac{q_0 a^4}{D} \quad (h)$$

Observe que el valor de la carga, para este caso, es la mitad que el de una placa cuadrada uniformemente cargada. El punto para la deflexión máxima se encuentra igualando a cero la derivada con respecto a x de la Ec.g, y ésta se localiza en el punto $x = 0.557a$ y vale $0.00206 q_0 a^4 / D$.

La deflexión en varios puntos a lo largo del eje x en la Fig.19 están dados en la Tabla 4. En ésta se ve que, cuando la relación $b/a \rightarrow \infty$, la deflexión se aproxima a los valores calculados para una franja dada en la Ec.b.

Los momentos flexionantes M_x y M_y se calculan con ayuda de las Ecs.1.5.3, los cuales están dados por las series

$$(M_x)_{y=0} = \frac{q_0(a^2x - x^3)}{6a} - \frac{q_0a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \cosh \alpha_m} [2 + (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m] \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.2)$$

el primer término de esta ecuación representa el momento flexionante de una franja sujeta a una carga triangular. α_m ha sido definido anteriormente.

Tabla 4. Valores numéricos α para la deflexión de una placa rectangular simplemente apoyada bajo presión hidrostática $q = q_0 x/a$. (Timoshenko, 1959)

$b > a$
 $w = \alpha q_0 a^4 / D, y = 0$

b/a	$x = 0.25a$	$x = 0.5a$	$x = 0.6a$	$x = 0.75a$
1.0	0.00131	0.00203	0.00201	0.00162
1.1	0.00158	0.00243	0.00242	0.00192
1.2	0.00186	0.00282	0.00279	0.00221
1.3	0.00212	0.00319	0.00315	0.00248
1.4	0.00235	0.00353	0.00348	0.00273
1.5	0.00257	0.00386	0.00379	0.00296
1.6	0.00277	0.00415	0.00407	0.00317
1.7	0.00296	0.00441	0.00432	0.00335
1.8	0.00313	0.00465	0.00455	0.00353
1.9	0.00328	0.00487	0.00475	0.00368
2.0	0.00342	0.00506	0.00494	0.00382
3.0	0.00416	0.00612	0.00592	0.00456
4.0	0.00437	0.00641	0.00622	0.00477
5.0	0.00441	0.00648	0.00629	0.00483
∞	0.00443	0.00651	0.00632	0.00484

La serie obtenida converge rápidamente, y se obtiene una muy buena aproximación de M_x tomando solo algunos de los primeros términos. De esta manera el momento flexionante en un punto del eje x se puede representar por la ecuación

$$(M_x)_{y=0} = \beta q_0 a^2 \quad (i)$$

donde β es un factor numérico que depende de la abscisa x del punto. En forma similar obtenemos

$$(M_y)_{y=0} = \beta_1 q_0 a^2 \quad (j)$$

Los valores numéricos de los factores β y β_1 de las ecuaciones anteriores son dados en la Tabla 5. En esta Tabla se puede ver que para valores de $b \geq 4a$ los momentos son muy parecidos a los valores de los momentos en una franja bajo carga triangular.

Tabla 5. Valores numéricos de β y β_1 para los momentos flexionantes de una placa rectangular simplemente apoyada sujeta a presión hidrostática $q = q_0 x/a$ (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3, \quad b > a$

b/a	$M_x = \beta a^2 q_0, \quad y = 0$				$M_y = \beta_1 a^2 q_0, \quad y = 0$			
	$x = 0.25a$	$x = 0.5a$	$x = 0.6a$	$x = 0.75a$	$x = 0.25a$	$x = 0.5a$	$x = 0.6a$	$x = 0.75a$
1.0	0.0132	0.0239	0.0264	0.0259	0.0149	0.0239	0.0245	0.0207
1.1	0.0156	0.0276	0.0302	0.0289	0.0155	0.0247	0.0251	0.0211
1.2	0.0179	0.0313	0.0338	0.0318	0.0158	0.0250	0.0254	0.0213
1.3	0.0200	0.0346	0.0371	0.0344	0.0160	0.0252	0.0255	0.0213
1.4	0.0221	0.0376	0.0402	0.0367	0.0160	0.0253	0.0254	0.0212
1.5	0.0239	0.0406	0.0429	0.0388	0.0159	0.0249	0.0252	0.0210
1.6	0.0256	0.0431	0.0454	0.0407	0.0158	0.0246	0.0249	0.0207
1.7	0.0272	0.0454	0.0476	0.0424	0.0155	0.0243	0.0246	0.0205
1.8	0.0286	0.0474	0.0496	0.0439	0.0153	0.0239	0.0242	0.0202
1.9	0.0298	0.0492	0.0513	0.0452	0.0150	0.0235	0.0238	0.0199
2.0	0.0309	0.0508	0.0529	0.0463	0.0148	0.0232	0.0234	0.0197
3.0	0.0369	0.0594	0.0611	0.0525	0.0128	0.0202	0.0207	0.0176
4.0	0.0385	0.0617	0.0632	0.0541	0.0120	0.0192	0.0196	0.0168
5.0	0.0389	0.0623	0.0638	0.0546	0.0118	0.0187	0.0193	0.0166
∞	0.0391	0.0625	0.0640	0.0547	0.0177	0.0187	0.0192	0.0165

Utilizando las Ecs. 1.5.5 tenemos que las expresiones generales para las fuerzas cortantes Q_x y Q_y son

$$Q_x = \frac{q_0(a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cosh \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.3)$$

$$Q_y = -\frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sinh \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.4)$$

La magnitud de las reacciones verticales V_x y V_y a lo largo de la frontera se obtienen equilibrando las fuerzas cortantes con las derivadas de los momentos flexionantes. A lo largo de las fronteras $x = 0$ y $x = a$ estas reacciones se pueden representar en la forma

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0, x=a} = \pm \delta q_0 a \quad (2.9.5)$$

y a lo largo de las fronteras $y = \pm b/2$ en la forma

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=\pm b/2} = \mp \delta_1 q_0 b \quad (2.9.6)$$

en las cuales δ y δ_1 son factores numéricos que dependen de la relación b/a y de las coordenadas de los puntos tomados sobre la frontera. Varios valores de estos factores están dados en la Tabla 6.

Tabla 6. Valores numéricos de los factores δ y δ_1 para las reacciones de una placa rectangular simplemente apoyada sujeta a presión hidrostática $q = q_0 x/a$. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3, \quad b > a$

b/a	Reacciones $\delta q_0 a$				Reacciones $\delta_1 q_0 b$			
	$x = 0$		$x = a$		$y = \pm b/2$			
	$y = 0$	$y = 0.25b$	$y = 0$	$y = 0.25b$	$x = 0.25a$	$x = 0.50a$	$x = 0.60a$	$x = 0.75a$
1.0	0.126	0.098	0.294	0.256	0.115	0.210	0.234	0.239
1.1	0.136	0.107	0.304	0.267	0.110	0.199	0.221	0.224
1.2	0.144	0.114	0.312	0.276	0.105	0.189	0.208	0.209
1.3	0.150	0.121	0.318	0.284	0.100	0.178	0.196	0.196
1.4	0.155	0.126	0.323	0.292	0.095	0.169	0.185	0.184
1.5	0.159	0.132	0.327	0.297	0.090	0.160	0.175	0.174
1.6	0.162	0.136	0.330	0.302	0.086	0.151	0.166	0.164
1.7	0.164	0.140	0.332	0.306	0.082	0.144	0.157	0.155
1.8	0.166	0.143	0.333	0.310	0.078	0.136	0.149	0.147
1.9	0.167	0.146	0.334	0.313	0.074	0.130	0.142	0.140
2.0	0.168	0.149	0.335	0.316	0.071	0.124	0.135	0.134
3.0	0.169	0.163	0.336	0.331	0.048	0.083	0.091	0.089
4.0	0.168	0.167	0.334	0.334	0.036	0.063	0.068	0.067
5.0	0.167	0.167	0.334	0.335	0.029	0.050	0.055	0.054
∞	0.167	0.167	0.333	0.333				

La magnitud de las fuerzas concentradas que deben de aplicarse para prevenir que las esquinas de la placa se levanten durante la flexión se puede encontrar de los valores de los momentos flexionantes $M_{x,y}$ en las esquinas. Como la carga no es simétrica, las reacciones R_1 en $x = 0$ y $y = \pm b/2$ son diferentes de las reacciones R_2 en $x = a$ y $y = \pm b/2$.

Éstas pueden escribirse en la forma siguiente :

$$R_1 = n_1 q_0 a b \qquad R_2 = n_2 q_0 a b \qquad (2.9.7)$$

Los valores de n_1 y n_2 sondados en la Tabla 7.

Tabla 7. Valores numéricos n_1 y n_2 para las reacciones R_1 y R_2 en las esquinas de una placa rectangular simplemente apoyada bajo presión hidrostática $q = q_0 x/a$. (Timoshenko, 1959)

		$\nu = 0.3, \quad b > a$													
b/a		1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	3.0	4.0	5.0
n_1		0.026	0.026	0.026	0.026	0.025	0.024	0.023	0.022	0.021	0.021	0.020	0.014	0.010	0.008
n_2		0.039	0.038	0.037	0.036	0.035	0.033	0.032	0.030	0.029	0.028	0.026	0.018	0.014	0.011

Como la carga uniforme q_0 se obtiene al superponer las dos cargas triangulares $q = q_0 x/a$ y $q_0(a-x)/a$, se puede concluir que para los correspondientes valores de b/a la suma $n_1 + n_2$ de los factores de la Tabla 7 multiplicados por b/a debe de ser igual al correspondiente valor de n en la ultima columna de la Tabla 3

- *Carga en forma de prisma triangular.*

Suponga que la intensidad de la carga se representa mediante un triángulo isósceles como se muestra en la Fig.20a. La deformada de la superficie puede nuevamente representarse en la forma

$$w = w_1 + w_2 \qquad (a)$$

en la cuál w_1 representa la deflexión de una franja simplemente apoyada paralela al eje de las x y con el mismo tipo de carga que la de la placa; w_2 se representa con la misma serie que en los casos anteriores.

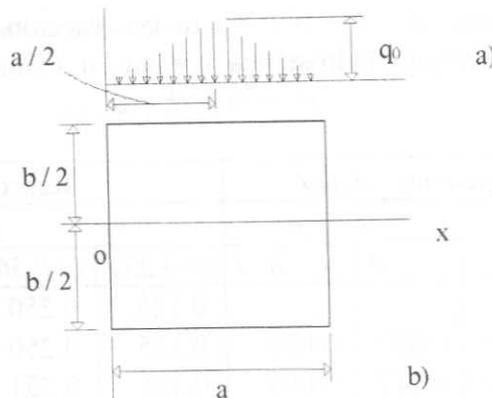


Fig. 20

w_1 se representa como¹

$$w_1 = \frac{4q_0 a^2}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[\int_0^{a/2} \xi \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} d\xi + \int_{a/2}^a (a-\xi) \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} d\xi \right] = \quad (b)$$

$$= \frac{8q_0 a^4}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^6} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Por lo tanto w será igual a la suma de w_1 y w_2 .

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.8)$$

Esta expresión satisface a la Ec.1.5.10 y también la condiciones de frontera en los extremos $x = 0$ y $x = a$. Las constantes A_m y B_m pueden encontrarse de las condiciones a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$, las cuales son iguales que las de la sección anterior y de la cuál tenemos

$$A_m = - \frac{4(2 + \alpha_m \tanh \alpha_m) (-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6 \cosh \alpha_m} \quad (c)$$

$$B_m = \frac{4(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6 \cosh \alpha_m}$$

donde, igual que antes

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

¹ Ver Timoshenko, "Theory of plates and shells", pag.131, 1959.

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

Tabla 8. Valores numéricos δ y δ_1 para las reacciones en una placa rectangular simplemente apoyada bajo presión hidrostática $q = q_0 x / a$. (Timoshenko, 1959)
 $\nu = 0.3, b < a$

a / b	Reacciones $\delta q_0 a$				Reacciones $\delta_1 q_0 b$			
	$x = 0$		$x = a$		$y = \pm b / 2$			
	$y = 0$	$y = b/4$	$y = 0$	$y = b/4$	$x=0.25a$	$x=0.50a$	$x = 0.60a$	$x=0.75a$
∞	0.125	0.250	0.300	0.375
5.0	0.008	0.006	0.092	0.076	0.125	0.250	0.301	0.379
4.0	0.013	0.010	0.112	0.093	0.125	0.251	0.301	0.377
3.0	0.023	0.018	0.143	0.119	0.125	0.252	0.304	0.368
2.0	0.050	0.038	0.197	0.166	0.127	0.251	0.296	0.337
1.9	0.055	0.041	0.205	0.172	0.127	0.251	0.294	0.331
1.8	0.060	0.045	0.213	0.179	0.128	0.249	0.291	0.325
1.7	0.066	0.050	0.221	0.187	0.127	0.248	0.288	0.318
1.6	0.073	0.055	0.230	0.195	0.127	0.245	0.284	0.311
1.5	0.080	0.060	0.240	0.204	0.127	0.243	0.279	0.302
1.4	0.088	0.067	0.250	0.213	0.126	0.239	0.273	0.292
1.3	0.097	0.074	0.260	0.223	0.124	0.234	0.266	0.281
1.2	0.106	0.081	0.271	0.233	0.122	0.227	0.257	0.269
1.1	0.116	0.090	0.282	0.244	0.120	0.220	0.247	0.255
1.0	0.126	0.098	0.294	0.256	0.115	0.210	0.234	0.239

Tabla 9. Factores numéricos n_1 y n_2 en las Ecs.2.9.7 para las reacciones R_1 y R_2 en las esquinas de una placa rectangular simplemente apoyada sujeta a presión hidrostática $q = q_0 x / a$. (Timoshenko, 1959)
 $\nu = 0.3, b < a$

a / b	5	4	3	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0
n_1	0.002	0.004	0.006	0.013	0.014	0.016	0.017	0.018	0.020	0.021	0.023	0.024	0.025	0.026
n_2	0.017	0.020	0.025	0.033	0.034	0.035	0.036	0.037	0.037	0.038	0.039	0.039	0.039	0.039

Para obtener la deflexión de la placa a lo largo del eje x hagamos $y = 0$ en la Ec.2.9.8. Entonces

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \right] \text{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

La deflexión máxima está en el centro de la placa, y se calcula con la serie

$$w_{max} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi^6 m^6} + A_m (-1)^{(m-1)/2} \right]$$

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

La cual se puede representar en la forma

$$w_{max} = \alpha \frac{q_0 a^4}{D} \quad (d)$$

en la cual el factor α depende de la magnitud de la relación b/a . Algunos valores de este factor son dados en la Tabla 10.

Tabla 10. Valores numéricos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, n$ para una placa rectangular simplemente apoyada sujeta a una carga en forma de un prisma triangular. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3, b > a$

b/a	$w_{max} = \alpha q_0 a^4 / D$ α	$(M_x)_{max} = \beta q_0 a^2$ β	$(M_y)_{max} = \beta_1 q_0 a^2$ β_1	$(Q_x)_{max} = \gamma q_0 a$ γ	$(Q_y)_{max} = \gamma_1 q_0 a$ γ_1	$(V_x)_{max} = \delta q_0 a$ δ	$(V_y)_{max} = \delta_1 q_0 b$ δ_1	$R = n q_0 a b$ n
1.0	0.00263	0.0340	0.0317	0.199	0.315	0.147	0.250	0.038
1.1	0.00314	0.0390	0.0326	0.212	0.297	0.161	0.232	0.038
1.2	0.00364	0.0436	0.0330	0.222	0.280	0.173	0.216	0.037
1.3	0.00411	0.0479	0.0332	0.230	0.265	0.184	0.202	0.036
1.4	0.00455	0.0518	0.0331	0.236	0.250	0.193	0.189	0.035
1.5	0.00496	0.0554	0.0329	0.241	0.236	0.202	0.178	0.034
1.6	0.00533	0.0586	0.0325	0.246	0.224	0.208	0.168	0.033
1.7	0.00567	0.0615	0.0321	0.247	0.212	0.214	0.158	0.031
1.8	0.00597	0.0641	0.0316	0.249	0.201	0.220	0.150	0.030
1.9	0.00625	0.0664	0.0311	0.251	0.191	0.224	0.142	0.029
2.0	0.00649	0.0685	0.0306	0.252	0.183	0.228	0.135	0.028
3.0	0.00783	0.0794	0.0270	0.253	0.122	0.245	0.090	0.019
∞	0.00833	0.0833	0.0250	0.250		0.250		

Evidentemente los valores máximos para estos momentos se obtienen en el centro de la placa y pueden representarse como:

$$(M_x)_{max} = \beta q_0 a^2 \quad (M_y)_{max} = \beta_1 q_0 a^2 \quad (e)$$

Las valores de los factores β y β_1 están dados en la Tabla 10. Esta tabla también da los valores numéricos $\gamma, \gamma_1, \delta, \delta_1$, y n para calcular las fuerzas cortantes $(Q_x)_{max} = \gamma q_0 a$, $(Q_y)_{max} = \gamma_1 q_0 b$ a la mitad de los lados $x = 0$ y $y = -b/2$ de la placa, y el valor de las reacciones

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{x y}}{\partial y} \right)_{max} = \delta q_0 a$$

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{x y}}{\partial x} \right)_{max} = \delta_1 q_0 b$$

(f)

en los mismos puntos, y además las reacciones concentradas $R = nq_0ab$ en las esquinas de la placa, las cuales actúan hacia abajo y previenen que las esquinas de la placa se levanten. Todos estos valores son dados para $b > a$. Cuando $b < a$, se puede obtener una convergencia más rápida tomando la porción w_1 de la deflexión de la placa en la forma de la deflexión de una franja paralela a la dirección y . Se omite la derivación de estos valores y solo se dan los resultados numéricos en la Tabla 11.

Tabla 11. Valores numéricos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y n para una placa rectangular simplemente apoyada sujeta a una carga en forma de prisma triangular. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3, b < a$

a/b	$w_{max} = \alpha q_0 b^4 / D$	$(M_x)_{max} = \beta q_0 b^2$	$(M_y)_{max} = \beta_1 q_0 b^2$	$(Q_x)_{max} = \gamma q_0 a$	$(Q_y)_{max} = \gamma_1 q_0 b$	$(V_x)_{max} = \delta q_0 a$	$(V_y)_{max} = \delta_1 q_0 b$	$R = n q_0 a b$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
∞	0.01302	0.0375	0.1250		0.500		0.500	
3.0	0.00868	0.0387	0.0922	0.045	0.442	0.027	0.410	0.010
2.0	0.00686	0.0392	0.0707	0.091	0.412	0.057	0.365	0.023
1.9	0.00656	0.0392	0.0681	0.098	0.407	0.062	0.358	0.024
1.8	0.00624	0.0391	0.0651	0.106	0.402	0.098	0.350	0.026
1.7	0.00588	0.0390	0.0609	0.115	0.396	0.074	0.342	0.028
1.6	0.00549	0.0388	0.0585	0.124	0.389	0.081	0.332	0.029
1.5	0.00508	0.0386	0.0548	0.135	0.381	0.090	0.322	0.031
1.4	0.00464	0.0382	0.0508	0.146	0.371	0.099	0.311	0.033
1.3	0.00418	0.0376	0.0464	0.158	0.360	0.109	0.298	0.035
1.2	0.00367	0.0368	0.0418	0.171	0.347	0.120	0.284	0.036
1.1	0.00316	0.0356	0.0369	0.185	0.332	0.133	0.268	0.037
1.0	0.00263	0.0340	0.0317	0.199	0.315	0.147	0.250	0.038

Superponiendo la carga mostrada en la Fig.20a con la carga uniforme de intensidad q_0 , se obtiene la carga mostrada en la Fig.21, lo cual es válido ya que estamos trabajando con deformaciones pequeñas que están dentro del rango elástico. La información relativa a las deflexiones y esfuerzos en este caso se pueden obtener mediante la combinación de los datos de la Tabla 3 con los de la Tabla 10 u 11.

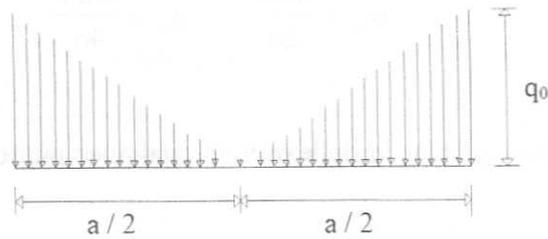


Fig. 21

• Placas parcialmente cargadas.

Consideremos el caso de flexión simétrica, en el cuál, una carga uniforme q se distribuye sobre el rectángulo sombreado (Fig.22) de lados c y d .

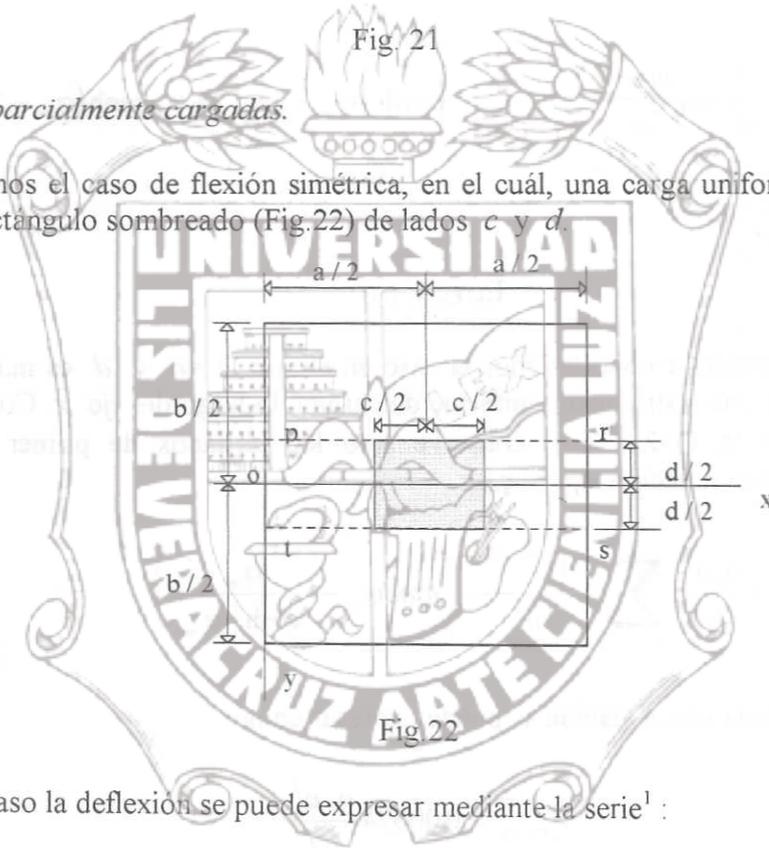


Fig.22

Para este caso la deflexión se puede expresar mediante la serie¹ :

$$w = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{2a} \left\{ 1 - \frac{\cosh \frac{m\pi y}{a}}{\cosh \alpha_m} \right. \\ \left. \left[\cosh(\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{senh}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{senh} 2\gamma_m}{2 \cosh \alpha_m} \right] \right. \\ \left. + \frac{\cosh(\alpha_m - 2\gamma_m)}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right\} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.9)$$

donde

¹ Ver Timoshenko, "Theory of plates and shells", pag.135, 1959.

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad \gamma_m = \frac{m\pi d}{4a}$$

Con esta ecuación podemos calcular la deflexión en cualquier punto de la porción cargada de la placa.

La deflexión máxima de la placa se localizará en el centro y se obtiene sustituyendo $y = 0$, $x = a/2$ en la Ec.2.9.9, la cual da

$$w_{max} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{2a} \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh \alpha_m} \left[\cosh(\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{senh}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{senh} 2\gamma_m}{2 \cosh \alpha_m} \right] \right\}$$

Ec.(2.9.10)

Como un ejemplo particular consideremos el caso en el que $c = a$ y d es muy pequeño. Este caso representa una distribución uniforme de carga a lo largo del eje x . Considere que γ_m es pequeño en la Ec.2.9.10 y conserve solo los términos de primer orden, así obtendremos, usando la notación $qd = q_0$,

$$w_{max} = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2} \operatorname{tanh} \alpha_m}{m^4 \cosh^2 \alpha_m} \quad (2.9.11)$$

Para una placa cuadrada esta ecuación se puede expresar como

$$w_{max} = 0.00674 \frac{q_0 a^3}{D}$$

En el caso general la deflexión máxima se puede representar en la forma

$$\begin{aligned} w_{max} &= \alpha \frac{q_0 a^3}{D} \quad \text{para } a < b \\ &= \alpha \frac{q_0 b^3}{D} \quad \text{para } a > b \end{aligned}$$

Algunos valores de los coeficientes α están dados en la Tabla 12.

Tabla 12. Valores numéricos de α para la deflexión de una placa rectangular simplemente apoyada y uniformemente cargada a lo largo del eje de simetría paralelo a la dimensión a . (Timoshenko, 1959)

$$w_{max} = \alpha q_0 a^3 / D$$

b/a	2	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0
α	0.00987	0.00911	0.00882	0.00844	0.00799	0.00742	0.00674
a/b	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.0	∞
α	0.00802	0.00926	0.01042	0.01151	0.01251	0.01629	0.02083

Regresando a l caso general en el que d no es esencialmente pequeño y c puede tener cualquier valor, las expresiones para los momentos flexionantes M_x y M_y se pueden encontrar usando la Ec.2.9.9. Los valores máximos de estos momentos se encuentran en el centro de la placa y se pueden representar por las fórmulas

$$(M_x)_{max} = \beta cdq = \beta P \qquad (M_y)_{max} = \beta_1 cdq = \beta_1 P$$

donde $P = cdq$ es la carga total. Los valores de los factores numéricos β para una placa cuadrada y varios tamaños del rectángulo cargado son dados en la Tabla 13. Los coeficientes β_1 se pueden obtener también de esta tabla, intercambiando la posición de las letras c y d .

Los Factores numéricos β y β_1 para placas con relaciones $b=1.4a$ y $b=2a$ están dados en las Tablas 14 y 15 respectivamente.

Tabla 13. Valores numéricos de β para el $(M_x)_{max}$ en una placa cuadrada simplemente apoyada y parcialmente cargada. (Timoshenko, 1959)

$$\nu = 0.3$$

$c/a =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
d/a	Coeficientes β en la expresión $(M_x)_{max} = \beta P$										
0.0	∞	0.321	0.251	0.209	0.180	0.158	0.141	0.125	0.112	0.102	0.092
0.1	0.378	0.284	0.232	0.197	0.170	0.150	0.134	0.120	0.108	0.098	0.088
0.2	0.308	0.254	0.214	0.184	0.161	0.142	0.127	0.114	0.103	0.093	0.084
0.3	0.262	0.225	0.195	0.168	0.151	0.134	0.120	0.108	0.098	0.088	0.080
0.4	0.232	0.203	0.179	0.158	0.141	0.126	0.113	0.102	0.092	0.084	0.076
0.5	0.208	0.185	0.164	0.146	0.131	0.116	0.106	0.096	0.087	0.079	0.071
0.6	0.188	0.168	0.150	0.135	0.121	0.109	0.099	0.090	0.081	0.074	0.067
0.7	0.170	0.153	0.137	0.124	0.112	0.101	0.091	0.083	0.076	0.069	0.062
0.8	0.155	0.140	0.126	0.114	0.103	0.094	0.085	0.077	0.070	0.063	0.057
0.9	0.141	0.127	0.115	0.104	0.094	0.086	0.078	0.070	0.064	0.058	0.053
1.0	0.127	0.115	0.105	0.095	0.086	0.078	0.071	0.064	0.058	0.053	0.048

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Tabla 14. Valores numéricos de β y β_1 para $(M_x)_{\max}$ y $(M_y)_{\max}$ en una placa rectangular parcialmente cargada con $b = 1.4a$. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

c/a	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
d/a	Coeficientes β en la expresión $(M_x)_{\max} = \beta P$						Coeficientes β_1 en la expresión $(M_y)_{\max} = \beta_1 P$					
0.0	∞	0.276	0.208	0.163	0.134	0.110	∞	0.299	0.230	0.183	0.151	0.125
0.2	0.332	0.239	0.186	0.152	0.125	0.103	0.246	0.208	0.175	0.147	0.124	0.102
0.4	0.261	0.207	0.168	0.138	0.115	0.095	0.177	0.157	0.138	0.119	0.101	0.083
0.6	0.219	0.181	0.151	0.126	0.105	0.086	0.138	0.125	0.111	0.097	0.083	0.069
0.8	0.187	0.158	0.134	0.112	0.094	0.078	0.112	0.102	0.091	0.080	0.069	0.058
1.0	0.162	0.139	0.118	0.100	0.084	0.070	0.093	0.085	0.077	0.068	0.058	0.049
1.2	0.141	0.122	0.104	0.089	0.075	0.062	0.079	0.072	0.065	0.058	0.050	0.042
1.4	0.123	0.106	0.091	0.077	0.065	0.054	0.068	0.062	0.056	0.050	0.043	0.036

Tabla 15. Valores numéricos de β y β_1 para $(M_x)_{\max}$ y $(M_y)_{\max}$ en una placa rectangular parcialmente cargada con $b = 2a$. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

c/a	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
d/a	Coeficientes β en la expresión $(M_x)_{\max} = \beta P$						Coeficientes β_1 en la expresión $(M_y)_{\max} = \beta_1 P$					
0.0	∞	0.289	0.220	0.175	0.144	0.118	∞	0.294	0.225	0.179	0.148	0.122
0.2	0.347	0.252	0.199	0.163	0.135	0.111	0.242	0.203	0.170	0.143	0.120	0.099
0.4	0.275	0.221	0.181	0.150	0.125	0.103	0.172	0.152	0.133	0.114	0.097	0.081
0.6	0.233	0.195	0.164	0.138	0.115	0.095	0.133	0.120	0.106	0.093	0.079	0.066
0.8	0.203	0.174	0.148	0.126	0.106	0.088	0.107	0.097	0.087	0.076	0.065	0.054
1.0	0.179	0.155	0.134	0.115	0.097	0.080	0.089	0.081	0.073	0.064	0.055	0.046
1.2	0.161	0.141	0.122	0.105	0.089	0.074	0.074	0.068	0.061	0.054	0.046	0.039
1.4	0.144	0.127	0.111	0.096	0.081	0.068	0.064	0.058	0.052	0.046	0.040	0.033
1.6	0.130	0.115	0.101	0.087	0.074	0.062	0.056	0.051	0.046	0.040	0.035	0.029
1.8	0.118	0.104	0.091	0.079	0.067	0.056	0.049	0.045	0.041	0.036	0.031	0.026
2.0	0.107	0.094	0.083	0.072	0.061	0.051	0.044	0.041	0.037	0.032	0.028	0.023

• *Carga concentrada.*

Usando el método de Navier se encontró una expresión en forma de una serie doble para la deflexión de una placa que soportaba una carga simple P en algún punto dado $x = \xi$, $y = \eta$, ver Fig.23.

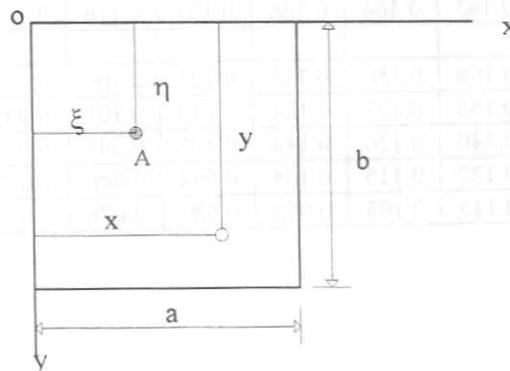


Fig.23

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

La serie que nos proporciona el valor de la deflexión es:

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \beta_m \coth \beta_m - \frac{\beta_m y_1}{b} \coth \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \coth \frac{\beta_m \eta}{b} \right) \frac{\sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \sinh \frac{\beta_m y_1}{b} \sinh \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \sinh \beta_m} \quad (2.9.12)$$

en la cual

$$\beta_m = m\pi b / a \quad y_1 = b - y \quad y \geq \eta$$

Para el caso de $y < \eta$ la cantidad y_1 debe de reemplazarse por y y la cantidad η por $\eta_1 = b - \eta$, y entonces utilizamos la Ec.2.9.12.



Fig.24

Consideremos ahora el caso particular de una carga concentrada P en algún punto A sobre el eje de simetría de la placa, el cual será el eje x (Fig.24). Utilizando $\eta = b / 2$ y la notación

$$\alpha_m = m\pi b / 2a = \beta_m / 2 \quad (a)$$

La expresión general para la deflexión de la placa (Ec.2.9.12) será

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \alpha_m \tanh \alpha_m \right) \sinh \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) - \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \cosh \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \right] \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \cosh \alpha_m}$$

$$(2.9.13)$$

la cual es válida para $y \geq 0$, es decir, por debajo del eje x en la Fig.24. Si hacemos $y = 0$ obtendremos la deflexión de la placa a lo largo del eje x

$$(w)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \quad (b)$$

Esta serie converge rápidamente, y con solo algunos términos obtendremos el valor de la deflexión con suficiente exactitud. En el caso de una carga P aplicada en el centro de la placa, la deflexión máxima, que se localizará en el centro, se obtiene sustituyendo $x = \xi = a/2$ en la fórmula (b). De esta forma obtenemos el siguiente resultado

$$w_{max} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) = \alpha \frac{Pa^2}{D} \quad (2.9.14)$$

Los valores del factor α para varios valores de la relación b/a están dados en la siguiente tabla.

Tabla 16. Valores numéricos de α para la Ec.2.9.14 de una placa rectangular con una carga concentrada en el centro. (Timoshenko, 1959)

b/a	1.0	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	∞
α	0.01160	0.01265	0.01353	0.01484	0.01570	0.01620	0.01651	0.01690	0.01695

Los momentos flexionantes están dados por:

$$(M_x)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left[(1+\nu) \tanh \alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right] \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9.15)$$

$$(M_y)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left[(1+\nu) \tanh \alpha_m + \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right] \text{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

CAPÍTULO 3.

PLACAS RECTANGULARES CON DIFERENTES CONDICIONES DE FRONTERA

10. Flexión de placas rectangulares mediante momentos distribuidos a lo largo de la frontera. Para una placa rectangular apoyada sobre sus lados y flexionada por momentos distribuidos a lo largo de las fronteras $y = \pm b/2$ (Fig.25),

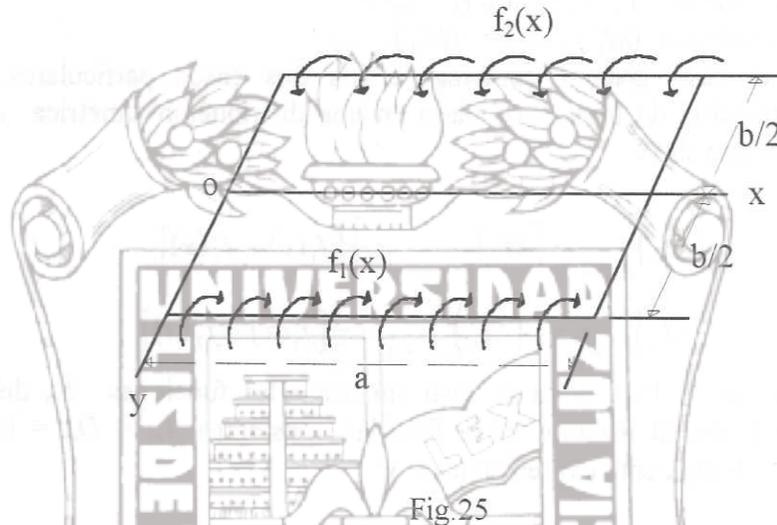


Fig.25

la deflexión w debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial homogénea, y condiciones de frontera :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = a \quad (b)$$

$$w = 0 \quad \text{para } y = \pm b/2 \quad (c)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b/2} = f_1(x) \quad -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=-b/2} = f_2(x) \quad (d)$$

en las cuales $f_1(x)$ y $f_2(x)$ representan los momentos flexionantes a lo largo de las fronteras $y = \pm b/2$. La solución de la Ec.a la podemos tomar en la forma

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

en la cual cada término de ella satisface a las condiciones de frontera (b). Las funciones Y_m , se tomarán de tal forma que satisfagan la Ec.a, así que, serán

$$Y_m = A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \quad (f)$$

Por cuestiones de simplicidad comenzaremos con los dos casos particulares:

1. El simétrico, en el cual $(M_y)_{y=b/2} = (M_y)_{y=-b/2}$.
2. El antisimétrico, en el cual $(M_y)_{y=b/2} = -(M_y)_{y=-b/2}$.

Podemos obtener el caso general combinando los dos casos particulares. Para ello dividiremos la distribución de momentos dado en una distribución simétrica M_y' y una antisimétrica M_y'' como sigue

$$\begin{aligned} (M_y)_{y=b/2} &= (M_y')_{y=b/2} = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)] \\ (M_y)_{y=b/2} &= -(M_y'')_{y=b/2} = \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] \end{aligned}$$

Como podemos ver de la Ec.f, para el caso simétrico las funciones Y_m deben de ser funciones pares de y , de tal manera, en la Ec.f las constantes $A_m = D_m = 0$. Con esto obtenemos de la Ec.e la siguiente expresión para w

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

Para satisfacer las condiciones de frontera (c) debemos hacer

$$B_m \cosh \alpha_m + C_m \alpha_m \sinh \alpha_m = 0$$

en la cual

$$\alpha_m = m\pi b / 2a$$

Por lo tanto

$$B_m = -C_m \alpha_m \tanh \alpha_m$$

y así la deflexión para el caso simétrico será

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (h)$$

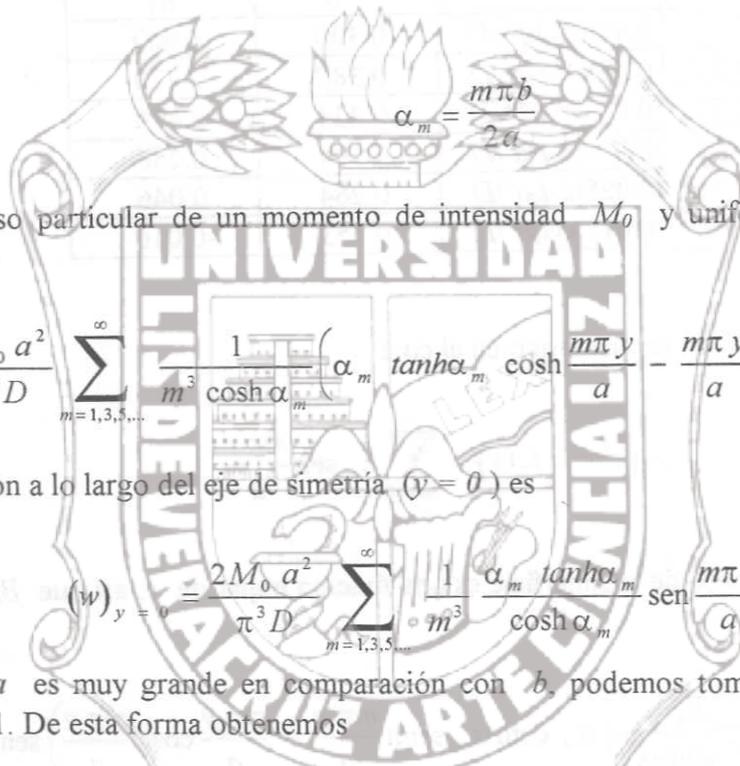
Las constantes C_m se determinan de las condiciones de frontera dadas en la Ec.d. Los momentos flexionantes a lo largo de las fronteras $y = \pm b / 2$ se pueden representar mediante una serie trigonométrica, que para el caso de simetría será

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

donde los coeficientes E_m se calculan en la forma usual para cada caso particular. Por ejemplo, para el caso de una distribución uniforme de los momentos flexionantes tenemos

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (3.10.1)$$

donde



Para el caso particular de un momento de intensidad M_0 y uniformemente distribuido, obtenemos

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \cosh \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

La deflexión a lo largo del eje de simetría ($y = 0$) es

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \frac{\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (j)$$

Cuando a es muy grande en comparación con b , podemos tomar a $\operatorname{tanh} \alpha_m \approx \alpha_m$ y $\operatorname{cosh} \alpha_m \approx 1$. De esta forma obtenemos

$$(w)_{y=0} = \frac{M_0 b^2}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{8} \frac{M_0 b^2}{D}$$

Esta ecuación nos proporciona el valor de la deflexión en el centro de una franja de ancho b y flexionada por dos pares iguales y de sentidos opuestos aplicados en las fronteras; por otro lado, cuando b es mucho más grande que a la deflexión de la placa sobre el eje x es pequeña.

El valor de la deflexión en el centro de la placa y para cualquier relación de los valores a y b , se obtiene de la Ec.j, que su valor es

$$(w)_{y=0, x=a/2} = \frac{M_0 ab}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1}{m^2 \cosh \alpha_m}$$

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

Con la Ec.3.10.1 podemos obtener, mediante diferenciación, la pendiente de la superficie flexionada en la frontera, así como el momento. En la Tabla 17 se dan algunos valores de la deflexión y momentos para las relaciones b/a mostradas.

Tabla 17. Valores numéricos para la deflexión y momento flexionante en el centro de una placa rectangular simplemente apoyada y sujeta a pares uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ (Fig.25). (Timoshenko, 1959)

$$\nu = 0.3$$

b/a	w	$M_x = \alpha M_0$	$M_y = \alpha_1 M_0$
		α	α_1
0	$0.1250M_0b^2/D$	0.300	1.000
0.50	$0.0964M_0b^2/D$	0.387	0.770
0.75	$0.0620M_0b^2/D$	0.424	0.476
1.00	$0.0368M_0a^2/D$	0.394	0.256
1.50	$0.0280M_0a^2/D$	0.264	0.046
2.00	$-0.0174M_0a^2/D$	0.153	-0.010

Ahora consideremos el caso antisimétrico en el cual

$$f_1(x) = -f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Para este caso la deformada de la superficie es una función impar de y , así que $B_m = C_m = 0$ en la Ec.f. Por lo tanto

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{m^2 \operatorname{senh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{cosh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Ec.(3.10.2)

Para obtener la deformada de la superficie, para el caso general representado por las condiciones de frontera (d), utilizaremos las Ecs.3.10.1 y 3.10.2, para los casos simétrico y antisimétrico. Para ello dividiremos la distribución de momentos dado en una distribución simétrica M_y' y una antisimétrica M_y'' como sigue

$$(M_y')_{y=b/2} = (M_y')_{y=-b/2} = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)]$$

$$(M_y'')_{y=b/2} = -(M_y'')_{y=-b/2} = \frac{1}{2}[f_1(x) - f_2(x)]$$

Nuevamente, podemos representar a estos momentos mediante las siguientes series trigonométricas

$$(M_y')_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m' \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (k)$$

$$(M_y'')_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m'' \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

la deflexión total se obtiene usando las Ecs. 3.10.1 y 3.10.2 y superponiendo las deflexiones producidas por cada uno de los momentos de la Ec. k. Así

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{E_m'}{\cosh \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi x}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \frac{E_m''}{\operatorname{senh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right]$$

Ec. (3.10.3)

Si el momento flexionante

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen}(m\pi x/l)$$

se distribuye solamente sobre el bordo $y = b/2$, tendremos que $f_2(x) = 0$, $E_m' = E_m'' = 0.5 E_m$; y la deflexión para este caso será

$$w = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{1}{\cosh \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{tanh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \frac{1}{\operatorname{senh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right]$$

Ec (3.10.4)

Los momentos M_0 distribuidos solamente sobre una frontera, digamos la $y = b/2$, producirá, en el centro de la placa, la mitad de las deflexiones y momentos flexionantes dados en la Tabla 17.

11.- Placas rectangulares con distintos tipos de apoyos.

Condiciones en los apoyos:

Dos lados opuestos simplemente apoyados y los otros dos empotrados.

Supongamos que tenemos el caso mostrado en la Fig.26, en la cual las fronteras $x = 0$ y $x = a$ de la placa rectangular, están simplemente apoyadas y las otras dos empotradas. La deflexión de una placa sujeta a cualquier tipo de carga lateral se puede obtener, resolviendo primero el caso de una placa con todos los lados simplemente apoyados y, después aplicar momentos flexionantes a lo largo de las fronteras $y = \pm b/2$ de magnitud tal que elimine el giro producido, a lo largo de las mismas, y que son el resultado de la carga aplicada. Mediante este procedimiento se pueden resolver muchos problemas combinando las soluciones dadas en el capítulo 2 con las de la sección anterior.

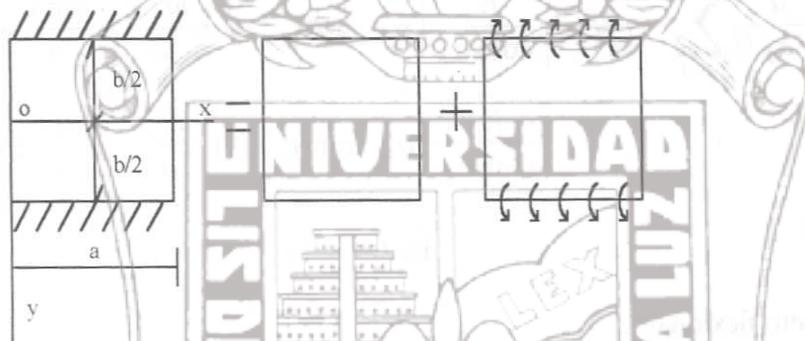


Fig.26

- *Placas uniformemente cargadas.*

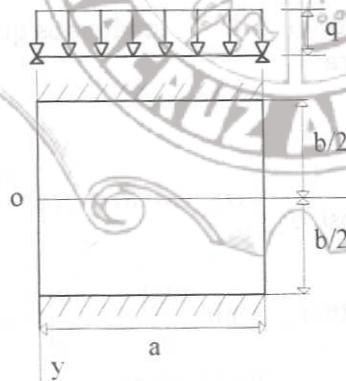


Fig.27

Los momentos a lo largo de los empotramientos se pueden calcular con la siguiente serie:

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha_m - \tanh\alpha_m (1 + \alpha_m \tanh\alpha_m)}{\alpha_m - \tanh\alpha_m (\alpha_m \tanh\alpha_m - 1)} \quad (3.11.1)$$

donde α_m es la misma que la de las secciones anteriores.

Debido a que la serie 3.11.1 es de convergencia rápida, los momentos máximos se pueden calcular fácilmente para cada caso particular. Por ejemplo, para una placa rectangular, el momento máximo lo podemos encontrar con buena exactitud utilizando solamente los primeros tres términos de la serie 3.11.1, el cual vale $-0.070qa^2$. En general, este momento se puede representar como γqa^2 , donde γ es un factor numérico que depende de la relación a/b . Algunos valores de este factor son dados en la Tabla 18.

Tabla 18. Valores numéricos α , β_1 , β_2 y γ para una placa rectangular con dos bordos simplemente apoyados y los otros dos empotrados, (Fig.27). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$
 $b < a$

a/b	$x = a/2, y = 0$ $w_{max} = \alpha qb^4/D$ α	$x = a/2, y = 0$ $M_x = \beta_1 qb^2$ β_1	$x = a/2, y = 0$ $M_y = \beta_2 qb^2$ β_2	$x = a/2, y = b/2$ $M_y = \gamma qb^2$ γ
∞	0.00260	0.0125	0.0417	-0.0833
2.0	0.00260	0.0142	0.0420	-0.0842
1.5	0.00247	0.0179	0.0406	-0.0822
1.4	0.00240	0.0192	0.0399	-0.0810
1.3	0.00234	0.0203	0.0388	-0.0794
1.2	0.00223	0.0215	0.0375	-0.0771
1.1	0.00209	0.0230	0.0355	-0.0739

$b > a$

b/a	$w_{max} = \alpha qa^4/D$ α	$x = a/2, y = 0$ $M_x = \beta_1 qa^2$ β_1	$x = a/2, y = 0$ $M_y = \beta_2 qa^2$ β_2	$x = a/2, y = b/2$ $M_y = \gamma qa^2$ γ
1.0	0.00192	0.0244	0.0332	-0.0679
1.1	0.00251	0.0307	0.0371	-0.0787
1.2	0.00319	0.0376	0.0400	-0.0868
1.3	0.00388	0.0446	0.0426	-0.0938
1.4	0.00460	0.0514	0.0448	-0.0998
1.5	0.00531	0.0585	0.0460	-0.1049
1.6	0.00603	0.0650	0.0469	-0.1090
1.7	0.00668	0.0712	0.0475	-0.1122
1.8	0.00732	0.0768	0.0477	-0.1152
1.9	0.00790	0.0821	0.0476	-0.1174
2.0	0.00844	0.0869	0.0474	-0.1191
3.0	0.01168	0.1144	0.0419	-0.1246
∞	0.01302	0.1250	0.0375	-0.1250

Para poder encontrar la superficie deformada por los momentos M_y , distribuidos a lo largo de las fronteras, lo único que debemos de hacer es utilizar la siguiente serie

$$w_1 = -\frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \left(\frac{m\pi y}{a} \text{senh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

Ec.(3.11.2)

Ahora, para obtener la deflexión en el centro de la placa, debemos de sustituir $x = a/2, y = 0$, en la ecuación anterior. Con esto tenemos que

$$(w_1)_{max} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)}$$

Ec.(3.11.3)

Esta serie tiene una convergencia rápida, razón por la cual solo se necesitan algunos términos para obtener una buena solución del problema, por ejemplo, para una placa cuadrada, con solo algunos términos obtenemos la siguiente deflexión

$$w_1 = 0.00214 \frac{qa^4}{D}$$

Si a esta deflexión se la resta la producida, en el centro de una placa, por una carga uniforme (Tabla 3), obtenemos la deflexión de una placa cuadrada cargada uniformemente con dos lados simplemente apoyados y los otros dos empotrados

$$w = 0.00192 \frac{qa^4}{D}$$

Al igual que el caso anterior, esta deflexión se puede representar por la fórmula

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$$

para la cual se dan algunos valores del parámetro α en la Tabla 18.

Si quisiéramos evaluar los momentos flexionantes en esta placa, debemos utilizar las siguientes expresiones para éstos

$$M_x = -\frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \left\{ (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \text{senh} \frac{m\pi y}{a} - [2\nu + (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m] \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \quad (3.11.4)$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \left\{ (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \text{senh} \frac{m\pi y}{a} + [2 - (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m] \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \quad (3.11.5)$$

Los valores de estos momentos en el centro de la placa son

$$M_x = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} [2\nu - (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m]$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} [2 - (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m]$$

Estas series son de rápida convergencia, así que, obtenemos una exactitud suficiente de los momentos con solo algunos términos de la serie. Superponiendo el valor de estos momentos a los de una placa simplemente apoyada (Tabla 3), podemos representar los valores finales de los momentos en el centro de la placa como

$$M_x = \beta_1 qa^2 \qquad M_y = \beta_2 qa^2$$

en donde los factores numéricos de magnitud β_1 y β_2 que dependen de la relación a/b son dados en la Tabla 18.

- Placas sujetas a presión hidrostática

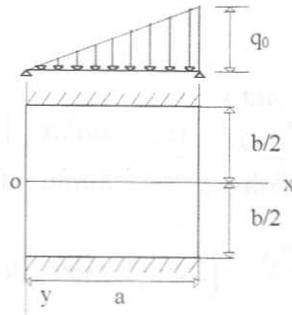


Fig 28

Ver Fig.28. Para este caso tenemos que los momentos a lo largo de los empotramiento son

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{2q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \quad (3.11.6)$$

Los términos pares de esta serie 3.11.6 valen cero en la mitad de las fronteras empotradas en las que $x = a/2$, y el valor de esta serie es la mitad que el de la serie para una carga uniforme [ver.Ec.3.9.14]. También esta serie tiene una rápida convergencia, por lo cual el valor de los momentos flexionantes se encuentran fácilmente con solo algunos términos. Varios valores de estos momentos junto con aquellos de los momentos flexionantes a lo largo de la línea media $y = 0$ de la placa son dados en la Tabla 19.

Tabla 19. Valores numéricos para los momentos flexionantes en una placa rectangular con carga hidrostática, dos bordos simplemente apoyados y dos bordos empotrados, Fig. 28. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$x = a/2, y = 0$		$x = 3a/4, y = 0$		$x = a/2, y = b/2$		$x = 3a/4, y = b/2$	
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
0.50	$0.007q_0b^2$	$0.021q_0b^2$	$0.018q_0b^2$	$0.029q_0b^2$	$-0.042q_0b^2$	$-0.062q_0b^2$		
0.75	$0.011q_0b^2$	$0.020q_0b^2$	$0.018q_0b^2$	$0.021q_0b^2$	$-0.040q_0b^2$	$-0.045q_0b^2$		
1.00	$0.013q_0a^2$	$0.017q_0a^2$	$0.017q_0a^2$	$0.015q_0a^2$	$-0.035q_0a^2$	$-0.035q_0a^2$		
1.25	$0.021q_0a^2$	$0.021q_0a^2$	$0.024q_0a^2$	$0.019q_0a^2$	$-0.045q_0a^2$	$-0.043q_0a^2$		
1.50	$0.030q_0a^2$	$0.023q_0a^2$	$0.031q_0a^2$	$0.020q_0a^2$	$-0.051q_0a^2$	$-0.048q_0a^2$		
2.00	$0.043q_0a^2$	$0.024q_0a^2$	$0.042q_0a^2$	$0.020q_0a^2$	$-0.060q_0a^2$	$-0.053q_0a^2$		
∞	$0.063q_0a^2$	$0.019q_0a^2$	$0.055q_0a^2$	$0.017q_0a^2$	$-0.063q_0a^2$	$-0.055q_0a^2$		

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

- Fuerza concentrada actuando sobre la placa.

Nuevamente utilizaremos la superposición, para así encontrar la deflexión para este caso en particular. Tomando el caso de una placa centralmente cargada y suponiendo que las fronteras $y = \pm b/2$ están empotradas, obtenemos la siguiente expresión para la deflexión bajo la carga:

$$w_{max} = \frac{Pb^2}{2\pi^3 D} \left[\frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) - \right. \tag{3.11.7}$$

$$\left. \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\tanh^2 \alpha_m}{\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m + \alpha_m} \right]$$

La primera de las sumatorias corresponde a la deflexión de una placa simplemente apoyada [ver Ec.2.9.14], y la segunda representa la deflexión debida a la acción de los momentos a lo largo de las fronteras empotradas.

Para obtener los esfuerzos máximos bajo la carga tenemos que superponer a los esfuerzos calculados para una placa simplemente apoyada los esfuerzos producidos por los siguientes momentos:

$$m_x = -P \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{b}{4a} \frac{\tanh \alpha_m}{\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m + \alpha_m} \left[2\nu + (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m \right] \tag{a}$$

$$m_y = -P \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{b}{4a} \frac{\tanh \alpha_m}{\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m + \alpha_m} \left[2 - (1-\nu)\alpha_m \tanh \alpha_m \right]$$

Escribiendo a estos momentos en la forma

$$m_x = \beta_1 P \qquad m_y = \beta_2 P \tag{b}$$

encontraremos algunos valores de los factores β_1 y β_2 para varias relaciones b/a en la Tabla 20.

Tabla 20. Valores numéricos para los momentos flexionantes correctivos en $x = a/2, y = 0$ debido a restricciones en $y = \pm b/2$, para el caso de una carga central P , (Fig.24). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$m_x = \beta_1 P$ β_1	$m_y = \beta_2 P$ β_2	b/a	$m_x = \beta_1 P$ β_1	$m_y = \beta_2 P$ β_2
0.0	-0.0484	-0.0742	1.0	-0.0505	-0.0308
0.5	-0.0504	-0.0708	1.2	-0.0420	-0.0166
0.6	-0.0524	-0.0656	1.4	-0.0319	-0.0075
0.7	-0.0540	-0.0580	1.6	-0.0227	-0.0026
0.8	-0.0544	-0.0489	1.8	-0.0155	-0.0002
0.9	-0.0532	-0.0396	2.0	-0.0101	+0.0007

Condiciones en los apoyos:

Tres lados simplemente apoyados y uno empotrado.

Consideremos la placa de la Fig.29, en la cual la frontera $y = b/2$ se encuentra empotrada y el resto simplemente apoyado. Nuevamente utilizaremos la superposición de la solución para una placa con distintos tipos de carga, y simplemente apoyada, con la de una placa con momentos flexionantes en un solo bordo Ec.3.10.4.

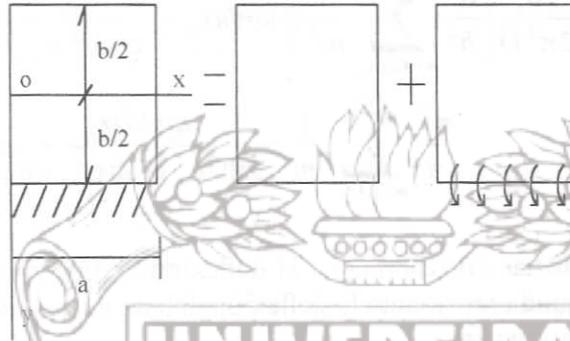


Fig.29

- *Placas uniformemente cargadas*

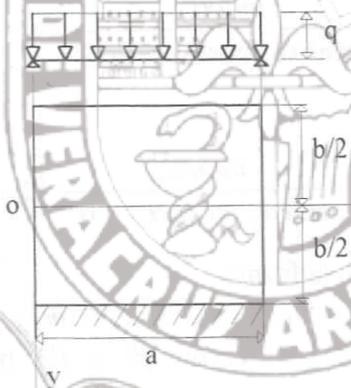


Fig.30

La deflexión en el centro de la placa es

$$(w_1)_{x=a/2, y=0} = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \frac{E_m \alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \quad (3.11.8)$$

Para una placa cuadrada esta serie da

$$(w_1)_{x=a/2, y=0} = 0.00127 \frac{qa^2}{D}$$

Restando esta deflexión a la deflexión de una placa cuadrada simplemente apoyada (Tabla 3), encontramos que la deflexión en el centro de una placa cuadrada uniformemente cargada con un lado empotrado es

$$(w)_{x=a/2, y=0} = 0.00279 \frac{qa^2}{D}$$

Algunos valores para el momento y deflexión, así como para algunas relaciones b/a , son dados en la Tabla 21.

Tabla 21. Deflexiones y momentos flexionantes en una placa rectangular con un bordo empotrado y los otros tres simplemente apoyados. (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$(w)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$
∞	$0.0130 qa^2/D$	$-0.125 qa^2$	$0.125 qa^2$	$0.037 qa^2$
2.0	$0.0093 qa^2/D$	$-0.122 qa^2$	$0.094 qa^2$	$0.047 qa^2$
1.5	$0.0064 qa^2/D$	$-0.112 qa^2$	$0.069 qa^2$	$0.048 qa^2$
1.4	$0.0058 qa^2/D$	$-0.109 qa^2$	$0.063 qa^2$	$0.047 qa^2$
1.3	$0.0050 qa^2/D$	$-0.104 qa^2$	$0.056 qa^2$	$0.045 qa^2$
1.2	$0.0043 qa^2/D$	$-0.098 qa^2$	$0.049 qa^2$	$0.044 qa^2$
1.1	$0.0035 qa^2/D$	$-0.092 qa^2$	$0.041 qa^2$	$0.042 qa^2$
1.0	$0.0028 qa^2/D$	$-0.084 qa^2$	$-0.034 qa^2$	$0.039 qa^2$
1/1.1	$0.0032 qb^4/D$	$-0.092 qb^2$	$0.033 qb^2$	$0.043 qb^2$
1/1.2	$0.0035 qb^4/D$	$-0.098 qb^2$	$0.032 qb^2$	$0.047 qb^2$
1/1.3	$0.0038 qb^4/D$	$-0.103 qb^2$	$0.031 qb^2$	$0.050 qb^2$
1/1.4	$0.0040 qb^4/D$	$-0.108 qb^2$	$0.030 qb^2$	$0.052 qb^2$
1/1.5	$0.0042 qb^4/D$	$-0.111 qb^2$	$0.028 qb^2$	$0.054 qb^2$
0.5	$0.0049 qb^4/D$	$-0.122 qb^2$	$0.023 qb^2$	$0.060 qb^2$
0.0	$0.0052 qb^4/D$	$-0.125 qb^2$	$0.019 qb^2$	$0.062 qb^2$

- Placas bajo presión hidrostática .

Supongamos que la placa se encuentra en las condiciones mostradas en la Fig. 31. Los momentos flexionantes a lo largo de la frontera $y = b/2$ serán

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{4q_0a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{\frac{\alpha_m - \tanh\alpha_m (1 + \alpha_m \tanh\alpha_m)}{2\alpha_m - \tanh\alpha_m (\alpha_m \tanh\alpha_m - 1) - \coth\alpha_m (\alpha_m \coth\alpha_m - 1)}} \quad (3.11.9)$$

Los valores de estos momentos para varios puntos de la frontera empotrada así como para distintos valores de la relación b/a son dados en la Tabla 22.

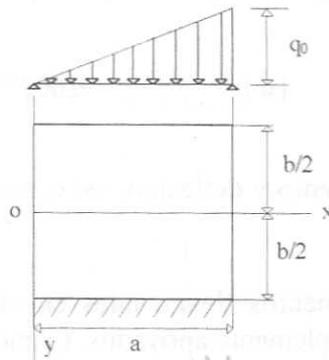


Fig.31

Tabla 22. Valores de los momentos M_y a lo largo del empotramiento $y = b/2$ de una placa rectangular bajo carga hidrostática $q_0 x/a$, Fig.31. (Timoshenko, 1959)

b/a	$x = a/4$	$x = a/2$	$x = 3a/4$
∞	$-0.039 q_0 a^2$	$-0.062 q_0 a^2$	$-0.055 q_0 a^2$
2.0	$-0.038 q_0 a^2$	$-0.061 q_0 a^2$	$-0.053 q_0 a^2$
1.5	$-0.034 q_0 a^2$	$-0.056 q_0 a^2$	$-0.050 q_0 a^2$
1.0	$-0.025 q_0 a^2$	$-0.042 q_0 a^2$	$-0.040 q_0 a^2$
2/3	$-0.030 q_0 b^2$	$-0.056 q_0 b^2$	$-0.060 q_0 b^2$
0.5	$-0.031 q_0 b^2$	$-0.061 q_0 b^2$	$-0.073 q_0 b^2$
0.0	$-0.031 q_0 b^2$	$-0.062 q_0 b^2$	$-0.094 q_0 b^2$

Ahora consideremos que la placa esta sujeta a la misma carga hidrostática, pero con la diferencia de que esta vez el bordo empotrado se encuentra en $x = a$ [ver Fig.32].

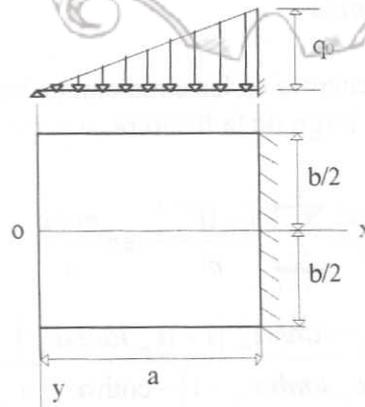


Fig 32

Deflexiones y momentos flexionantes obtenidas de esta última ecuación son dados en la Tabla 23.

Tabla 23. Deflexiones y momentos flexionantes en una placa rectangular con empotramiento en $x = a$ y soportando presión hidrostática (Fig.32). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$(w)_{x=a/2, y=0}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$	$(M_x)_{x=a, y=0}$
∞	$0.0024 q_0 a^4 / D$	$0.029 q_0 a^2$	$0.009 q_0 a^2$	$-0.067 q_0 a^2$
2.0	$0.0023 q_0 a^4 / D$	$0.029 q_0 a^2$	$0.011 q_0 a^2$	$-0.063 q_0 a^2$
1.5	$0.0019 q_0 a^4 / D$	$0.026 q_0 a^2$	$0.013 q_0 a^2$	$-0.061 q_0 a^2$
1.0	$0.0013 q_0 a^4 / D$	$0.019 q_0 a^2$	$0.016 q_0 a^2$	$-0.048 q_0 a^2$
2/3	$0.0030 q_0 b^4 / D$	$0.028 q_0 b^2$	$0.034 q_0 b^2$	$-0.071 q_0 b^2$
0.5	$0.0045 q_0 b^4 / D$	$0.024 q_0 b^2$	$0.046 q_0 b^2$	$-0.084 q_0 b^2$
0.0	$0.0065 q_0 b^4 / D$	$0.019 q_0 b^2$	$0.062 q_0 b^2$	$-0.125 q_0 b^2$

*Condiciones en los apoyos:
Todos los lados empotrados.*

Utilizaremos el principio de superposición para este caso, así tendremos que superponer a la deflexión de una placa simplemente apoyada la deflexión de una placa empotrada en todos sus lados con la condición de que el giro en todos los lados empotrados sea igual a cero, ver Fig.33

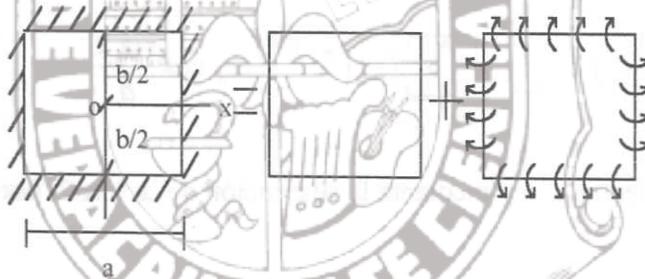


Fig.33

- *Placa uniformemente cargada*

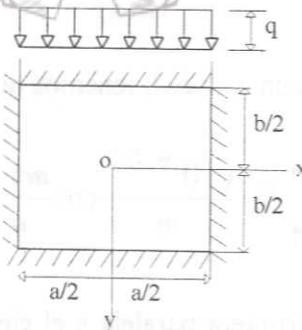


Fig.34

Como podemos ver de la Fig.34, tanto la deflexión como los momentos son simétricos. De la Ec.2.8.2, tenemos que la deflexión de una placa simplemente apoyada y escrita de una manera adecuada para nuestro nuevo sistema de coordenadas es

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

$$\left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right)$$

con esta ecuación podemos encontrar la expresión para el giro en la frontera $y = b/2$, el cual es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b/2} &= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} [\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)] \\ &= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} - \tanh \alpha_m \right) \end{aligned} \quad (b)$$

Consideremos ahora la deflexión de la placa producida por momentos distribuidos a lo largo de las fronteras $y = \pm b/2$. Por cuestiones de simetría vemos que los momentos se pueden representar por la serie

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

De la Ec.3.10.1 obtenemos a w_1 mediante la sustitución de $x + a/2$ por x y tomando a m impar. Así

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \cosh \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (d)$$

Derivando a la Ec.d y evaluándola en $y = b/2$, tenemos que el giro es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\tanh \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \quad (e)$$

Para el cálculo del giro sobre la frontera paralela a el eje x , necesitamos derivar a la Ec.d con respecto a x y evaluarla en $x = a/2$, así obtenemos

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{4b^2}{\pi^2 Da} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (f)$$

De igual manera podemos obtener las expresiones para la deflexión y rotación para el caso en el cual el momento M_x esta distribuido a lo largo de las fronteras $x = \pm a/2$. Suponiendo una distribución simétrica y tomando

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} F_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (g)$$

utilizando las Ecs.e y f, encontramos que

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} F_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\tanh \beta_m + \frac{\beta_m}{\cosh^2 \beta_m} \right) \quad (h)$$

en donde $\beta_m = m\pi a / 2b$, y

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{4a^2}{\pi^2 Db} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{b} \quad (i)$$

Cuando los momentos (c) y (g) actúan simultáneamente, la rotación en las fronteras de la placa se obtiene por el método de superposición. Tomando, por ejemplo la frontera $y = b/2$, encontramos

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\tanh \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) - \frac{4a^2}{\pi^2 Db} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} \quad (j)$$

Con las Ecs.b y (j), podemos derivar las ecuaciones para calcular las constantes E_m y F_m en las series (c) y (g) las cuales representan los momentos actuando a lo largo de las fronteras de una placa empotrada. En el caso de una placa empotrada éstas no giran. Por lo tanto, para las fronteras $y = \pm b/2$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0 \quad (k)$$

De manera similar, para las fronteras $x = \pm a/2$ tenemos

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = 0 \quad (l)$$

Si sustituimos las Ecs.b y (j) en la Ec.k y agrupamos a todos los términos que contienen a $\cos(i\pi x/a)$ como factor común y observando que la Ec.k se cumple para cualquier valor de x , podemos concluir que los coeficientes que multiplican a $\cos(i\pi x/a)$ deben de ser igual a cero para cada valor de i .

De esta manera obtenemos un sistema que consiste de un número infinito de ecuaciones lineales para calcular los coeficientes E_i y F_i como sigue:

$$\frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} - \tanh \alpha_i \right) - \frac{E_i}{i} \left(\tanh \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) - \frac{8ia}{\pi b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{j^2}{m^2}\right)^2} = 0 \quad (m)$$

Se obtiene un sistema similar de ecuaciones de la Ec.l.

Consideremos el caso de una placa cuadrada. En este caso la distribución de los momentos flexionantes a lo largo de todos los lados del cuadrado son iguales. Por lo que $E_i = F_i$, y los dos sistemas de ecuaciones, antes mencionados, son idénticos. La forma de la ecuación es

$$\frac{E_i}{i} \left(\tanh \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) + \frac{8i}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{j^2}{m^2}\right)^2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} - \tanh \alpha_i \right)$$

Sustituyendo los valores numéricos de los coeficientes en estas ecuaciones y considerando solamente los primeros cuatro coeficientes, obtenemos el siguiente sistemas de ecuaciones con cuatro incógnitas $E_1, E_3, E_5,$ y E_7 :

$$\begin{pmatrix} 1.8033 & 0.0764 & 0.0188 & 0.0071 \\ 0.0764 & 0.4045 & 0.0330 & 0.0159 \\ 0.0188 & 0.0330 & 0.2255 & 0.0163 \\ 0.0071 & 0.0159 & 0.0163 & 0.1558 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_5 \\ E_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.66770K \\ 0.01232K \\ 0.00160K \\ 0.00042K \end{Bmatrix} \quad (n)$$

en donde $K = -4qa^2 / \pi^3$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.372093K \\ E_3 &= -0.0380708K \\ E_5 &= -0.0173378K \\ E_7 &= -0.0085619K \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores calculados de los coeficientes E_1, E_3, \dots en la serie (c), obtenemos los momentos flexionantes a lo largo de las fronteras empotradas de la placa. El máximo

valor absoluto de estos momentos actúa a la mitad de los lados de la placa cuadrada. Tomando las cuatro Ecs.n, este valor es

$$|M_y|_{y=b/2, x=0} = |E_1 - E_3 + E_5 - E_7| = 0.0517qa^2$$

Podemos ver que para los momentos obtenemos una serie con signos alternantes, y la magnitud de el error depende de la magnitud del último de los coeficientes calculados E_1, E_2, \dots

Sustituyendo los valores de E_1, E_3, \dots en la expresión (d), obtenemos la deflexión de la placa producida por los momentos distribuidos a lo largo de las fronteras $y = \pm b/2$. Para el centro de la placa ($x = y = 0$) esta deflexión es

$$(w_1)_{x=y=0} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2} \alpha_m \tanh \alpha_m}{m^2 \cosh \alpha_m} = -0.00140 \frac{qa^4}{D}$$

Multiplicando por dos a este resultado, para tomar en cuenta la acción de los momentos distribuidos a lo largo de los lados $x = \pm a/2$, y sumándola a la deflexión de la placa simplemente apoyada (Tabla 3), obtenemos para la deflexión en el centro de una placa cuadrada uniformemente cargada y con las fronteras empotradas

$$(w)_{max} = (0.00406 - 0.00280) \frac{qa^4}{D} = 0.00126 \frac{qa^4}{D}$$

Cálculos similares se pueden hacer para cualquier relación de los lados de una placa rectangular. Algunos resultados de estos cálculos son dados en la Tabla 24.

Tabla 24. Factores numéricos para la deflexión y momentos flexionantes en una placa rectangular uniformemente cargada con bordos empotrados (Fig.34). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$(w)_{x=0, y=0} = \alpha qa^4/D$	$(M_x)_{x=a/2, y=0} = \beta qa^2$	$(M_y)_{x=0, y=b/2} = \beta_1 qa^2$	$(M_x)_{x=0, y=0} = \beta_2 qa^2$	$(M_y)_{x=0, y=0} = \beta_3 qa^2$
	α	β	β_1	β_2	β_3
1.0	0.00126	-0.0513	-0.0513	0.0231	0.0231
1.1	0.00150	-0.0581	-0.0538	0.0264	0.0231
1.2	0.00172	-0.0639	-0.0554	0.0299	0.0228
1.3	0.00191	-0.0687	-0.0563	0.0327	0.0222
1.4	0.00207	-0.0726	-0.0568	0.0349	0.0212
1.5	0.00220	-0.0757	-0.0570	0.0368	0.0203
1.6	0.00230	-0.0780	-0.0571	0.0381	0.0193
1.7	0.00238	-0.0799	-0.0571	0.0392	0.0182
1.8	0.00245	-0.0812	-0.0571	0.0401	0.0174
1.9	0.00249	-0.0822	-0.0571	0.0407	0.0165
2.0	0.00254	-0.0829	-0.0571	0.0412	0.0158
∞	0.00260	-0.0833	-0.0571	0.0417	0.0125

- *Placas bajo presión hidrostática.* Si la distribución de la presión en la Fig.35 se representa en la forma

$$q_0 = \frac{q_0}{2} + \frac{q_0}{2} \frac{x}{a}$$

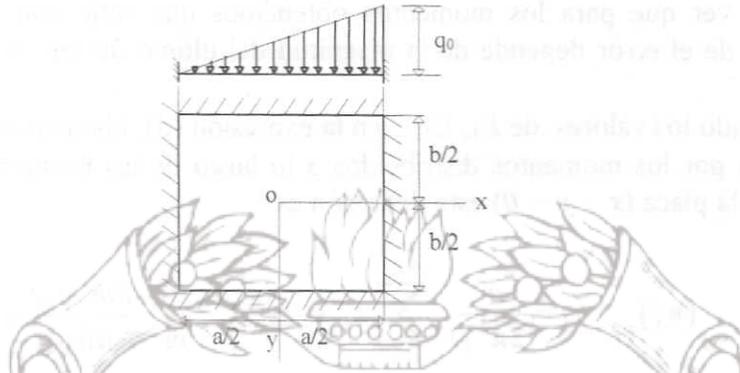


Fig.35

podemos ver que el efecto del término $q_0/2$ sobre la deflexión de la placa ya fue dado en la solución previa (Carga uniformemente distribuida). La deflexión para este caso está dada por

$$w = \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m/2)+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Ec.(a)

que es simétrica con respecto al eje x y asimétrica con respecto a y . Por lo que, para eliminar el giro a lo largo de la frontera de la placa aplicaremos los siguientes momentos en éstas

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \pm \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \tag{b}$$

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \pm \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{(m/2)-1} F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Ahora calculamos los coeficientes E_m y F_m mediante un sistema de ecuaciones lineales como en el caso de carga uniformemente distribuida. La deflexión debida a la acción simultánea de la carga $q_0 x / 2a$ y los momentos (b) se deben de sumar al final, a las deflexiones de la placa empotrada cargada uniformemente con $q_0/2$. Algunos resultados numéricos obtenidos por este procedimiento son dados en la Tabla 25.

Tabla 25. Valores numéricos para las deflexiones y momentos flexionantes en una placa rectangular con fronteras empotradas y con carga hidrostática (Fig.35). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$x = 0, y = 0$		$x = a/2, y = 0$	$x = -a/2, y = 0$	$x = 0, y = \pm b/2$
	$w = \alpha q_0 a^4 / D$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$M_y = \beta_2 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_1 q_0 a^2$	$M_y = \delta q_0 a^2$
	α	β_1	β_2	γ_1	δ
0.5	0.000080	0.00198	0.00515	-0.0115	-0.0028
2/3	0.000217	0.00451	0.00817	-0.0187	-0.0066
1.0	0.00063	0.0115	0.0115	-0.0334	-0.0179
1.5	0.00110	0.0184	0.0102	-0.0462	-0.0295
∞	0.00130	0.0208	0.0063	-0.0500	-0.0333

- Placas con carga concentrada en el centro.



Consideremos ahora el caso de una placa empotrada con carga concentrada P al centro (Fig.36). Nuevamente utilizaremos el caso de una placa simplemente apoyada. Sustituyendo $a/2$ por ξ en la Ec.2.9.13, y $x + a/2$ por x , llegamos a la deflexión para la superficie (válida para $y > 0$)

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{\tanh \alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{\sinh \frac{m\pi y}{a}}{\cosh \alpha_m} - \frac{m\pi y}{a} \tanh \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right]$$

El giro en la frontera $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b/2} = - \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \quad (a)$$

Para calcular los momentos flexionantes sobre las fronteras empotradas procederemos como en el caso de la carga uniforme y obtendremos los mismos dos sistemas de ecuaciones (k) y (l) para una placa uniformemente cargada y con todas sus fronteras empotradas. Las expresiones para w_1 y w_2 son las mismas que en el caso anterior, y solo será necesario cambiar los primeros términos de estas ecuaciones mediante la sustitución de la expresión (a) en lugar de la Ec.k (placa uniformemente cargada), y también la correspondiente expresión para $(\partial w / \partial x)_{x=a/2}$ en la Ec.l (placa uniformemente cargada). Para el caso particular de una placa cuadrada, utilizando únicamente cuatro ecuaciones, encontramos que el lado izquierdo de las ecuaciones, es el mismo que en las Ecs.n (placa uniformemente cargada). El lado derecho se obtendrá de las Ecs.a, así encontramos

$$\begin{pmatrix} 1.8033 & 0.0764 & 0.0188 & 0.0071 \\ 0.0764 & 0.4045 & 0.0330 & 0.0159 \\ 0.0188 & 0.0330 & 0.2255 & 0.0163 \\ 0.0071 & 0.0159 & 0.0163 & 0.1558 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_5 \\ E_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.182800P \\ 0.002990P \\ -0.000081P \\ 0.000005P \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos

$$E_1 = -0.1025P, \quad E_3 = 0.0263P, \quad E_5 = 0.0042P, \quad E_7 = 0.0015P$$

Sustituyendo estos valores en la Ec.c (placa uniformemente cargada), obtenemos los momentos flexionantes para la mitad de la frontera $y = b/2$. Un cálculo más exacto, utilizando un sistema de siete ecuaciones, da

$$(M_y)_{y=b/2, x=0} = -0.1257P$$

Teniendo los momentos a lo largo de las fronteras empotradas, podemos calcular la deflexión correspondiente usando la Ec.d (placa uniformemente cargada). Superponiendo las deflexiones producidas por los momentos sobre las deflexiones de una placa simplemente apoyada, obtenemos las deflexiones de la placa con fronteras empotradas. Mediante el mismo método de superposición, se puede obtener, la demás información concerniente a la deflexión de las placas con fronteras empotradas y con una carga concentrada central. Algunos valores para este caso son dados en la Tabla 26.

Tabla 26. Valores numéricos para los momentos flexionantes en el centro de los lados largos y deflexiones en el centro de la placa rectangular cargada en el centro, (Fig.36). (Timoshenko, 1959)

b/a	$(w)_{x=y=0} = \alpha Pa^2/D$	$(M_y)_{x=0, y=b/2} = \gamma P$
	α	γ
1.0	0.00560	-0.1257
1.2	0.00647	-0.1490
1.4	0.00691	-0.1604
1.6	0.00712	-0.1651
1.8	0.00720	-0.1667
2.0	0.00722	-0.1674
∞	0.00725	-0.1680

Condiciones en los apoyos:

Fronteras opuestas simplemente apoyadas, la tercera libre, y la cuarta empotrada o simplemente apoyada.

Supongamos que las fronteras $x = 0$ y $x = a$ están simplemente apoyadas como en la Fig.37, la frontera $y = b$ libre, y la frontera $y = 0$ empotrada.

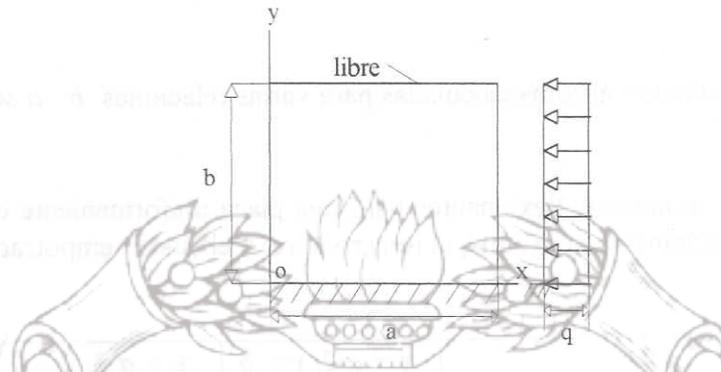


Fig.37

Para este caso las condiciones de frontera son

$$\text{simplemente apoyada} \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = a \text{ y } x = 0 \quad (a)$$

$$\text{empotramiento} \quad w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (b)$$

$$\text{libre} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0 \quad (c)$$

- Carga uniformemente distribuida

En este caso (ver fig.37) procederemos como en el apartado 8, es decir la deflexión total la tomaremos como

$$w = w_1 + w_2$$

w_1 representa la deflexión de una franja de longitud a , simplemente apoyada y con carga uniforme, la cual se puede representar por la serie

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

para m impar. w_2 tiene la misma forma que en los casos anteriores, es decir

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots} Y_m \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \quad (e)$$

en este caso, las series (d) y (e) satisfacen a las condiciones de frontera (a), y las cuatro constantes de Y_m deben de determinarse haciendo que se cumplan las condiciones de frontera (b) y (c).

Algunos valores de la deflexión máxima calculadas para varias relaciones b/a son dados en la Tabla 27.

Tabla 27. Deflexiones y momentos flexionantes para una placa uniformemente cargada con dos bordos opuestos simplemente apoyados, el tercero libre, y el cuarto empotrado, (Fig.37). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	w_{\max}	$x = a/2, y = b$	$x = a/2, y = 0$
		M_x	M_y
0	$0.125 qb^4/D$	0	$-0.500 qb^2$
1/3	$0.094 qb^4/D$	$0.0078 qa^2$	$-0.428 qb^2$
1/2	$0.0582 qb^4/D$	$0.0293 qa^2$	$-0.319 qb^2$
2/3	$0.0335 qb^4/D$	$0.0558 qa^2$	$-0.227 qb^2$
1	$0.0113 qb^4/D$	$0.0972 qa^2$	$-0.119 qb^2$
3/2	$0.0141 qa^4/D$	$0.123 qa^2$	$-0.124 qa^2$
2	$0.0150 qa^4/D$	$0.131 qa^2$	$-0.125 qa^2$
3	$0.0152 qa^4/D$	$0.133 qa^2$	$-0.125 qa^2$
∞	$0.0152 qa^4/D$	$0.133 qa^2$	$-0.125 qa^2$

- Carga hidrostática.

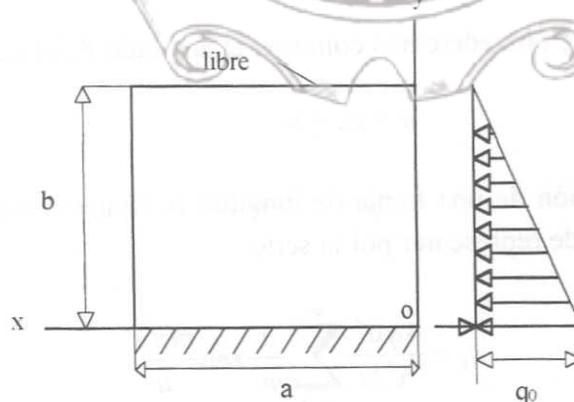


Fig.38

Tabla 29. Deflexión y momentos flexionantes en una placa rectangular bajo carga hidrostática con tres bordos simplemente apoyados y el cuarto bordo libre, (Fig.38). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 0.3$

b/a	$x = a/2, \quad y = b$		$x = a/2, \quad y = b/2$		
	$w = \alpha q_0 a^4 / D$	$M_x = \beta q_0 a^2$	$w = \alpha_1 q_0 a^4 / D$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$M_y = \beta_2 q_0 a^2$
	α	β	α_1	β_1	β_2
1/2	0.00230	0.0197	0.00135	0.0145	0.0120
2/3	0.00304	0.0265	0.00207	0.0220	0.0156
1.0	0.00368	0.0325	0.00313	0.0331	0.0214
1.5	0.00347	0.0308	0.00445	0.0453	0.0231
2.0	0.00291	0.0258	0.00533	0.0529	0.0222
∞	0	0	0.00651	0.0625	0.0187

*Condiciones en los apoyos:
Tres lados simplemente apoyados y el cuarto libre.*



En este caso las condiciones de frontera son, ver Fig.39

simplemente apoyada $w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ para $x = a, x = 0$ y $y = 0$ (a)

libre $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0$ para $y = b$ (b)

- *Carga uniformemente distribuida.*

Observe que este caso (fig. 39) es muy parecido al anterior en el cual la frontera $y = 0$ estaba empotrada, por lo tanto para aprovechar el resultado del caso anterior, haremos que la condición de frontera para $y = 0$ sea

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (c)$$

Con estas condiciones de frontera procedemos de igual manera que en el caso anterior; en la Tabla 28 se dan algunos resultados numéricos para este caso.

Tabla 28. Deflexión y momentos flexionantes en una placa rectangular uniformemente cargada con tres bordos simplemente apoyados y el cuarto bordo libre, (Fig.39). (Timoshenko, 1959)

$$\nu = 0.3$$

b / a	x = a / 2, y = b		x = a / 2, y = b / 2	
	w _{max} = α qa ⁴ / D α	(M _x) _{max} = β qa ² β	M _x = β ₁ qa ² β ₁	M _y = β ₂ qa ² β ₂
1/2	0.00710	0.060	0.039	0.022
2/3	0.00968	0.083	0.055	0.030
1/1.4	0.01023	0.088	0.059	0.032
1/1.3	0.01092	0.094	0.064	0.034
1/1.2	0.01158	0.100	0.069	0.036
1/1.1	0.01232	0.107	0.074	0.037
1	0.01286	0.112	0.080	0.039
1.1	0.01341	0.117	0.085	0.040
1.2	0.01384	0.121	0.090	0.041
1.3	0.01417	0.124	0.094	0.042
1.4	0.01442	0.126	0.098	0.042
1.5	0.01462	0.128	0.101	0.042
2	0.01507	0.132	0.113	0.041
3	0.01520	0.133	0.122	0.039
∞	0.01522	0.133	0.125	0.037

Condiciones en los apoyos:
Tres lados empotrados y el cuarto lado libre.

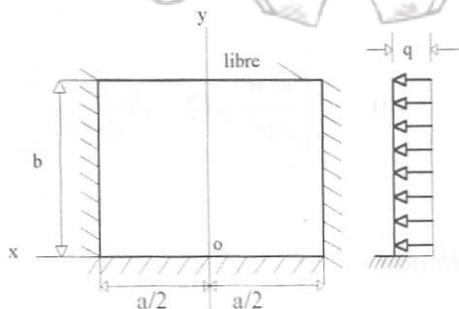


Fig. 40

Las condiciones de frontera para esta caso son

$$\begin{aligned} \text{frontera libre} \quad & \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0 \\ \text{empotramiento} \quad & \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad \left[\frac{\partial (w_1 + w_2 + w_3)}{\partial x} \right]_{x=\pm a/2} = 0 \end{aligned}$$

- Carga uniformemente distribuida.

Supongamos que la frontera de la placa esta empotrada en $y = 0$ y $x = \pm a/2$, y la frontera libre se encuentra en $y = b$ (Fig.40).
En este caso, las deflexión total se tomará como

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \tag{a}$$

donde w_1 y w_2 son idénticas a la del problema anterior (placa con 3 lados simplemente apoyados y el cuarto libre), así

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \tag{b}$$

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{Y_m}{m^5} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \tag{c}$$

las cuales se toman de esta manera para aprovechar la simetría con respecto al eje x . Debido a las condiciones de frontera en $x = \pm a/2$, w_3 se tomará como¹

$$\begin{aligned} w_3 = & \frac{qa^4}{D} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(F_n \gamma_n \tanh \gamma_n \cosh \frac{n\pi x}{2b} - F_n \frac{n\pi x}{2b} \sinh \frac{n\pi x}{2b} \right) \sin \frac{n\pi y}{2b} \\ & + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left(G_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + H_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + I_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \end{aligned}$$

Ec.(d)

donde $\gamma_n = n\pi a/4b$.

Las constantes de la ecuación (d), las evaluamos utilizando las condiciones de frontera para la placa. Algunos resultados numéricos se dan en la Tabla 30

¹ Ver Timoshenko "Theory of plates and shells", pag. 213, 1959.

Tabla 30. Valores numéricos para las deflexiones, momentos flexionantes y reacciones de una placa rectangular uniformemente cargada con tres bordos empotrados y el cuarto bordo libre, (Fig.40). (Timoshenko, 1959)

$\nu = 1/6$

b/a	$x = 0, y = b$		$x = 0, y = b/2$			$x = a/2, y = b$		$x = a/2, y = b/2$		$x = 0, y = 0$	
	$w = \alpha_1$ qa^4/D α_1	$M_x = \beta_1 qa^2$ β_1	$w = \alpha_2$ qa^4/D α_2	$M_x = \beta_2 qa^2$ β_2	$M_y = \beta_2 qa^2$ β_2	$M_x = \beta_3 qa^2$ β_3	$V_x = \gamma_3 qa$ γ_3	$M_x = \beta_4 qa^2$ β_4	$V_x = \gamma_4 qa$ γ_4	$M_y = \beta_5 qa^2$ β_5	$V_y = \gamma_5 qa$ γ_5
0.6	0.00271	0.0336	0.00129	0.0168	0.0074	-0.0745	0.750	-0.0365	0.297	-0.0554	0.416
0.7	0.00292	0.0371	0.00159	0.0212	0.0097	-0.0782	0.717	-0.0439	0.346	-0.0545	0.413
0.8	0.00308	0.0401	0.00185	0.0252	0.0116	-0.0812	0.685	-0.0505	0.385	-0.0535	0.410
0.9	0.00323	0.0425	0.00209	0.0287	0.0129	-0.0836	0.656	-0.0563	0.414	-0.0523	0.406
1.0	0.00333	0.0444	0.00230	0.0317	0.0138	-0.0853	0.628	-0.0614	0.435	-0.0510	0.401
1.25	0.00345	0.0467	0.00269	0.0374	0.0142	-0.0867	0.570	-0.0708	0.475	-0.0470	0.388
1.5	0.00335	0.0454	0.00290	0.0402	0.0118	-0.0842	0.527	-0.0755	0.491	-0.0418	0.373

- Presión hidrostática

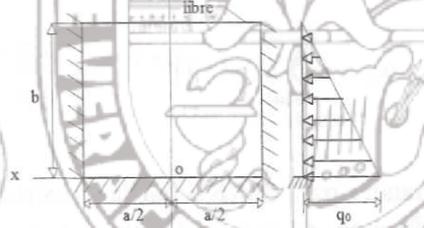


Fig.41

En caso de que sobre la placa actue una carga como la de la Fig.41, se le debe de sumar a la deflexión dada por la serie (e), una deflexión igual a

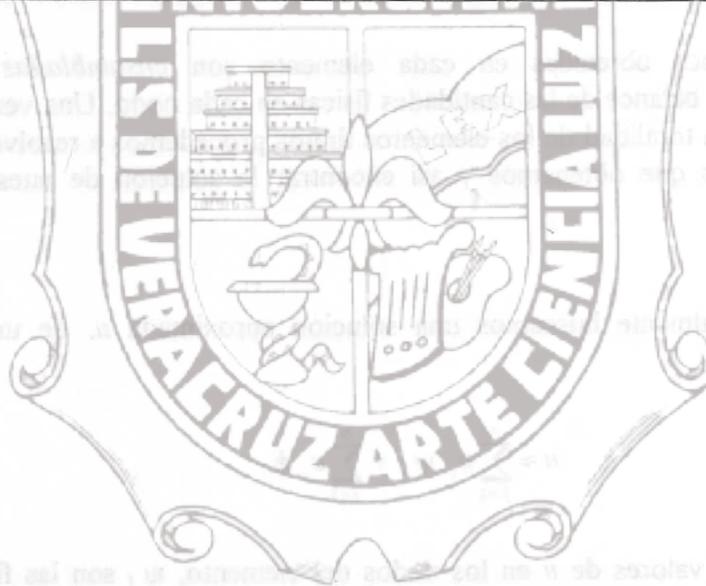
$$w = \frac{4q_0(1-y/b)a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

y proceder como en los casos anteriores. En la tabla 31 se dan algunos resultados obtenidos por este método.

Tabla 31. Deflexión, momentos flexionante y reacciones de una placa rectangular sujeta a presión hidrostática con tres bordos empotrados y el cuarto bordo libre, (Fig.41). (Timoshenko, 1959)

$$\nu = 1/6$$

b/a	$x=0, y=b$		$x=0, y=b/2$			$x=a/2, y=b$		$x=a/2, y=b/2$		$x=0, y=0$	
	$w=\alpha_1 q_0 a^4/D$ α_1	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$ β_1	$w=\alpha_2 q_0 a^4/D$ α_2	$M_x = \beta_2 q_0 a^2$ β_2	$M_y = \beta_2 q_0 a^2$ β_2	$M_x = \beta_3 q_0 a^2$ β_3	$V_x = \gamma_3 q_0 a$ γ_3	$M_x = \beta_4 q_0 a^2$ β_4	$V_x = \gamma_4 q_0 a$ γ_4	$M_y = \beta_5 q_0 a^2$ β_5	$V_y = \gamma_5 q_0 a$ γ_5
0.6	0.00069	0.0089	0.00044	0.0060	0.0062	-0.0179	0.093	-0.0131	0.136	-0.0242	0.248
0.7	0.00069	0.0093	0.00058	0.0080	0.0074	-0.0172	0.081	-0.0170	0.158	-0.0261	0.262
0.8	0.00068	0.0096	0.00072	0.0100	0.0083	-0.0164	0.069	-0.0206	0.177	-0.0278	0.275
0.9	0.00067	0.0096	0.00085	0.0118	0.0090	-0.0156	0.057	-0.0239	0.194	-0.0290	0.286
1.0	0.00065	0.0095	0.00097	0.0135	0.0094	-0.0146	0.045	-0.0269	0.209	-0.0299	0.295
1.25	0.00056	0.0085	0.00121	0.0169	0.0092	-0.0119	0.018	-0.0327	0.234	-0.0306	0.309
1.5	0.00042	0.0065	0.00138	0.0191	0.0075	-0.0087	-0.006	-0.0364	0.245	-0.0291	0.311



CAPÍTULO 4.

EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCIÓN DE PLACAS.

12.- Introducción. En una simulación numérica de un proceso físico, empleamos un método numérico y una computadora para evaluar el modelo matemático del proceso. El método del elemento finito es una poderosa técnica numérica utilizada para evaluar procesos físicos complejos, dicho método consta de tres puntos principales:

1. El dominio total de un problema es representado por sub dominios conocidos como *elementos finitos*, la colección de elementos finitos se conoce como *malla del elemento finito*.
2. Se aproxima el proceso físico sobre cada uno de los elementos finitos mediante una función predeterminada (polinomio u otra), y se desarrollan ecuaciones algebraicas que relacionan cantidades físicas en ciertos puntos del elemento previamente seleccionados llamados *nodos*.
3. Las ecuaciones obtenidas en cada elemento son *ensambladas* usando la continuidad o balance de las cantidades físicas en cada nodo. Una vez que hemos ensamblado la totalidad de los elementos finitos procedemos a resolver el sistema de ecuaciones que obtenemos y así encontrar la solución de nuestro proceso físico.

En este método generalmente buscamos una solución aproximada u , de una ecuación diferencial, en la forma

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j + \sum_{j=1}^m c_j \phi_j$$

en la cual u_j son los valores de u en los nodos del elemento, ψ_j son las funciones de interpolación, c_j son coeficientes nodales y ϕ_j son las funciones de aproximación asociadas. Cuando sustituimos esta aproximación de u en la ecuación diferencial no siempre encontramos un número suficiente y necesario de ecuaciones para los coeficientes u_j y c_j , así que necesitamos un procedimiento por el cual encontremos el número necesario y suficiente de ecuaciones para cualquier elección arbitraria de los datos del problema. Dicho procedimiento consiste en encontrar la *integral ponderada* de la ecuación diferencial que gobierna a nuestro proceso físico.

Existe solo *un método del elemento finito* que en general consta de los tres pasos antes descritos, pero pueden existir más de un *modelo de elemento finito* para el mismo problema. El tipo de modelo depende de la ecuación diferencial y del método usado para encontrar las ecuaciones algebraicas (es decir, la integral ponderada usada) necesarias para determinar los coeficientes desconocidos en el elemento.

Integrales ponderadas. En el método del elemento finito usamos expresiones integrales para desarrollar las relaciones algebraicas entre los coeficientes u_j de la aproximación

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (4.12.1)$$

en la cual u representa la solución de la ecuación diferencial particular.

El uso de un enunciado integral, equivalente a la ecuación diferencial que gobierna a nuestro proceso físico, es debido al hecho de que la sustitución de la Ec.4.12.1 en la ecuación diferencial gobernante no siempre nos proporciona el número requerido de ecuaciones algebraicas linealmente independientes para los coeficientes desconocidos u_j . Una forma de asegurar que exista exactamente el mismo número, n , de ecuaciones e incógnitas es precisamente la condición de que el error en el sentido de la *integral ponderada* sea cero. Por ejemplo, suponiendo que deseamos determinar una solución aproximada de la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + u = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (4.12.2a)$$

$$u(0) = 1, \quad \left. x \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0 \quad (4.12.2b)$$

es decir, buscamos una solución aproximada sobre el dominio $\Omega = (0, 1)$, de la forma

$$u(x) \approx U_N(x) \equiv \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (4.12.3)$$

donde c_j son los coeficientes por determinarse, y $\phi_j(x)$ y $\phi_0(x)$ son funciones pre seleccionadas tales que las condiciones de frontera del problema son satisfechas por la solución aproximada N -paramétrica $U_N(x)$. Por ejemplo, podemos elegir $N=2$, y a las funciones $\phi_j(x)$ como $\phi_0(x)=1$, $\phi_1(x)=x^2-2x$, $\phi_2(x)=x^3-3x$, así

$$u(x) \approx U_N(x) = c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + 1$$

la cual satisface a las condiciones de frontera de la Ec.4.12.2b para cualquier valor de c_1 y c_2 . Las constantes c deben de determinarse de tal forma que la solución aproximada $U_N(x)$ satisfaga la Ec.4.12.2a en algún sentido. Si requerimos que $U_N(x)$ satisfaga la Ec.4.12.2a en el sentido exacto, debemos de sustituir a ésta en la ecuación diferencial, y así obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{dU_N(x)}{dx} - x \frac{d^2U_N(x)}{dx^2} + U_N(x) &= -2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 + c_1(x^2-2x) + \\ & c_2(x^3-3x) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Como esta expresión debe de ser igual a cero para cualquier valor de x , los coeficientes de las potencias de x deben de ser cero, así obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2c_1 + 3c_2 &= 0 \\ -(6c_1 + 3c_2) &= 0 \\ c_1 - 9c_2 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Se observa que tenemos 4 ecuaciones y solamente dos incógnitas; por lo que no existe solución a las ecuaciones ya que, este sistema es inconsistente. Por otro lado, podemos requerir que la solución aproximada $U_N(x)$ satisfaga a la ecuación diferencial, Ec.4.12.2a, en el sentido de una integral ponderada, es decir

$$\int_0^1 w(x)R(x)dx = 0 \tag{4.12.4a}$$

en la cual a R se le llama *residuo*,

$$R \equiv -\frac{dU_N(x)}{dx} - x \frac{d^2U_N(x)}{dx^2} + U_N(x)$$

y w es conocida como *función de peso*. De la Ec.4.12.4a obtenemos tantas ecuaciones algebraicas linealmente independientes, como funciones de peso $w(x)$ independientes existan. Para el ejemplo, podemos tomar a $w(x)=1$ y $w(x)=x$, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 1R(x) dx &= (1+2c_1+3c_2) - \frac{1}{2}(-6c_1-3c_2) + \frac{1}{3}(c_1-9c_2) + \frac{1}{4}c_2 = 0 \\ \int_0^1 xR(x)dx &= \frac{1}{2}(1+2c_1+3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1-3c_2) + \frac{1}{4}(c_1-9c_2) + \frac{1}{5}c_2 = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}c_1 + \frac{5}{4}c_2 &= 1 \\ \frac{3}{4}c_1 + \frac{31}{20}c_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.12.4b}$$

son dos ecuaciones linealmente independientes, y podemos determinar las constantes c_1 y c_2 sin ningún problema. Del ejemplo anterior podemos observar, que las expresiones integrales del tipo de la Ec.4.12.4a nos proporcionan los medios para obtener tantas ecuaciones algebraicas como coeficientes desconocidos haya en la aproximación.

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Un método variacional es aquel en el que se buscan soluciones aproximadas del tipo de la Ec.4.12.3, y en la cual los coeficientes c_j se determinan mediante una expresión integral, como en el ejemplo visto anteriormente. Los métodos variacionales difieren el uno del otro en la forma en la que se elige a las funciones de peso $w(x)$ y a la expresión integral usada, la cual dicta la manera de elegir a las funciones de aproximación. En el método del elemento finito, un dominio es visto como un ensamble de sub dominios (es decir, elementos), sobre los cuales se busca una solución aproximada de la misma forma que en los métodos variacionales.

13. Funcionales. Una expresión integral de la forma

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx, \quad u = u(x), \quad u'(x) = \frac{du}{dx}$$

en donde el integrando $F(x, u, u')$, que es una función dada con argumentos x , u y du/dx , es conocida como *funcional*. El valor $I(u)$ de la integral depende de $u(x)$ es decir, para una $u(x)$ dada $I(u)$ representa un valor escalar. Usaremos el término funcional para definir a las funciones definidas por integrales cuyos argumentos son también funciones. Vulgarmente hablando, un funcional es “una función de funciones”. Matemáticamente, un funcional es un operador I que transforma a $u(x)$ en un escalar.

Se dice que un funcional $I(u)$ es lineal si y solo si se satisface la relación

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v) \tag{4.13.1}$$

para cualquier escalar α y β así como cualquier variable independiente $u(x)$ y $v(x)$. Se dice que un funcional $B(u, v)$ es bilineal si lo es para cada uno de sus argumentos $u(x)$ y $v(x)$:

$$\begin{aligned} B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v) \\ B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2) \end{aligned} \tag{4.13.2}$$

la primera ecuación es lineal en el primer argumento y la segunda lo es con respecto al segundo argumento, $u(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $v(x)$, $v_1(x)$ y $v_2(x)$ son las variables dependientes. Se dice que la forma bilineal es *simétrica* en sus argumentos $u(x)$ y $v(x)$ si

$$B(u, v) = B(v, u) \tag{4.13.3}$$

para todo $u(x)$ y $v(x)$. Un ejemplo de un funcional lineal es

$$I(v) = \int_0^L v(x) f(x) dx + \frac{dv(x)}{dx} (L) M_0$$

en donde $f(x)$ y M_0 son cantidades conocidas. Un ejemplo de un funcional bilineal es

$$B(v, w) = \int_0^L \alpha(x) \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} dx$$

donde $\alpha(x)$ es una función conocida.

14.- El símbolo variacional. Consideremos a la función $F = F[x, u(x), u'(x)]$. Si la variable independiente x tiene un valor fijo arbitrario, entonces F depende de las funciones $u(x)$ y $u'(x)$ únicamente. El cambio $\alpha v(x)$ en $u(x)$, en donde α es una constante y $v(x)$ es una función, es llamado la *variación* de $u(x)$ y es denotado por δu :

$$\delta u = \alpha v$$

El operador δ es conocido como *símbolo variacional*. La variación δu de una función $u(x)$ representa un cambio admisible en la función $u(x)$ para un valor fijo de la variable independiente x . Si $u(x)$ tiene un valor específico en un punto (usualmente sobre la frontera), la variación de $u(x)$ en dicho punto es cero, debido a que el valor especificado no puede variar, por lo tanto la variación de una función $u(x)$ debe de satisfacer la forma homogénea de las condiciones de frontera para $u(x)$ (es decir deben de ser igual a cero). La variación δu en $u(x)$ es un cambio *virtual*. Asociado con este cambio en $u(x)$ ($u(x)$ cambia a $u(x) + \alpha v(x)$), hay un cambio en F . De manera análoga con la diferenciación total de una función de dos variables, la *primera variación* de F en $u(x)$ se define por

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \tag{4.14.1}$$

Note la analogía entre la primera variación, y la diferenciación total de F ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \tag{4.14.2}$$

Como x no cambia durante la variación de $u(x)$ a $u(x) + \delta u(x)$, $dx = 0$ y la analogía entre δF y dF es obvia. Como se puede observar, δ actúa como un operador diferencial con respecto a las variables dependientes. Puede verificarse fácilmente que las leyes de variación para las sumas, productos, divisiones, potencias y demás, son completamente análogas a las correspondientes leyes de la diferenciación (L. Elsgoltz, 1977). Además, el operador variacional puede conmutar con los operadores diferencial e integral (siempre y cuando el sistema de coordenadas sea fijo, es decir, que sea un sistema de coordenadas Lagrangianas):

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \alpha v' = \delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx} \right) \tag{4.14.3a}$$

$$\delta \int_a^b u(x) dx = \int_a^b \delta u(x) dx \quad (4.14.3b)$$

15. Formulación débil de problemas con valores en la frontera. Recordemos que la única razón para obtener una formulación integral de los problemas con valores en la frontera, es el hecho de que los métodos variacionales de aproximación, por ejemplo, el de Ritz, Galerkin, mínimos cuadrados, colocación o en general métodos de residuales pesados, se basan en enunciados de integrales ponderadas de las ecuaciones que gobiernan la situación física analizada. Como el método del elemento finito es una técnica que nos permite construir las funciones de aproximación requeridas por cualquier método variacional aplicado a un elemento, es necesario conocer la formulación de la integral ponderada así como la formulación débil de las ecuaciones diferenciales. Además de las razones anteriores, la formulación débil también facilita, de manera natural, la clasificación de las condiciones de frontera, en condiciones de frontera *naturales* y *esenciales*, las cuales juegan un papel crucial en la derivación de las funciones de aproximación y la selección de los grados de libertad nodales en el modelo del elemento finito.

La *forma débil* de una ecuación diferencial es la integral ponderada de dicha ecuación, en la cual el grado de diferenciación en la ecuación diferencial se distribuye entre la variable dependiente y la función de peso, y además incluye las condiciones naturales del problema.

Integral ponderada y formulación débil. Considere que se quiere encontrar la solución $u(x)$ de la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] = q(x) \quad \text{para } 0 < x < L \quad (4.15.1a)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_0 \quad (4.15.1b)$$

Aquí $a(x)$ y $q(x)$ son funciones conocidas de la coordenada x , u_0 y Q_0 son valores conocidos, y L es la longitud del dominio unidimensional. Las funciones $a(x)$ y $q(x)$, las constantes u_0 y Q_0 , así como la longitud L del dominio son datos del problema. La solución $u(x)$ es la *variable dependiente* del problema. Cuando los valores especificados (condiciones de frontera) son distintos de cero, se dice que las condiciones de frontera son no homogéneas; y cuando son cero se dicen que son condiciones de frontera homogéneas.

Recordemos que el único propósito para desarrollar una expresión de integral ponderada para una ecuación diferencial, es el de tener los medios necesarios para encontrar N relaciones algebraicas linealmente independientes entre los coeficientes c_j de la aproximación

$$u(x) \approx U_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (4.15.2)$$

Esto se hace eligiendo N funciones de peso linealmente independientes en la expresión integral, como veremos a continuación.

Hay tres pasos para el desarrollo de la forma débil, si es que existe, de cualquier ecuación diferencial. Estos pasos se ilustran por medio del modelo de la ecuación diferencial y las condiciones de frontera del las Ecs.4.15.1a y b.

Paso 1. Iguale con cero a todas las expresiones de la ecuación diferencial, multiplique a toda la ecuación por una función w , llamada la *función de peso*, e integre sobre el dominio del problema $\Omega(0, L)$:

$$\int_0^L w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - q \right] dx = 0 \quad (4.15.3)$$

A esta expresión la llamaremos la *integral ponderada* o *residual ponderado* equivalente a la ecuación original Ec.4.15.1a. La expresión entre paréntesis cuadrados no es idénticamente igual a cero cuando $u(x)$ es reemplazada por su aproximación. Matemáticamente, la Ec.4.15.3 nos indica que el error en la ecuación diferencial es igual a cero en el sentido de la integral ponderada. Cuando $u(x)$ es la solución exacta, la Ec.4.15.3 es trivial. Esta Ec.4.15.3 nos permite elegir N funciones linealmente independientes para w y así obtener N ecuaciones para los c_1, c_2, \dots, c_N de la Ec.4.15.2.

Note que se puede desarrollar la integral pesada de cualquier ecuación diferencial. La función de peso w puede ser cualquier función integrable no nula. En general, la función de peso en la expresión integral esta sujeta a unos requerimientos de continuidad menos estrictos que los de la variable dependiente $u(x)$. La expresión de la integral ponderada es equivalente solamente a la ecuación diferencial, y ésta no incluye a ninguna de las condiciones de frontera.

Paso 2. Mientras que la integral ponderada (Ec.4.15.3) nos permite obtener el número N necesario de relaciones algebraicas entre los c_j para N diferentes funciones de peso w , se requiere que las funciones de aproximación ϕ_j sean de grado tal que U_N (ver Ec.4.15.2) sea diferenciable tantas veces como lo requiera en la ecuación diferencial original y que satisfaga a las condiciones de frontera especificadas. Los métodos aproximados basados en integrales ponderadas como la de la Ec.4.15.3 son conocidos como *métodos de residuales pesados*. Si la diferenciación se distribuye entre la solución aproximada U_N y la función de peso w , la forma de la integral resultante requerirá condiciones de continuidad más débiles sobre ϕ_j , y por lo tanto la expresión de la integral ponderada es conocida como la *forma débil*. Como veremos, esta formulación débil tiene dos características deseadas. Primero, requiere una continuidad más débil (menor grado de diferenciabilidad) de la variable dependiente, que a menudo genera un conjunto simétrico de ecuaciones algebraicas para los coeficientes. Segundo, las condiciones de frontera *naturales* del problema se incluyen en la forma débil, y por lo tanto se requiere que la solución aproximada U_N satisfaga solamente

las condiciones de frontera *esenciales* del problema. Estas dos características de la forma débil juegan un rol importante en el desarrollo de los modelos de elemento finito para el problema.

La igual distribución de la diferenciación entre la función pesada y la variable dependiente es posible solamente si las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial son de orden par, como lo son para la mayoría de los casos de interés. La contribución de la diferenciabilidad de la variable dependiente para la función de peso es dictada por la necesidad de incluir significado físico a los términos de frontera en la forma débil, prescindiendo del efecto sobre los requerimientos de continuidad.

Por otro lado, no debemos proporcionar diferenciación de la variable dependiente a la función de peso si éste no le da significado físico a los términos frontera.

Regresando a Ec.4.15.3, si integramos el primer término de la expresión por partes obtenemos

$$\int_0^L \left\{ w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - wq \right] \right\} dx = \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L = 0 \quad (4.15.4)$$

Note que ahora se requiere que la función de peso w sea diferenciable al menos una vez.

Una parte importante de este paso es identificar los dos tipos de condiciones de frontera asociados con *cualquier* ecuación diferencial: las *naturales* y las *esenciales*. La clasificación es importante tanto para el método variacional de aproximación como para la formulación del elemento finito. La siguiente regla es utilizada para identificar las condiciones de frontera natural y su forma. Después de dividir la diferenciación entre la función de peso y la variable, examine todos los términos frontera en la expresión integral. Los términos de frontera incluyen tanto a la función de peso como a la variable dependiente.

Los coeficientes de la función de peso y sus derivadas en las expresiones de frontera son conocidos como *variable secundarias*. La especificación de las variable secundarias sobre la frontera constituyen las *condiciones de frontera naturales*. Para el caso a la mano, el término de frontera es $w(a du/dx)$. El coeficiente de la función de peso es $a du/dx$. Por lo tanto la variable secundaria es de la forma $a du/dx$.

Las variables secundarias siempre tienen significado físico, y a menudo son cantidades de interés. Denotaremos a la variable secundaria por

$$Q \equiv \left(a \frac{du}{dx} \right) n_x \quad (4.15.5)$$

donde n_x denota el coseno director, $n_x = \cos$ del ángulo entre el eje de las x y el eje normal a la frontera.

La variable dependiente del problema, expresada en la misma forma que la función de peso que aparece en el termino de frontera, el llamada la *variable primaria*, y su especificación sobre la frontera constituye la *condición de frontera esencial*. Para el caso en consideración, la función de peso aparece en el termino frontera como w . Por lo tanto la variable dependiente $u(x)$ es la variable primaria, y la condición de frontera esencial necesita la especificación de $u(x)$ en los puntos de frontera.

Debe notarse que el número y forma de las variables primaria y secundaria depende del orden de la ecuación diferencial. El número de las variable primaria y secundaria es siempre el mismo, y con cada variable primaria hay asociada una secundaria (es decir, desplazamiento y fuerza, temperatura y calor, etc.). Solo una de este par, ya sea la variable primaria o la secundaria, puede especificarse en un punto de la frontera.

Así, un problema dado puede tener una de las tres categorías siguientes de condiciones de frontera especificadas: a) todas las condiciones de frontera son condiciones de frontera esenciales; b) algunas de las condiciones de frontera especificadas son esenciales y las restantes naturales; c) todas las condiciones de frontera son del tipo natural. Para nuestro ejemplo hay una variable primaria $u(x)$ y una secundaria $Q(x)$. En un punto frontera solo una del par (u, Q) puede especificarse. En general una ecuación diferencial de $2m$ -ésimo grado tiene m variables primarias y m variables secundarias, en otras palabras m pares de variables primarias y secundarias.

Utilizando la Ec.4.15.5, la Ec.4.15.4 toma la forma

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L \\ &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left(wa \frac{du}{dx} n_x \right) \Big|_{x=0} - \left(wa \frac{du}{dx} n_x \right) \Big|_{x=L} \quad (4.15.6) \\ &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - (wQ)_0 - (wQ)_L = 0 \end{aligned}$$

La Ec.4.15.6 es llamada la *forma débil* de la ecuación diferencial (Ecs.4.15.1). La palabra "débil" se refiere a la disminución de la continuidad de $u(x)$, la cual era requerida que fuera dos veces diferenciable en la integral pesada (Ec.4.15.3) pero solo una vez en la Ec.4.15.6.

Paso 3. El tercer y último paso de la formulación débil es imponer las condiciones de frontera reales del problema en consideración. Es aquí donde se requiere que la función de peso $w(x)$ valga cero en los puntos frontera donde las condiciones de frontera esenciales son especificadas; es decir, se requiere que satisfaga la *forma homogénea* de las condiciones de frontera esencial especificadas del problema. Este requerimiento sobre w puede parecer arbitrario para la persona no familiarizada con el cálculo variacional. En las fórmulaciones débiles, la función de peso tiene el significado de un cambio *virtual* (o variación) de la variable primaria. Si una variable primaria es especificada en un punto, el cambio virtual en este punto debe de ser cero. Para el problema que estamos analizando, las condiciones de

frontera son dadas en la Ec.4.15.1b. Mediante las reglas de clasificación de las condiciones de frontera, $u(x) = u_0$ es la condición de frontera esencial y $(a \frac{du}{dx})|_{x=L} = Q_0$ es la condición de frontera natural. De esta forma, se requiere que la función de peso satisfaga

$$w(0) = 0, \text{ debido a que } u(0) = u_0$$

Como $w(0) = 0$ y

$$Q(L) = \left(a \frac{du}{dx} n_x \right) \Big|_{x=L} = \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_0$$

la Ec.4.15.1 se reduce a la expresión

$$\int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(L)Q_0 = 0 \quad (4.15.7)$$

la cual es la forma débil equivalente a la ecuación diferencial original (Ec.4.15.1a) y las condiciones de frontera naturales (Ec.4.15.1b). Esto completa los pasos necesarios para el desarrollo de la forma débil o *forma variacional* de una ecuación diferencial.

Los términos "forma variacional" y "forma débil" tienen el mismo significado. Observe que la forma débil existe para todos los problemas (lineales o no lineales) que son descritos por ecuaciones diferenciales de orden dos o superior. Cuando la ecuación diferencial es lineal y de orden par, la forma débil resultante tendrá una forma bilineal *simétrica* en la variable dependiente $u(x)$ y la función de peso $w(x)$.

Debido a las restricciones hechas a las funciones de peso en el paso 3 de la formulación variacional, estas deben de pertenecer a el mismo espacio de funciones que el de las funciones de aproximación (es decir, $w \sim \phi_1$).

16. Formas lineales y bilineales, funcionales cuadráticos. Es bueno conocer, aunque no necesario para el uso de los métodos variacionales o el método del elemento finito, la relación entre la forma débil y el mínimo de un funcional cuadrático asociado con la ecuación diferencial. La forma débil (Ec.4.15.7) contiene dos tipos de expresiones: las que involucran tanto a la variable dependiente u como a la función de peso, y aquellas en las que se encuentra solo ésta última. Denotaremos a estos dos tipos de expresiones como $B(w, u)$ y $I(w)$, respectivamente:

$$B(w, u) = \int_0^L a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx, \quad I(w) = \int_0^L wq dx + w(L)Q_0 \quad (4.16.1)$$

Por lo que la forma débil (Ec.4.15.7) puede expresarse en la forma

$$B(w, u) - I(w) = 0 \quad (4.16.2)$$

la cual es conocida como el *problema variacional* (o débil) asociado con las Ecs.4.15.1. Usando las definiciones de las formas lineales y bilineales, puede verificarse que $B(w, u)$ es bilineal y simétrico en $w(x)$ y $u(x)$, y que $I(w)$ es lineal. El problema variacional asociado con las Ecs.4.15.1 puede verse como el de encontrar la solución u tal que

$$B(w, u) = I(w) \quad (4.16.3)$$

se cumple para cualquier $w(x)$ que satisfaga la forma homogénea de las condiciones de frontera esenciales especificadas y las condiciones de continuidad implicadas por la forma débil. La función $w(x)$ puede verse como una variación (incremento) de la solución real u^* ,

$$u = u^* + w \quad (4.16.4)$$

y $u(x)$ es la solución variacional, es decir, la solución de la Ec.4.16.3. Como tanto $u(x)$ y $u^*(x)$ debe de satisfacer cualquier condición de frontera esencial especificada (además, u^* también satisface cualquier condición de frontera natural especificada), se sigue que $w(x)$ debe de satisfacer la forma homogénea de las condiciones de frontera esenciales especificadas. Así, usando la notación del apartado 14, $w(x)$ es la variación de la solución

Entonces la Ec.4.16.2 puede escribirse como

$$B(\delta u, u) - I(\delta u) = 0$$

Si $B(\delta u, u)$ es simétrico, podemos escribir

$$\delta \left[\frac{1}{2} B(u, u) \right] - \delta [I(u)] = 0 \quad (4.16.5a)$$

donde

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - I(u) \quad (4.16.5b)$$

Para llegar a la segunda línea de la Ec.4.16.5a, se utilizan las siguientes identidades:

$$B(\delta u, u) = \int_0^L a \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx = \delta \int_0^L \frac{a}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4.16.6a)$$

$$= \frac{1}{2} \delta \int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{2} \delta [B(u, u)]$$

$$\begin{aligned}
 I(\delta u) &= \int_0^L \delta u q dx + \delta u(L) Q_0 \\
 &= \delta \left[\int_0^L u q dx + u(L) Q_0 \right] = \delta [I(u)]
 \end{aligned}
 \tag{4.16.6b}$$

Note que la clave en la derivación del funcional $I(u)$ de la forma débil es la linealidad y simetría de la forma bilineal $B(w,u)$. La relación $B(\delta u, u) = \frac{1}{2} \delta B(u, u)$ se cumple solamente si $B(w, u)$ es bilineal y simétrico en w y u . Así, siempre que $B(w, u)$ sea bilineal y simétrico, y $I(w)$ sea lineal, el funcional cuadrático asociado es dado por la Ec.4.16.5b. Cuando $B(w, u)$ no sea lineal en w y u , pero sea simétrico, el funcional $I(u)$ puede ser deducido, pero no de la Ec.4.16.5b.

La Ec.4.16.a representa la condición necesaria para que el funcional $I(u)$ tenga un valor extremo. Para problemas de mecánica de sólidos, $I(u)$ representa el funcional de la energía potencial total, y la Ec.4.16.5a es el enunciado del *principio de la energía potencial total*:

De todas las funciones admisibles u , la que haga que la energía potencial total $I(u)$ sea un mínimo también satisface a la ecuación diferencial junto con las condiciones de frontera natural Ecs.4.15.1.

En otras palabras, la forma débil de una ecuación diferencial es la misma que el enunciado del principio de la energía potencial total. Para problemas que no estén en el campo de la mecánica de sólidos, el funcional $I(u)$ puede no tener algún significado energético, pero aún es útil para los análisis matemáticos (por ejemplo, para considerar la existencia y unicidad de las soluciones).

Como hemos visto, cualquier ecuación diferencial admite una expresión de integral ponderada, y la forma débil existirá siempre que el orden de la ecuación sea de orden dos o mayor. Sin embargo, no todas las ecuaciones admiten la formulación funcional. Para que el funcional exista, la forma bilineal asociada debe ser simétrica en sus argumentos. Por otro lado, los métodos variacionales y el método del elemento finito no requiere un funcional; es suficiente tener una expresión integral o una forma débil que resolver. Si uno tiene un funcional a la mano, la forma débil se obtiene tomando su primera variación.

17. Teoría clásica de placas. La teoría clásica de placas se basa en el campo de desplazamientos (ver Fig.42):

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, & u_2(x, y, z) &= v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{4.17.1}$$

donde (u_1, u_2, u_3) denotan los desplazamientos del punto (x, y, z) a lo largo de las direcciones x, y, z , y (u, v, w) representa los desplazamientos de un punto sobre el plano medio $(x, y, 0)$.

Las ecuaciones de movimiento de la placa pueden encontrarse utilizando el principio de los desplazamientos virtuales, el cual también nos proporciona la forma débil para el modelo del elemento finito. Para una teoría lineal basada en deformaciones infinitesimales y materiales ortotrópicos, los desplazamientos del plano medio (u, v) están desacoplados de la deflexión transversal. Los desplazamientos del plano (u, v) están gobernadas por las ecuaciones discutidas en los capítulos anteriores. Por lo tanto, discutiremos solamente las ecuaciones que rigen la deflexión (flexión) w y el modelo del elemento finito asociado.

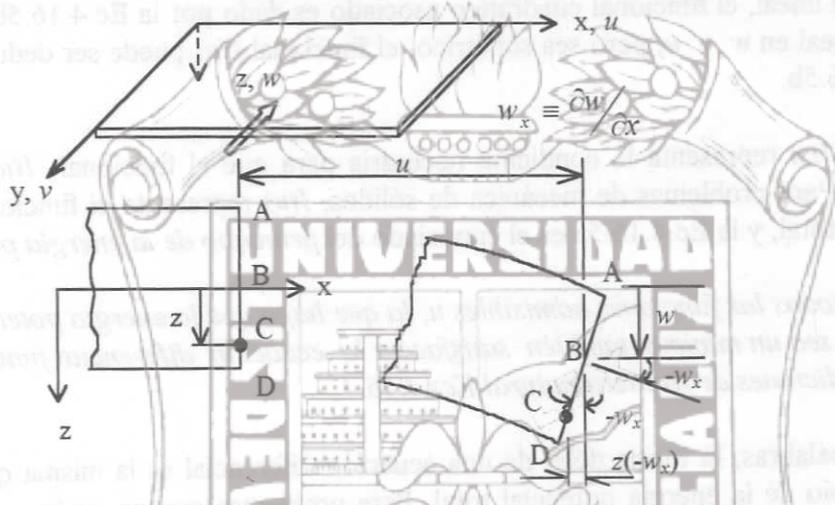


Fig. 42

Las deformaciones lineales debidas a los desplazamientos w de la Ec. 4.17.1 son

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.17.2)$$

y $\epsilon_{xz} = 0, \epsilon_{yz} = 0, \epsilon_z = 0$.

Trabajo virtual. El principio de los desplazamientos virtuales para nuestro caso es

$$\int_{V^e} [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + 2 \sigma_{xy} \delta \epsilon_{xy}] dV - \int_{\mathcal{A}} f(x, y) \delta w dx dy - \int_{\Gamma^e} \left(-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + V_n \delta w \right) ds = 0$$

Ec.(4.17.3)

La última integral, es una integral cerrada sobre el contorno del elemento. Los términos en la integral de volumen representan la energía de deformación virtual almacenada en la placa. Las dos últimas integrales, una definida sobre el plano medio Ω^e y la otra sobre la frontera Γ^e , denotan el trabajo virtual hecho por la carga $f(x,y)$ distribuída transversalmente y las cargas sobre la frontera M_n y V_n (ver Fig.43).

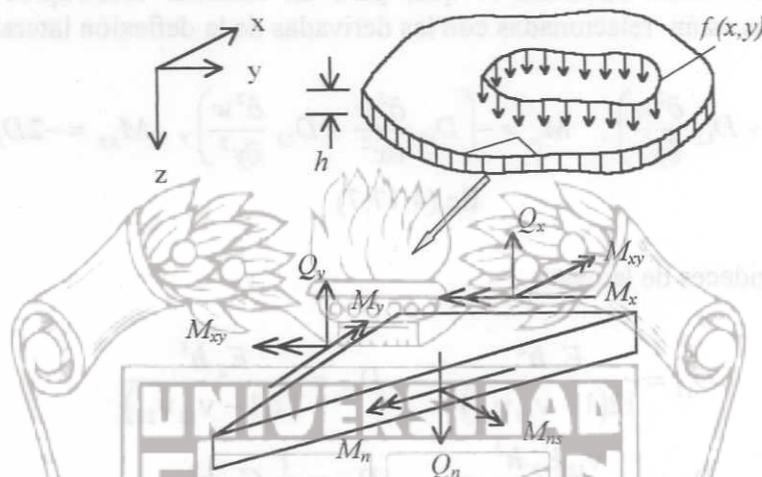


Fig.43

Debido a que el volumen del elemento es $V^e = \Omega^e \times (-1/2h_e, 1/2h_e)$ y los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos son separables en funciones de x e y únicamente, y funciones de z ,

$$F(x,y,z) = g(x,y)f(z) \tag{4.17.4a}$$

podemos escribir a la integral de volumen como

$$\int_{V^e} F(x,y,z) dV = \int_{\Omega^e} \int_{-h/2}^{h/2} f(z)g(x,y) dz dx dy \tag{4.17.4b}$$

Sustituyendo las Ecs.4.17.1 y 4.17.2 para los desplazamientos virtuales y deformaciones en la Ec.4.17.3 e integrando con respecto a z , obtenemos

$$\int_{\Omega^e} \left(-M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - f \delta w \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} \left(-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + V_n \delta w \right) ds = 0 \tag{Ec.(4.17.5)}$$

donde M_x , M_y y M_{xy} son los momentos flexionantes (ver Fig.43), y la última integral, es una integral cerrada sobre el contorno del elemento.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (4.17.6)$$

Note que M_n y M_{ns} denotan los momentos normal y torsionante sobre la frontera, y V_n es la fuerza cortante. Puede demostrarse que, para un material ortotrópico lineal, los momentos flexionantes están relacionadas con las derivadas de la deflexión lateral w :

$$M_x = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Ec.(4.17.7)

donde D_{ij} son las rigideces de la placa,

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{1}{12} G_{12} h^3 \quad (4.17.8)$$

y las ν_{ij} son los módulos de Poisson.

Las fuerzas en las fronteras M_n y V_n pueden relacionarse a M_x, M_y y M_{xy} mediante

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y, \quad V_n = \hat{Q}_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

$$\hat{Q}_n = Q_x n_x + Q_y n_y$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (4.17.9)$$

donde n_x y n_y son los cosenos directores del vector normal unitario a la frontera Γ^c .

Sustituyendo la Ec.4.17.7 en la Ec.4.17.5 obtenemos la forma débil del problema:

$$\int_{\Omega^e} \left[\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 4D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \delta w f \right] dx dy - \int_{\Gamma^c} \left(-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + V_n \delta w \right) ds = 0 \quad (4.17.10)$$

en la cual la última integral es una integral cerrada sobre el contorno del elemento. Es ilustrativo notar que la ecuación diferencial que gobierna a w es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - f = 0$$

Ec.(4.17.11)

Observe que las expresiones entre paréntesis son los momentos flexionantes $-M_x$, $-M_y$ y $-M_{xy}$, respectivamente (ver Ec.4.17.7).

Por supuesto, podemos construir la forma débil de la Ec.4.17.11 usando el procedimiento de los tres pasos, descrito anteriormente. Así, obtenemos

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - v f \right] dx dy$$

$$- \int_{\Gamma^e} v \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) n_y \right] ds$$

$$+ \int_{\Gamma^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} (M_x n_x + M_{xy} n_y) + \frac{\partial v}{\partial y} (M_{xy} n_x + M_y n_y) \right] ds = 0$$

Ec. (4.17.12)

donde v denota a la función de peso, la cual se puede interpretar como la primera variación, $\delta w = v$; las dos últimas integrales son cerradas sobre la frontera del elemento. Ahora, convertiremos las derivadas con respecto a las coordenadas rectangulares (x, y) , a unas con respecto a las coordenadas locales (n, s) . Para ello usamos las identidades

$$\frac{\partial v}{\partial x} = n_x \frac{\partial v}{\partial n} - n_y \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = n_x \frac{\partial v}{\partial s} + n_y \frac{\partial v}{\partial n} \quad (4.17.13)$$

en los términos de frontera de la Ec.4.17.12. Estas integrales de frontera se convierten en

$$- \int_{\Gamma^e} v \hat{Q}_n ds + \int_{\Gamma^e} \left(\frac{\partial v}{\partial n} M_n + \frac{\partial v}{\partial s} M_{ns} \right) ds \quad (4.17.14)$$

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

donde \hat{Q}_n , M_n y M_{ns} son las cantidades definidas por la Ec.4.17.9, y las integrales se evalúan sobre un contorno cerrado. El segundo término en la segunda integral es integrada por partes para llegar a la expresión

$$- \int_{\Gamma^e} \left[\nu \left(\hat{Q}_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) - \frac{\partial \nu}{\partial n} M_n \right] ds \quad (4.17.15)$$

La expresión en paréntesis es denotada por V_n , y su especificación en la frontera es conocida como *la condición de frontera de Kirchhoff*. Suponemos que $\left[\nu M_{ns} \right]_s = 0$.

Condiciones de frontera para placas:

Empotrada

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \phi_s &= 0 \\ \phi_n &= 0 \end{aligned}$$

Simplemente
apoyada

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_{ns} &= 0 \quad \text{ó} \quad \phi_s = 0 \\ M_n &= 0 \end{aligned}$$

Libre

$$\begin{aligned} Q_n &= 0 \\ M_{ns} &= 0 \\ M_n &= 0 \end{aligned}$$

El modelo del elemento finito. Si observamos los términos de frontera de la forma débil, Ec.4.17.10, esta nos sugiere que las condiciones de frontera esenciales involucran la especificación de la deflexión transversal w y de la derivada normal de w , las cuales constituyen las variables primarias del problema. Por lo tanto, las funciones de interpolación para w en el modelo del elemento finito deben de ser tales que w , $\partial w / \partial n$ y $\partial w / \partial s$ sean continuos a través de las fronteras de los elementos interiores. Note que $\partial w / \partial n$ y $\partial w / \partial s$ se relacionan con las derivadas globales $\partial w / \partial x$ y $\partial w / \partial y$ mediante las relaciones (son las inversas de la Ec.4.17.13)

$$\frac{\partial w}{\partial n} = n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_y \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = n_x \frac{\partial w}{\partial y} - n_y \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.17.16)$$

Así, las variables primarias en los nodos deberán ser (esto se sigue directamente de la Ec.4.17.12)

$$w, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}$$

Los elementos finitos que requieren la continuidad de w así como las de sus primeras derivadas son conocidos como elementos C^1 .

Suponga que $w(x,y)$ es una función de interpolación de la forma

$$w = \sum_{j=1}^n \Delta_j \phi_j(x,y) \quad (4.17.17)$$

donde Δ_j denota los valores nodales de $w(x,y)$ y sus derivadas, y $\phi_j(x,y)$ son las funciones de interpolación de Hermite. Un elemento rectangular con cuatro nodos, y con $w(x,y)$, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ en cada nodo, requiere un polinomio de aproximación de 12 términos ($n = 12$) para obtener la expresiones de ϕ_j :

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad \text{Ec.(4.17.18a)}$$

Este no es un polinomio completo de cuarto orden, es un polinomio completo de tercer orden, de acuerdo con el triángulo de Pascal, un polinomio completo de cuarto orden esta dado por:

	Orden
1	0
x y	1
x ² xy y ²	2
x ³ x ² y xy ² y ³	3
x ⁴ x ³ y x ² y ² xy ³ y ⁴	4
x ⁵ x ⁴ y x ³ y ² x ² y ³ xy ⁴ y ⁵	5
x ⁶ x ⁵ y x ⁴ y ² x ³ y ³ x ² y ⁴ xy ⁵ y ⁶	6

Note de la Ec.4.17.18a que w , varía de manera cúbica a lo largo de cualquier línea con "x" constante o "y" constante. A lo largo de cualquier lado, hay dos nodos y dos valores (w y su derivada normal) por nodo para definir la variación cúbica únicamente. Por lo tanto, w queda únicamente definida a lo largo de la frontera de los elementos y es continua a lo largo de las fronteras de los elementos internos. La derivada normal, digamos, $\partial w/\partial x$ sobre la línea $x = \text{constante}$, también varía de manera cúbica en y a lo largo del lado. Ya que únicamente dos valores de $\partial w/\partial x$ están disponibles sobre la línea, la variación cúbica no puede estar definida de manera única, y la continuidad de la pendiente de la normal no es satisfecha. Además, $\partial^2 w/\partial x \partial y$ no es univaluada en las esquinas del elemento. A los elementos que violan cualquiera de las condiciones de continuidad se les llama *elementos no conformes*. Así el elemento rectangular con cuatro nodos y $w(x,y)$ representada por la Ec.4.17.18a es un elemento no conforme. A pesar de esta deficiencia, nos proporciona buenos resultados.

$$w = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 + a_{10}x^3y + a_{11}x^2y^2 + a_{12}xy^3 + a_{13}x^3y^2 + a_{14}x^2y^3 + a_{15}x^3y^3$$

Ec.(4.17.18b)

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

El elemento de cuatro nodos con $w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x \partial y$ como grados de libertad nodal requiere un polinomio con 16 términos, como el de la Ec.4.17.18b (que se obtiene del producto tensorial de los polinomios cúbicos de Hermite unidimensionales). Este es un *elemento conforme*. Los elementos placa rectangulares conformes y no conformes se muestran en la figura 44.

Sustituyendo la Ec.4.17.17 y a $\delta w = \phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) en la Ec.4.17.10 obtenemos el modelo del elemento finito

$$[K^e] \{\Delta^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (4.17.19)$$

donde

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[D_{11} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + D_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (4.17.20)$$

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} Q_i dx dy, \quad Q_i = \int_{\Gamma^e} \left(-M_n \frac{\partial \phi_i}{\partial n} + V_n \phi_i \right) ds \quad (4.17.21)$$

$[K^e]$ es la matriz de rigidez del elemento, $\{f^e\}$ es el vector fuerza en el elemento y $\{Q^e\}$ son los grados de libertad nodal secundarios, la integral para este término se evalúa sobre la frontera de la placa.

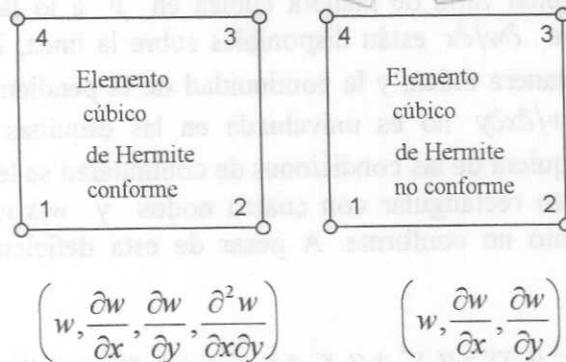


Fig.44

18.- Polinomios de interpolación. En el apartado anterior dijimos que para encontrar los polinomios de interpolación del elemento rectangular era necesario efectuar el producto tensorial de los polinomios cúbicos de Hermite unidimensionales. Por lo tanto ahora procederemos a encontrar estos polinomios.

Los polinomios cúbicos de Hermite unidimensionales deben de satisfacer las siguientes propiedades de interpolación ¹ :

$$w(x_e) = w_1, \quad w(x_{e+1}) = w_2, \quad \theta(x_e) = \theta_1, \quad \theta(x_{e+1}) = \theta_2 \quad (4.18.1)$$

donde el subíndice e denota el número de nodo en el elemento; estas condiciones son equivalentes a que en el extremo x_e del elemento unidimensional existe un desplazamiento lineal w_1 y otro angular θ_1 , mientras que en el extremo x_{e+1} existe el desplazamiento lineal w_2 y otro angular θ_2 .

Como hay cuatro grados de libertad en este elemento (dos por nodo), debemos de seleccionar un polinomio lineal con cuatro parámetros (polinomio cúbico) para expresar a $w(x)$:

$$w(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 \quad (4.18.2)$$

Ahora expresaremos a los c_i en termino de las variables primarias nodales (desplazamientos generalizados)

$$u_1^e \equiv w(x_e), \quad u_2^e \equiv \left. \left(-\frac{dw}{dx} \right) \right|_{x=x_e}, \quad u_3^e \equiv w(x_{e+1}), \quad u_4^e \equiv \left. \left(-\frac{dw}{dx} \right) \right|_{x=x_{e+1}}$$

de tal manera que las condiciones de la Ec.4.18.1 sean satisfechas:

$$\begin{aligned} u_1^e &= w(x_e) = c_1 + c_2x_e + c_3x_e^2 + c_4x_e^3 \\ u_2^e &= \left. \left(-\frac{dw}{dx} \right) \right|_{x=x_e} = -c_2 - 2c_3x_e - 3c_4x_e^2 \\ u_3^e &= w(x_{e+1}) = c_1 + c_2x_{e+1} + c_3x_{e+1}^2 + c_4x_{e+1}^3 \\ u_4^e &= \left. \left(-\frac{dw}{dx} \right) \right|_{x=x_{e+1}} = -c_2 - 2c_3x_{e+1} - 3c_4x_{e+1}^2 \end{aligned} \quad (4.18.3a)$$

¹ Ver J. N. Reddy "An Introduction to the Finite Element Method" , pag. 147, 1993

o, en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_e & x_e^2 & x_e^3 \\ 0 & -1 & -2x_e & -3x_e^2 \\ 1 & x_{e+1} & x_{e+1}^2 & x_{e+1}^3 \\ 0 & -1 & -2x_{e+1} & -3x_{e+1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (4.18.3b)$$

expresando los c_j en término de los u_1^e, u_2^e, u_3^e y u_4^e y sustituyendo los resultados en la Ec.4.18.2, obtenemos

$$w^e(x) = u_1^e \phi_1^e + u_2^e \phi_2^e + u_3^e \phi_3^e + u_4^e \phi_4^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e \phi_j^e \quad (4.18.4a)$$

si hacemos $x_{e+1} = x_e + h_e$, donde h_e es la longitud del elemento (ver figura 45), tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1^e &= 1 - 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3, & \phi_2^e &= (x-x_e)\left(1 - \frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 \\ \phi_3^e &= 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3, & \phi_4^e &= -(x-x_e)\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - \frac{x-x_e}{h_e} \end{aligned} \quad (4.18.4b)$$

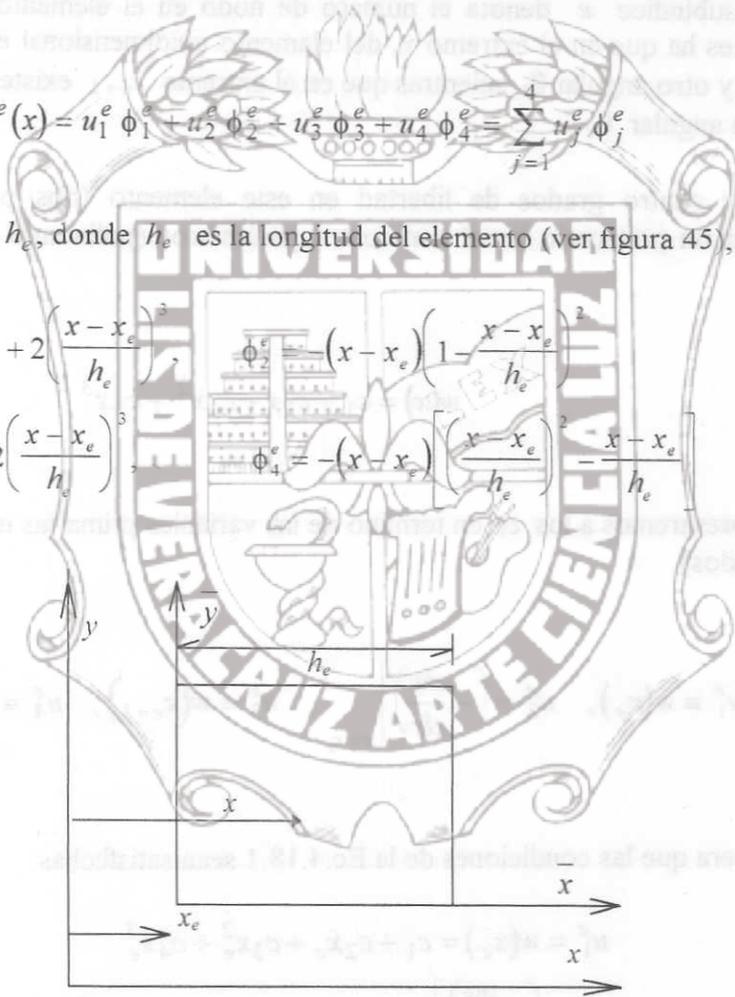


Fig.45

Observe que las funciones de interpolación cúbicas en las Ecs.4.18.4 se derivaron interpolando tanto a $w(x)$ como a sus derivadas en los nodos. Dichos polinomios son conocidos como *familia de funciones de interpolación de Hermite*, y los ϕ_j^e en la Ec.4.18.4b son conocidos como *funciones de interpolación cúbica de Hermite*.

Las funciones de interpolación ϕ_j^e pueden expresarse en términos de las coordenadas locales \bar{x} (ver fig.45), mediante la siguiente transformación de coordenadas

$$\bar{x} = x - x_e$$

así, los polinomios cúbicos de Hermite, se pueden expresar como

$$\phi_1^e = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3, \quad \phi_2^e = -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 \quad (4.18.5)$$

$$\phi_3^e = 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3, \quad \phi_4^e = -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right]$$

las cuales satisfacen las siguientes propiedades de interpolación:

$$\phi_1^e(x_e) = 1, \quad \phi_i^e(x_e) = 0 \quad (i \neq 1)$$

$$\phi_3^e(x_{e+1}) = 1, \quad \phi_i^e(x_{e+1}) = 0 \quad (i \neq 3)$$

$$\left(\frac{d\phi_2^e}{dx}\right)_{x_e} = 1, \quad \left(\frac{d\phi_j^e}{dx}\right)_{x_e} = 0 \quad (j \neq 2) \quad (4.18.6a)$$

$$\left(\frac{d\phi_4^e}{dx}\right)_{x_{e+1}} = 1, \quad \left(\frac{d\phi_i^e}{dx}\right)_{x_{e+1}} = 0 \quad (i \neq 4)$$

Las condiciones anteriores pueden expresarse más compactamente para $(i, j = 1, 2)$ como:

$$\phi_{2i-1}^e(\bar{x}_j) = \delta_{ij}, \quad \phi_{2i}^e(\bar{x}_j) = 0, \quad (4.18.6b)$$

$$\left(\frac{d\phi_{2i-1}^e}{dx}\right)_{\bar{x}_j} = 0, \quad \left(-\frac{d\phi_{2i}^e}{dx}\right)_{\bar{x}_j} = \delta_{ij}$$

donde $\bar{x}_1 = 0$ y $\bar{x}_2 = h_e$, son las coordenadas locales de los nodos 1 y 2 del elemento $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$.

Recordemos que el propósito de haber desarrollado los polinomios de interpolación cúbicos de Hermite es el de poder realizar el producto tensorial, de dichos polinomios unidimensionales, para con ello obtener los correspondientes a un elemento rectangular conforme.

El producto tensorial será:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_5 & \phi_9 & \phi_{13} \\ \phi_2 & \phi_6 & \phi_{10} & \phi_{14} \\ \phi_3 & \phi_7 & \phi_{11} & \phi_{15} \\ \phi_4 & \phi_8 & \phi_{12} & \phi_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^3 \\ -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) \\ 3\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^3 \\ -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{a}\right] \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^3 \\ \bar{y}\left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right) \\ 3\left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^3 \\ \bar{y}\left[\left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 - \frac{\bar{y}}{b}\right] \end{bmatrix} \right\}$$

También es conveniente (para propósitos de integración numérica) expresar a las funciones de interpolación que obtendremos de este producto tensorial, en término de las coordenadas naturales ξ y η (Ver fig.46):

$$\bar{x} = \frac{a}{2}(1 + \xi), \quad \bar{y} = \frac{b}{2}(1 + \eta) \tag{4.18.7}$$

en donde a y b denotan las dimensiones de los lados del elemento rectangular en las direcciones x e y respectivamente.

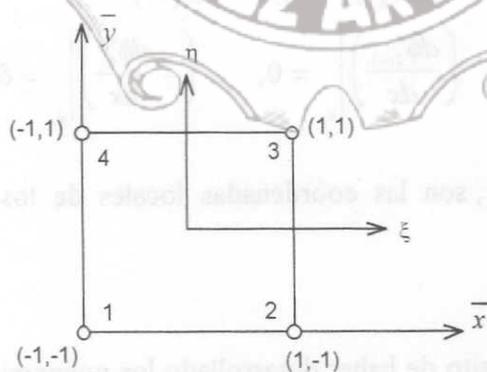


Fig.46

Utilizando estas coordenadas naturales encontramos que los polinomios de interpolación para el elemento rectangular conforme serán:

Elemento cúbico de Hermite:
funciones de interpolación para

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{16} (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 2) (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 2) \\
 \frac{\partial u}{\partial \xi} &= -\frac{1}{16} \xi_i (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 1) (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 2) \\
 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{16} (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 2) \eta_i (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 1) \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{16} \xi_i (\xi + \xi_i)^2 (\xi \xi_i - 1) \eta_i (\eta + \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 1)
 \end{aligned} \tag{4.18.8}$$

para el nodo i , ($i = 1, \dots, 4$), ξ_i y η_i son las coordenadas de i -ésimo nodo del elemento. Las funciones de interpolación para el elemento rectangular no conforme son:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} (\xi \xi_i + 1) (\eta \eta_i + 1) (2 + \xi \xi_i + \eta \eta_i - \xi^2 - \eta^2) \\
 \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \xi_i (\xi \xi_i + 1)^2 (\xi \xi_i - 1) (\eta \eta_i + 1) \\
 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \eta_i (\xi \xi_i + 1) (\eta \eta_i + 1)^2 (\eta \eta_i - 1)
 \end{aligned} \tag{4.18.9}$$

para $i = 1, \dots, 4$.

19. Integración numérica. Cuando tenemos un dominio de forma irregular debemos de utilizar elementos curvilíneos o mallas muy refinadas para obtener una buena representación de éste; por ejemplo podemos reemplazar los elementos rectangulares, que nos darían una mala representación del dominio, por elementos cuadrículares. Pero al hacer este cambio en el tipo de elemento debemos de tener en cuenta que los polinomios de interpolación que hemos obtenido en el artículo anterior son aplicables a elementos rectangulares, y además que es más fácil evaluar numéricamente las integrales para este elemento que para las del elemento cuadricular.

Los métodos de integración numérica, como el de la cuadratura de Gauss, requiere que la integral se evalúe sobre un dominio específico o con respecto a un sistema de coordenadas en particular, más concretamente, requiere que la integral se exprese sobre una región cuadrada $\hat{\Omega}$ de dimensiones 2 por 2, y que el sistema de coordenadas (ξ, η) utilizado sea tal que $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$. Cuando nosotros transformamos un problema en coordenadas (x, y) a uno en coordenadas (ξ, η) lo que estamos haciendo es transformar tanto la geometría del elemento como su ecuación diferencial, teniendo como consecuencia unas expresiones matemáticas más complejas, que a su vez complica una evaluación analítica de las integrales.

Es por eso que la transformación de las integrales definidas sobre el elemento Ω^e se tiene que hacer de tal manera que las nuevas integrales definidas sobre el elemento $\hat{\Omega}$ no presenten problema alguno al evaluarlas numéricamente; el único propósito de esta

transformación es la de poder evaluar numéricamente a las integrales. El elemento $\hat{\Omega}$ es conocido como *elemento maestro*. Por ejemplo, cualquier elemento cuadrilátero puede ser transformado en uno cuadrado, con dimensiones 2 x 2 para poder evaluar las integrales definidas sobre el elemento cuadrilátero por medio de la Cuadratura de Gauss.

La transformación entre Ω^e y $\hat{\Omega}$, o equivalentemente entre (x, y) y (ξ, η) , es efectuada mediante una transformación de coordenadas de la forma

$$x = \sum_{j=1}^m x_j^e \hat{\psi}_j^e(\xi, \eta), \quad y = \sum_{j=1}^m y_j^e \hat{\psi}_j^e(\xi, \eta) \quad (4.19.1)$$

donde $\hat{\psi}_j^e$ denota a las funciones de interpolación del elemento finito para el elemento maestro $\hat{\Omega}$.

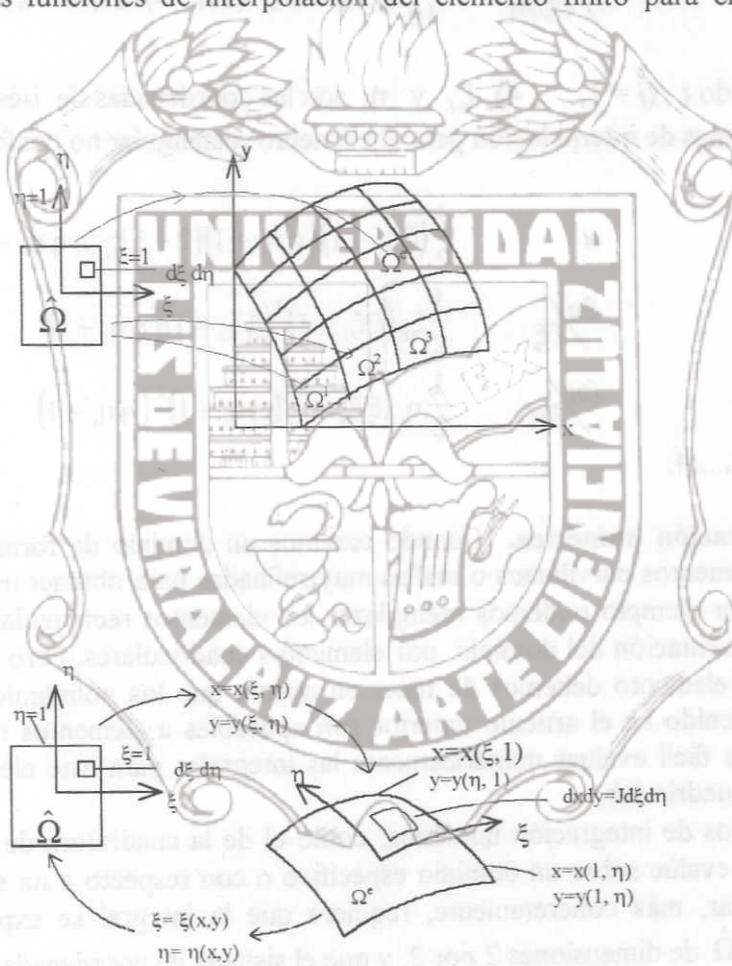


Fig.47

Considérese como ejemplo a el elemento maestro mostrado en la Fig.47. Las coordenadas para el elemento maestro son (ξ, η) tales que $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$. El motivo por el cual se eligió este sistema de coordenadas es el de evaluar las integrales mediante la cuadratura

de Gauss. En este caso, las $\hat{\psi}_j^e$ denotan las funciones de interpolación del elemento rectangular de cuatro nodos mostrado en la figura (es decir $m=4$). La transformación dada por la Ec.4.19.1 convierte un punto (ξ, η) en el elemento maestro $\hat{\Omega}$ a uno en el elemento Ω^e , y viceversa si el Jacobiano es positivo definido. La transformación convierte la línea $\xi = 1$ en $\hat{\Omega}$, en una definida paraméricamente por $x = x(1, \eta)$ y $y = y(1, \eta)$ en el plano (x, y) .

Por ejemplo, considere la línea $\xi = 1$ en el elemento maestro $\hat{\Omega}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
 x(1, \eta) &= \sum_{i=1}^4 x_i \hat{\psi}_i(1, \eta) = x_1 0 + \frac{1}{2} x_2 (1 - \eta) + \frac{1}{2} x_3 (1 + \eta) + x_4 0 \\
 &= \frac{1}{2} (x_2 + x_3) + \frac{1}{2} (x_3 - x_2) \eta \\
 y(1, \eta) &= \sum_{i=1}^4 y_i \hat{\psi}_i(1, \eta) = \frac{1}{2} (y_2 + y_3) + \frac{1}{2} (y_3 - y_2) \eta
 \end{aligned}
 \tag{4.19.2}$$

Claramente x y y son funciones lineales de η . Por lo tanto ellas definen una línea recta. Similarmente, las líneas $\xi = -1$, $\eta = +1$ y $\eta = -1$ son transformadas en líneas rectas en el elemento Ω^e . En otras palabras, el elemento maestro $\hat{\Omega}$ es transformado, debido a una transformación lineal, en un elemento cuadrilátero (es decir un elemento cuyos cuatro lados no son paralelos). Inversamente, cada elemento cuadrilátero de una malla puede ser transformado en el mismo elemento de cuatro nodos $\hat{\Omega}$ sobre el plano (ξ, η) .

En general, la(s) variable(s) dependiente(s) del problema se aproximan mediante expresiones de la forma

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x, y)
 \tag{4.19.3}$$

Las funciones de interpolación ψ_j^e que son usadas para la aproximación de la(s) variable(s) dependiente(s) son, por lo general, diferentes de las $\hat{\psi}_j^e$ usadas para la aproximación de la geometría. Dependiendo del grado relativo de las aproximaciones usadas para la variable dependiente y la geometría, las formulaciones del elemento finito se clasifican en tres categorías.

1. *Superparamétrica* ($m > n$) : el orden de la aproximación usada para la geometría es mayor que el de la aproximación usada para la variable dependiente.
2. *Isoparamétrica* ($m = n$) : se utiliza el mismo grado de aproximación para la variable dependiente y la geometría.
3. *Subparamétrica* ($m < n$) : el orden con el que se aproxima la variable dependiente es mayor.

20. Transformación de coordenadas. Debemos recordar que la transformación de un elemento cuadrilátero de una malla de elemento finito a un elemento maestro $\hat{\Omega}$ es únicamente para poder evaluar numéricamente a las integrales. *No hay una transformación física de un dominio o elemento involucrado en un análisis de elemento finito.* Las ecuaciones algebraicas resultantes de la formulación del elemento están siempre entre los valores nodales del dominio físico. Diferentes elementos de una malla de elemento finito pueden generarse del mismo elemento maestro mediante una transformación de coordenadas. Elementos maestros de diferente orden definen diferentes transformaciones y por lo tanto a diferentes mallas de elemento finito. Por ejemplo, un elemento maestro de orden cúbico puede usarse para generar una malla con elementos cuadriláteros curvilíneos de orden cúbico. Por lo tanto, con la ayuda del elemento maestro apropiado, podemos generar cualquier elemento de una malla. Sin embargo, la transformación de un elemento maestro debe de hacerse de tal forma que no se generen huecos entre elementos, o que no se traslapen también.

Cuando transformamos a un elemento típico, de una malla de elemento finito, a su elemento maestro con el propósito de evaluar numéricamente las integrales, el integrando debe de expresarse también en término de las coordenadas (ξ, η) del elemento maestro. Por ejemplo, considere la siguiente integral

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[D_{11} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e}{\partial x^2} + D_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e}{\partial x^2} \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j^e}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (4.20.1)$$

El integrando es una función de las coordenadas globales x e y . Por lo tanto, debemos de reescribirlo en término de ξ y η usando la transformación de la Ec.4.19.1. Observe que el integrando no solo contiene a las funciones ϕ_i sino también sus derivadas con respecto a las coordenadas globales (x, y) . Así que, debemos de relacionar a las derivadas parciales en coordenadas globales con sus contrapartes en coordenadas locales, mediante la Ec.4.19.1.

Las funciones $\phi_i^e(x, y)$ pueden ser expresadas en término de las coordenadas locales ξ y η mediante la Ec.4.19.1. Por lo que, utilizando la regla de la cadena de la diferenciación parcial, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

Ecs.(4.20.2)

Las cuáles podemos escribir como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.20.3)$$

esta ecuación nos proporciona la relación entre las derivadas de ϕ_i^e con respecto a las coordenadas globales y locales.

La matriz de 3 X 3 en la Ec.4.20.3 se conoce como *matriz jacobiana* de la transformación (Ec.4.19.1):

$$[J] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.20.4)$$

De la Ec.4.20.1 notamos que debemos relacionar a las derivadas parciales en coordenadas globales con las derivadas parciales en coordenadas locales, y esta relación se nos proporciona en la Ec.4.20.3. Así que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.20.5)$$

Esto requiere que la matriz jacobiana sea no singular, lo cual se cumple al ser ésta positiva definida.

De la misma manera podemos decir:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.20.6a)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.20.6b)$$

las derivadas parciales dentro de las matrices anteriores las podemos calcular como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial \hat{\phi}_j^e}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial \hat{\phi}_j^e}{\partial \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial \hat{\phi}_j^e}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial \hat{\phi}_j^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial^2 \hat{\phi}_j^e}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} &= \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial^2 \hat{\phi}_j^e}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial^2 \hat{\phi}_j^e}{\partial \eta^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial^2 \hat{\phi}_j^e}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial \hat{\phi}_j^e}{\partial \xi \partial \eta}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} &= \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial \hat{\phi}_j^e}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

Ecs.(4.20.7)

Regresando a la evaluación numérica de las integrales, tenemos de la Ec.4.20.5, que el jacobiano inverso lo podemos escribir como:

$$[J]^{-1} \equiv [J^*] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.20.8)$$

así, esta Ec.4.20.5 la podemos escribir como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = [J^*] \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_i^e}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.20.9)$$

en donde J_{ij}^* es el elemento en la posición (i, j) del inverso de la matriz jacobiana.

El elemento diferencial de área $dA = dx dy$ en el elemento Ω^e es transformado en

$$dA = dx dy = J d\xi d\eta \quad (4.20.10)$$

en el elemento maestro $\hat{\Omega}$.

Las ecuaciones 4.20.5, 4.20.7, 4.20.8 y 4.20.10 nos proporcionan las relaciones necesarias para transformar las expresiones integrales sobre cualquier elemento Ω^e a sus equivalentes sobre el elemento maestro $\hat{\Omega}$. Por ejemplo considere la expresión integral de la Ec.4.20.1. Suponga que la malla del elemento finito es generada por el elemento maestro $\hat{\Omega}$. Utilizando la transformación de la Ec.4.19.1, podemos escribir

$$K_{ij}^e = \int_{\hat{\Omega}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

la cual puede integrarse fácilmente utilizando la cuadratura de Gauss.

21. Integración numérica sobre un elemento maestro rectangular. La evaluación de integrales de la forma

$$\int_a^b F(x) dx \quad (4.21.1)$$

por métodos exactos es a menudo difícil o imposible debido a la forma complicada del integrando F . En estos casos es necesario utilizar la integración numérica para evaluar de manera aproximada dicha integral, y también es necesaria cuando el integrando depende de cantidades que son conocidas únicamente en algunos puntos discretos (problemas no lineales).

La idea básica detrás de todas las técnicas de integración numérica es la de encontrar una función $P(x)$ que sea una aproximación adecuada de $F(x)$ y además simple para integrarla. Los polinomios de interpolación de grado n , denotados por P_n , los cuales interpolan al integrando en $n+1$ puntos del intervalo $[a, b]$ a menudo producen una función adecuada y además poseen la deseada propiedad de ser simples para su integración. En la Fig.48 se ilustra la aproximación de la función $F(x)$ mediante el polinomio $P_4(x)$, el cual concuerda con la función $F(x)$ en los puntos base indicados en la figura. El valor exacto de la Ec.4.21.1 esta dado por el área bajo la curva $F(x)$, mientras que el valor aproximado de

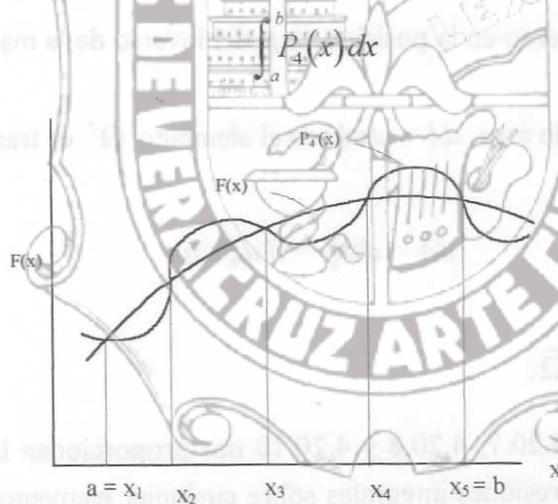


Fig.48

esta dado por el área bajo la curva $P_4(x)$. De aquí notamos que la diferencia (error en la aproximación) $E(x) = F(x) - P_4(x)$ no siempre es del mismo signo, por lo tanto el error total en la integración puede ser pequeño (debido a que los errores positivos en una parte se cancelan con los negativos de otras), aún y cuando $P_4(x)$ no sea una buena aproximación de $F(x)$.

Los métodos de integración numérica más comunes se pueden clasificar en dos grupos básicos:

1. La fórmula de Newton-Cotes que emplea valores de la función en puntos base igualmente espaciados.
2. La fórmula de la Cuadratura de Gauss que emplea puntos base que no están igualmente espaciados.

Cuadratura de Gauss-Legendre. Como se mencionó anteriormente, el método de Newton-Cotes se basa en que los puntos base x_l están igualmente espaciados en el intervalo $[a, b]$; por lo tanto si conocemos el intervalo y el número r de puntos base, podemos conocer la ubicación de todos estos puntos base x_l . El método de Gauss-Legendre se basa en la idea de que estos r puntos base no son conocidos en un principio, por lo que tendremos $2r + 2$ parámetros indeterminados, los coeficientes de peso w_l y los puntos base x_l .

Los puntos base x_l y las funciones de peso w_l se eligen de tal manera que la suma de las $r + 1$ funciones evaluadas en los puntos base y multiplicadas por los coeficientes pesados nos den el valor exacto de la integral cuando $F(x)$ es un polinomio de grado $2r + 1$ o menor. La fórmula de la cuadratura de Gauss-Legendre está dada por

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{F}(\xi) d\xi \approx \sum_{l=1}^r \hat{F}(\xi_l) w_l \quad (4.21.2)$$

en la cual w_l son los factores pesados, ξ_l son los puntos base [raíces de los polinomios de Legendre $P_{r+1}(\xi)$], y \hat{F} es el integrando expresado en coordenadas locales

$$\hat{F}(\xi) = F(x(\xi)) J(\xi) \quad (4.21.3)$$

Para cada r se pueden calcular los factores pesados y puntos de Gauss para la cuadratura de Gauss-Legendre; a continuación indicamos aquellos evaluados para $r = 1, \dots, 6$:

Puntos ξ_i	r	Coef. pesados w_i
0.0000000000	Fórmula de un punto.	2.0000000000
± 0.5773502692	Fórmula de dos puntos.	1.0000000000
0.0000000000 ± 0.7745966692	Fórmula de tres puntos.	0.8888888889 0.5555555555
± 0.3399810435 ± 0.8611363116	Fórmula de cuatro puntos.	0.6521451548 0.3478548451

0.0000000000	Fórmula de cinco puntos.	0.5688888889
±0.5384693101		0.4786286705
±0.9061798459		0.2369268850
±0.2386191861	Fórmula de seis puntos.	0.4679139346
±0.6612093865		0.3607615730
±0.9324695142		0.1713244924

La cuadratura de Gauss-Legendre es preferible a la cuadratura de Newton-Cotes, debido a que la primera necesita menos puntos base que la última. El error en la aproximación es igual a cero si la $(2r + 2)$ -ésima derivada del integrando vale cero. En otras palabras, un polinomio de grado p es integrado de manera exacta empleando $r = \frac{1}{2}(p + 1)$ puntos de Gauss. Cuando $p + 1$ es impar, debemos tomar el entero mayor más próximo:

$$r = \text{entero} \left[\frac{p+1}{2} \right] \quad (4.21.4)$$

En las formulaciones de elemento finito, encontramos integrales cuyos integrandos F son funciones de x , por ejemplo $\phi_i(x)$ y sus derivadas. Para poder utilizar la fórmula 4.21.2 debemos de transformar $F(x)$ en $\hat{F}(\xi)d\xi$ de la manera expuesta en el apartado anterior.

La fórmula de la cuadratura definida sobre un elemento maestro rectangular $\hat{\Omega}_R$ puede derivarse de la fórmula de la cuadratura de Gauss unidimensional. Tenemos

$$\int_{\hat{\Omega}_R} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi \approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=1}^N F(\xi, \eta_j) W_j \right] d\xi \quad (4.21.5)$$

$$\approx \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N F(\xi_I, \eta_J) W_I W_J$$

donde M y N denotan el número de los puntos de cuadratura en las direcciones ξ y η , (ξ_I, η_J) denotan los puntos de Gauss, y W_I y W_J denotan los correspondientes factores pesados de Gauss. La selección del número de puntos de Gauss se basa en la misma fórmula del modelo unidimensional: un polinomio de grado p es integrado exactamente empleando $N = \text{Ent}[\frac{1}{2}(p + 1)]$; que es el menor valor entero más grande que $\frac{1}{2}(p + 1)$. En la mayoría de los casos, las funciones de interpolación son del mismo grado para ξ y η , y por lo tanto tendremos que $M = N$. Cuando el integrando es de diferente grado para ξ y η , el número de los puntos de Gauss se seleccionan eligiendo a el polinomio de mayor grado.

En la siguiente tabla se da información de la selección del orden de integración y la localización de los puntos de Gauss para elementos lineal, cuadrático y cúbico. El máximo grado del polinomio se refiere a el grado del mayor polinomio en ξ o η que esta presente en el integrando $F(\xi, \eta)$.

La localización de los $N \times N$ puntos de Gauss son dados por el producto tensorial de los puntos de Gauss ξ_i unidimensionales:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{Bmatrix} \left\{ \xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_N \right\} \equiv \begin{bmatrix} (\xi_1, \xi_1) & (\xi_1, \xi_2) & \dots & (\xi_1, \xi_N) \\ (\xi_2, \xi_1) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (\xi_N, \xi_1) & \dots & & (\xi_N, \xi_N) \end{bmatrix} \quad (4.21.6)$$

Los valores de los ξ_i son los dados anteriormente.

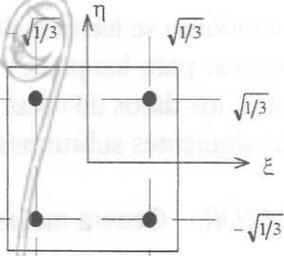
Tipo de Elemento	Max. grado del Polinomio	Orden de Integración ($r \times r$)	Orden del Residual	Localización de los puntos de integración en el elemento maestro
------------------	--------------------------	------------------------------------------	--------------------	------------------------------------------------------------------

Lineal
($r=2$)

2

2×2

$O(h^4)$

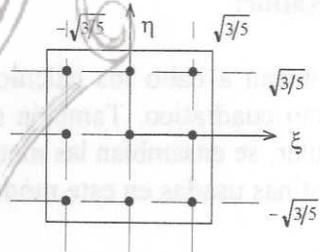


Cuadrático
($r=3$)

4

3×3

$O(h^6)$

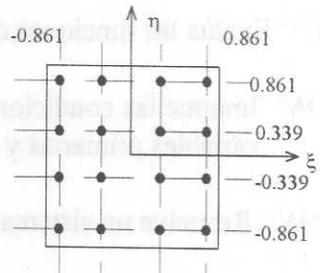


Cúbico
($r=4$)

6

4×4

$O(h^8)$



22.- Implementación del programa PLACA para el análisis de placas rectangulares.

El punto central de esta tesis es utilizar un programa de computadora para poder analizar los problemas de placas delgadas rectangulares, sujetas a diferentes condiciones de apoyo y carga. Como se ha visto en los capítulos anteriores, dichas soluciones ya son conocidas, pero para poder alcanzarlas es necesario evaluar series, que aunque son de convergencia rápida, tienen que evaluarse una para cada punto de la placa. Con el programa PLACA podemos obtener las soluciones para distintos puntos de interés en una sola corrida; ahorrándonos grandes cantidades de tiempo y evitando posibles errores humanos en dichos cálculos. Además los datos necesarios para la corrida del programa son mínimos; el lenguaje utilizado para escribir dicho programa es el FORTRAN.

Comenzaremos dando una descripción general del programa, el cual consta de tres módulos generales:

1. Pre procesador:

En este módulo se leen los datos de entrada para el programa, y se generan las mallas, si uno así lo desea, para las placas por analizar. Cuando no se utilizan las subrutinas para generar las mallas, los datos de éstas deben de suministrarse manualmente. Dentro de este módulo se usan las siguientes subrutinas:

MALLA2DR: Genera mallas únicamente para elementos rectangulares.

MALLA2DG: Genera mallas para dominios generales.

CONECTI: Genera el arreglo de conectividad nodal para el tipo de malla especificada.

2. Procesador:

Aquí se llevan a cabo los cálculos para las matrices de cada elemento rectangular, tanto lineal como cuadrático. También se imponen las condiciones de frontera de cada problema en particular, se ensamblan las matrices y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante. Las subrutinas usadas en este módulo son:

RIGIDEZ: Calcula la matriz de rigidez $[k]$ y el vector de fuerza $\{f\}$ para cada elemento de la malla.

RECTAN: Evalúa las funciones de interpolación para los elementos rectangulares lineales.

CONFRON: Impone las condiciones de frontera especificadas sobre las variables primarias y secundarias.

SOLUCION: Resuelve un sistema de ecuaciones simétrico y bandedo.

INVERSA: Calcula la inversa de una matriz de tres por tres.

3. Post procesamiento:

En este módulo se lleva a cabo la evaluación de los esfuerzos que existen en la malla. Para ello se necesita la siguiente subrutina:

POSTPRO: Calcula los gradientes de la solución, en este caso los esfuerzos y los momentos en las direcciones X , Y , y el torsionante.

Descripción de los datos de entrada para el programa PLACA.

- TITULO* ----- Título del problema por resolver, 80 caracteres.
TITULO1 ----- Título del problema por resolver, 80 caracteres.
ITIPO ----- Tipo de problema:
 $ITIPO = 1$, solución mediante elementos NO CONFORMES.
 $ITIPO = 2$, solución mediante elementos CONFORMES.
IGRAD ----- Indicador para calcular los esfuerzos y momentos en la unidad de post procesamiento.
 $IGRAD = 0$, No se requiere post procesamiento.
 $IGRAD > 0$, Se requiere post procesamiento.
NPE ----- Nodos por elemento:
 $NPE = 4$, cuadrilátero lineal.
MALLA ----- Indicador para la generación de mallas por el programa:
 $MALLA = 0$, la malla no se genera por el programa.
 $MALLA = 1$, la malla se genera por el programa para dominios rectangulares mediante la subrutina *MALLA2DR*.
 $MALLA > 1$, la malla se genera por el programa para dominios generales mediante la subrutina *MALLA2DG*.
IMPRE ----- Indicador para la impresión de ciertos datos:
 $IMPRE = 0$, no se imprime el arreglo *NOD*, ni las matrices locales o globales.
 $IMPRE = 1$, se imprime el arreglo *NOD* y las matrices locales del elemento $[ELK]$ y $\{ELF\}$.
 $IMPRE = 2$, se imprime el arreglo *NOD* y las matrices globales ensambladas $[GLK]$ y $\{GLF\}$.
 $IMPRE > 2$, combinación de $IMPRE = 1$ e $IMPRE = 2$.

Nos saltamos los siguientes datos si *MALLA* es igual a uno

- NEM* ----- Número de elementos en la malla cuando el usuario da los datos de ésta, o la malla se genera por la subrutina *MALLA2DG*.
NNM ----- Número de nodos en la malla cuando el usuario da los de ésta, o la malla es generada por la subrutina *MALLA2DG*.

Nos saltamos los siguientes datos si MALLA es diferente de cero.

NOD(N, I) -- Conectividad para el N-ésimo elemento. Estos datos se leen mediante un ciclo DO, de la manera siguiente: (N = 1, NEM) e (I = 1, NPE).

Nos saltamos los siguientes datos si MALLA es diferente de cero

GLXY(I, J) -- Coordenadas globales X y Y del I-ésimo nodo global en la malla, cuando J = 1 se lee la coordenada X, y cuando J = 2 se lee la coordenada Y. Los ciclos DO para I y J son: ((J=1, 2), I=1, NNM).

Los siguientes datos se leen en la subrutina MALLA2DG, y no serán necesarios a menos que MALLA sea mayor que uno.

NRECL ---- Número de líneas que se leerán en la malla.

Los siguientes 8 datos se leen NRECL veces:

NOD1 ---- Primer nodo global para el segmento de línea.

NODU ---- Último nodo global para el segmento de línea.

INCNOD ---- Incremento nodal sobre la línea.

X1 ---- Coordenada global X de NOD1.

Y1 ---- Coordenada global Y de NOD1.

XU ---- Coordenada global X de NODU.

YU ---- Coordenada global Y de NODU.

RELAC ---- Relación de la longitud del primer elemento con la longitud del último elemento.

Los siguientes datos se leen en la subrutina CONECTI, que es llamada desde MALLA2DG:

NRECEL --- Número de renglones de los elementos que se leerán en la malla

Los siguientes datos se leerán NRECEL veces:

NEL1 ---- Número del primer elemento del renglón.

NELU ---- Número del último elemento del renglón.

INCEL ---- Incremento para el número del elemento del renglón.

INCNOD ---- Incremento en el número del nodo global del elemento en el renglón.

NPE ---- Número de nodos por elemento.

NODO(I) --- Matriz de conectividad del primer elemento en el renglón (I=1, NPE)

Hasta aquí son los datos que se leen en CONECTI.

Hasta aquí son los datos que se leen en MALLA2DG.

Nos saltamos los siguientes datos si MALLA es diferente de uno.

NX ---- Número de elementos en la dirección X.

NY ---- Número de elementos en la dirección Y.

X0 ---- Coordenada X del nodo global 1.

- $DY(I)$ ---- Dimensión del elemento en la dirección Y, ($I = 1, NY$)
 $Y0$ ---- Coordenada Y del nodo global 1.
 $DY(I)$ ---- Dimensión del elemento en la dirección Y, ($I = 1, NY$)
 $NVPE$ ---- Número de variables primarias especificadas.

Nos saltamos los siguientes datos si $NVPE = 0$

- $IVPE(I,J)$ -- Número de nodo, y número del grado de libertad LOCAL de la I-ésima variable primaria especificada, es decir:
 $IVPE(I, 1) =$ Número de nodo; $IVPE(I, 2) =$ Número del GDL LOCAL.
 Los ciclos sobre I y J son: $((J=1,2), I=1, NVPE)$
 $VVPE(I)$ -- Valor especificado de la I-ésima variable primaria, ($I = 1, NVPE$)

$NVSE$ ---- Número de variables secundarias (diferentes de cero) especificadas.

Nos saltamos los siguientes datos si $NVSE$ es igual a cero

- $IVSE(I,J)$ -- Número de nodo, y número del grado de libertad LOCAL de la I-ésima variable secundaria especificada, es decir:
 $IVSE(I, 1) =$ Número de nodo; $IVSE(I, 2) =$ Número del GDL LOCAL.
 Los ciclos sobre I y J son: $((J=1,2), I=1, NVSE)$
 $VVSE(I)$ -- Valor especificado de la I-ésima variable secundaria, ($I = 1, NVSE$).

$E1$ ---- Módulo de Young para el eje global X.

$E2$ ---- Módulo de Young para el eje global Y.

$ANU12$ -- Relación de Poisson en el plano X-Y.

$G12$ --- Módulo cortante en el plano X-Y.

$G13$ --- Módulo cortante en el plano X-Z.

$G23$ --- Módulo cortante en el plano Y-Z.

$ESPE$ --- Espesor de la placa.

- $F0$ } ---- Coeficientes que definen la función de carga aplicada sobre la placa:
 FX } $F = F0 + FX*X + FY*Y.$
 FY }

Ejemplos de aplicación del programa PLACA.

A continuación analizaremos algunos ejemplos de placas rectangulares sujetas a diferentes condiciones en sus apoyos, así como a diferentes tipos de carga. Estos análisis se harán utilizando los métodos analíticos, y después serán resueltos utilizando el programa PLACA.

EJEMPLO 1.- Como primer ejemplo analizaremos el caso de una placa de acero rectangular de 10m. por 10m. simplemente apoyada en sus cuatro extremos, con un espesor de 0.2 m. y sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre toda su superficie de 1tn/m².

Utilizando la tabla 3, vemos que la deflexión máxima se puede calcular con la expresión:

$$w_{max} = \alpha \frac{q a^4}{D} \quad \text{donde} \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

con los datos de nuestro problema encontramos que

$$\alpha = 0.00406 \quad \text{y} \quad D = \frac{(0.1E8)(0.2)^3}{12(1-0.3^2)} = 7326.007$$

por lo que la deflexión máxima es:

$$w_{max} = \frac{0.00406(1)(10^4)}{7326.007} = 0.0055419$$

para calcular los momentos, en las direcciones x y y máximos, tenemos que en esta tabla se utiliza la fórmula

$$(M_x)_{max} = \beta q a^2 \quad \text{donde} \quad \beta = 0.0479$$

$$(M_x)_{max} = 0.0479(1)(10)^2 = 4.79$$

el momento máximo en la dirección y es igual. El momento torsionante para este caso vale cero.

Por otro lado, utilizando el programa PLACA, y modelando únicamente ¼ de placa debido a la simetría del problema, encontramos que la deflexión máxima vale:

w_{max}	$(M_x)_{max}$	$(M_y)_{max}$	$(M_{xy})_{max}$	Núm. de elementos	Tipo de elemento
0.0056275	5.7202	5.7202	-6.6823	1 X 1	Conforme
0.0055492	4.9217	4.9217	-6.5348	2 X 2	Conforme
0.0055463	4.8404	4.8404	-6.5143	3 X 3	Conforme
0.0055453	4.8162	4.8162	-6.5057	4 X 4	Conforme

0.0069113	6.6019	6.6019	-7.0674	1 X 1	No conforme
0.0059080	5.2169	5.2169	-6.7803	2 X 2	No conforme
0.0057070	4.9737	4.9737	-6.6562	3 X 3	No conforme
0.0056365	4.8918	4.8918	-6.5984	4 X 4	No conforme
0.0056036	4.8545	4.8545	-6.5038	5 X 5	No conforme
0.0055857	4.8342	4.8342	-6.5490	6 X 6	No conforme

Como puede observarse de los resultados anteriores, los modelos para elementos conformes y no conformes convergen a la solución dada por el método analítico. Además el elemento conforme se aproxima más rápidamente a la solución comparado con el elemento no conforme.

Ejemplo 2. Se analiza el problema de una placa cuadrada de acero, con sus cuatro extremos empotrados, de 10m de largo por 10m de ancho y con un espesor de 0.2m., esta placa está sujeta a una carga uniformemente distribuida de 1tn/m^2 sobre toda su superficie. Al igual que en el problema anterior, primero utilizaremos la tabla 24 y después el programa PLACA.

De la tabla, encontramos que la deflexión máxima se puede calcular como:

$$w_{max} = \frac{0.00126(1)(10^4)}{7326.007} = 0.0017199$$

de la misma tabla tenemos:

$$(M_x)_{x=0, y=0} = 0.0231qa^2 = 0.0231(1)(10)^2 = 2.31$$

el momento en y tiene el mismo valor.

Utilizando el programa PLACA y modelando $\frac{1}{4}$ de placa, tenemos:

w_{max}	$(M_x)_{x=0, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=0}$	$(M_{xy})_{max}$	Núm. de elementos	Tipo
0.0018083	4.1334	4.1334	-1.6692	1 X 1	Conforme
0.0017265	2.5102	2.5102	-1.8598	2 X 2	Conforme
0.0017270	2.3736	2.3736	-1.6829	3 X 3	Conforme
0.0017270	2.3344	2.3344	-1.7120	4 X 4	Conforme
0.0020197	4.6165	4.6165	-1.6572	1 X 1	No Conforme
0.0019156	2.7783	2.7783	-1.9353	2 X 2	No Conforme
0.0018188	2.4959	2.4959	-1.7459	3 X 3	No Conforme
0.0017799	2.4048	2.2048	-1.7618	4 X 4	No Conforme
0.0017613	2.3632	2.3632	-1.7410	5 X 5	No Conforme
0.0017509	2.3408	2.3408	-1.7270	6 X 6	No Conforme

Ejemplo 3. Se analiza una placa cuadrada de 10m de largo por 10m de ancho y con un espesor de 0.2m. Las condiciones de frontera son: dos bordos opuestos simplemente apoyados y los otros dos empotrados. Esta placa está sujeta a una carga uniformemente distribuida, sobre toda su superficie, con un valor de 1tn/m^2 .

De la tabla 18, encontramos que la deflexión máxima se puede calcular como:

$$w_{max} = \frac{0.00192(1)(10^4)}{7326.007} = 0.0026208$$

y los momentos valen :

$$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=a} = 0.0244qa^2 = 0.0231(1)(10)^2 = 2.44$$

$$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0.0332qa^2 = 0.0332(1)(10)^2 = 3.22$$

utilizando el programa PLACA y modelando $\frac{1}{4}$ de placa, tenemos:

w_{max}	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=a}$	$(M_{xy})_{max}$	Núm. de elementos	Tipo
0.0026527	3.2802	5.2284	-2.9224	1 X 1	Conforme
0.0026163	2.5357	3.6398	-3.0395	2 X 2	Conforme
0.0026169	2.4730	3.4528	-2.8587	3 X 3	Conforme
0.0026168	2.4560	3.3943	-2.8896	4 X 4	Conforme
0.0026169	2.4490	3.3685	-2.8964	5 X 5	Conforme
0.0034891	3.7255	6.7002	-3.6905	1 X 1	No Conforme
0.0028678	2.7426	3.9705	-3.3219	2 X 2	No Conforme
0.0027299	2.5671	3.5963	-3.0497	3 X 3	No Conforme
0.0026805	2.5100	3.4746	-2.9344	4 X 4	No Conforme
0.0026576	2.4842	3.4197	-2.9319	5 X 5	No Conforme
0.0026452	2.4702	3.3903	-2.9120	6 X 6	No Conforme

Ejemplo 4. Se analiza una placa cuadrada de 10m de largo por 10m de ancho y con un espesor de 0.2m. Las condiciones de frontera son: todos los bordos están simplemente apoyados. Esta placa está sujeta a una presión hidrostática con un valor máximo de 1tn/m^2 (Ver figura 19)

Utilizando la Ec.h del apartado 9 , vemos que la deflexión máxima se puede calcular con la expresión:

$$w_{max} = \frac{0.00203(1)(10^4)}{7326.007} = 0.00277095$$

Para el calculo de los momentos usamos los datos de la tabla 5, con ellos vemos que los momentos valen:

$$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0.0239qa^2 = 0.0239(1)(10)^2 = 2.39$$

$$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0.0239qa^2 = 0.0239(1)(10)^2 = 2.39$$

como en los ejemplos anteriores, este resultado también se puede obtener con el programa PLACA, a continuación se dan los resultados obtenidos por este procedimiento:

En este caso, por cuestiones de simetría, sólo se modelo media placa:

w_{max}	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_{xy})_{max}$	Núm. de elementos	Tipo
0.0027940	2.428	2.462	-4.0049	2 X 2	Conforme
0.0027746	2.427	2.451	-3.9483	4 X 2	Conforme
0.0027734	2.484	2.440	-3.9369	4 X 3	Conforme
0.0027727	2.425	2.408	-3.9204	6 X 6	Conforme
0.0032066	3.4582	2.9724	-4.3548	2 X 2	No Conforme
0.0029540	3.0805	2.6184	-4.0467	4 X 2	No Conforme
0.0029038	2.9954	2.5455	-4.0636	4 X 3	No Conforme
0.0028231	2.8232	2.4488	-4.0205	6 X 6	No Conforme

Ejemplo 5. Se analiza una placa cuadrada de 10m de largo por 10m de ancho y con un espesor de 0.2m. Las condiciones de frontera son: dos lados opuestos están simplemente apoyados, otro empotrado y el cuarto libre. Esta placa está sujeta a una carga uniformemente distribuida cuyo valor es 1tn/m^2 . (Ver Fig.37)

Utilizando la Tabla 27 podemos calcular la deflexión máxima mediante la expresión

$$w_x = 0.0113qb^4 / D = 0.0113(1)(10)^4 / 7326.007 = 0.01542$$

y los momentos los calculamos con las siguientes expresiones

$$(M_x)_{x=a/2, y=b} = 0.0972qa^2 = 0.0972(1)(10)^2 = 9.72$$

$$(M_x)_{x=a/2, y=0} = 0.0972qb^2 = -0.119(1)(10)^2 = -1.19$$

estos resultados también concuerdan con el programa PLACA. A continuación se dan los valores máximos para la deformación y momentos obtenidos con el programa.

w_{max}	$(M_x)_{max}$	$(M_y)_{max}$	$(M_{xy})_{max}$	Núm. de elementos	Tipo
0.015327	11.8146	5.4644	-6.8131	1 X 2	Conforme
0.015279	10.3905	5.1487	-6.7844	2 X 2	Conforme
0.015394	9.9843	2.8953	-7.0779	3 X 3	Conforme
0.015332	9.9014	3.1757	-6.2714	4 X 4	Conforme
0.015336	9.8390	3.2264	-6.3518	5 X 5	Conforme
0.015033	12.2440	6.2247	-7.3255	1 X 2	No Conforme
0.014653	10.4897	5.1601	-7.0377	2 X 2	No Conforme
0.015187	10.0376	3.2145	-7.2672	3 X 3	No Conforme
0.015143	9.9381	3.2714	-6.3997	4 X 4	No Conforme
0.015213	9.8639	3.3358	-6.3459	5 X 5	No Conforme

RESÚMEN.

Las deflexiones y pendientes en las placas se miden a partir del plano medio, que se localiza como su nombre lo indica a la mitad del espesor de la placa. La razón para tomar a este plano, como el plano xy antes de la deflexión, no es otra que la de hacer que coincida con la superficie neutra de la placa.

Una parte importante para poder analizar placas es comprender el rol que tienen las curvaturas dentro del análisis, ya que los momentos flexionantes se encuentran íntimamente ligados con los valores de éstas, de manera análoga al problema de flexión de vigas. Recordemos que en el caso de las vigas flexionadas, los momentos son directamente proporcionales a la curvatura, en el caso de placas sucede algo semejante, únicamente que la constante de proporcionalidad, es decir la rigidez de la placa se denota como D , en lugar del EI de las vigas, además, para evaluar a la rigidez de la placa se toma en cuenta a la relación de Poisson ν para el material analizado. Los valores máximo y mínimo que en un punto pueden tomar las curvaturas se les denomina curvaturas principales y, los planos correspondientes a estas curvaturas se llaman planos principales. En un punto por el cual pasan los planos principales, el momento torsionante y la torsión de la superficie son nulos.

Como en este trabajo solo se consideraron placas delgadas, se despreció el valor de los esfuerzos en la dirección perpendicular al plano medio, además se consideró que las deflexiones debían de ser pequeñas comparadas con el espesor de la placa, de manera que nuestros cálculos fueran razonablemente exactos.

Una vez que se encontraron las ecuaciones que relacionan los momentos con las curvaturas, fué necesario encontrar una expresión para la deformada de la placa, ya que es precisamente con ésta con la cual podemos calcular las curvaturas de la misma. Para poder encontrar la ecuación de la deformada se utilizaron dos métodos: el geométrico y el método energético. Por cualquiera de los dos métodos encontramos que la ecuación de la deformada, es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden, la cual se conoce como ecuación biarmónica o ecuación de Lagrange. La ventaja de usar el método energético radica en que a partir de éste podemos plantear el modelo del elemento finito para el problema de flexión de placas.

Dentro de los muchos casos de condiciones de carga y frontera a las que puede estar sometida una placa, el primer caso que se analizó fué el de una placa rectangular simplemente apoyada y sujeta a una carga sinusoidal. La razón para hacer esto es que una carga general $f(x,y)$ puede ser representada como una serie de Fourier - Euler, y por tanto es necesario que se comprenda el método de solución para una placa con carga sinusoidal antes de ver casos más complicados.

Utilizando la solución de Navier se encontró la solución para una placa rectangular simplemente apoyada y, sujeta a carga uniformemente distribuida. Posteriormente, utilizamos la solución de Lévy para resolver problemas un poco más complejos, ya que esta solución cuenta con una convergencia más rápida. Dentro de esta serie aparece un término Y_m , el cual solo depende de la coordenada y , y satisface a las condiciones de frontera paralelas al eje de las y . Al hacer esto, la solución (deflexión) total la podemos tomar como

la suma de dos soluciones (deflexiones), una que satisface la parte no homogénea de la ecuación biarmónica, y la otra que satisface la parte homogénea de la misma. Con este procedimiento se encontraron los valores de las deflexiones, así como su máximo para algunos casos de interés. Una vez encontrada la solución para la deformada, podemos calcular los momentos flexionantes provocados por las cargas, para ello hay que sustituir a la ecuación de la deformada en la expresión correspondiente a cada uno de los momentos, M_x , M_y y M_{xy} , y evaluar las derivadas parciales ahí indicadas. Los resultados obtenidos para las deflexiones y momentos se presentaron en forma de tablas.

El siguiente paso fué analizar algunos problemas de placas rectangulares sujetas a diferentes condiciones de frontera, como por ejemplo las combinaciones entre: frontera empotrada, simplemente apoyada, y frontera libre. Pero para hacer tales análisis antes tuvo que analizarse el problema de una placa rectangular simplemente apoyada y sujeta a momentos uniformemente repartidos a lo largo de sus fronteras. La razón de esto estuvo motivada por el uso del principio de superposición de causas y efectos, cuya aplicación es perfectamente válida debido a que estuvimos trabajando con materiales cuya relación esfuerzo - deformación era lineal, además consideramos la teoría de pequeñas deformaciones y despreciamos los efectos de segundo orden, como lo es el efecto $P-\Delta$. De esta manera se pudo analizar, por ejemplo, el problema de una placa con sus fronteras empotradas. La forma de proceder fué la siguiente: como ya conocíamos la solución para una placa simplemente apoyada, solo nos restaba conocer la solución para una placa simplemente apoyada sujeta a unos momentos en las fronteras, con un valor tal que los giros provocados por éstos fueran iguales a los de la placa uniformemente cargada y simplemente apoyada, una vez conocida esta solución se superpusieron ambos resultados, haciendo que los giros en las fronteras fueran igual a cero, así se obtuvo la solución para el problema original. De igual manera se analizaron otros casos de interés. Los resultados para los desplazamientos y momentos también se presentaron en forma de tablas. Estos dos métodos (el de Navier y el de Lévy) y los resultados presentados aquí constituyen un resumen de los capítulos 2, 4 y 5 del libro de Timoshenko "Theory of plates and shells".

Además de estos dos métodos, también se desarrolló la técnica del elemento finito para resolver el problema de flexión de placas. Esta técnica es una poderosa herramienta numérica con la que cuenta el ingeniero de hoy, para con ella poder resolver problemas complicados. El método del elemento finito consta generalmente de los tres pasos siguientes:

1. El dominio total de un problema es representado por sub dominios conocidos como *elementos finitos*, la colección de elementos finitos se conoce como *malla del elemento finito*.
2. Se aproxima el proceso físico sobre cada uno de los elementos finitos mediante una función predeterminada (polinomio u otra), y se desarrollan ecuaciones algebraicas que relacionan cantidades físicas en ciertos puntos del elemento previamente seleccionados llamados *nodos*.

3. Las ecuaciones obtenidas en cada elemento son *ensambladas* usando la continuidad o balance de las cantidades físicas en cada nodo. Una vez que hemos ensamblado la totalidad de los elementos finitos procedemos a resolver el sistema de ecuaciones que obtenemos y así encontrar la solución de nuestro proceso físico.

El primer paso para desarrollar nuestro modelo del elemento finito fué entender la importancia que una integral ponderada (equivalente a la ecuación diferencial que gobernaba a nuestro proceso) tiene para poder obtener un sistema de ecuaciones consistente, para los parámetros desconocidos de la aproximación. Al hacer esto dijimos que el error en la aproximación en el sentido de la integral ponderada tenía que ser cero. El integrando de la integral ponderada consiste de dos partes: una que son las funciones de peso y la otra, conocida como residuo, que es la ecuación diferencial gobernante, con la excepción de que en ésta se ha sustituido a la solución aproximada.

Después se encontró la formulación débil para un problema con valores en la frontera, en cuyo caso vimos que la forma débil de una ecuación diferencial no es otra cosa que la integral ponderada de dicha ecuación, en la cual el grado de diferenciación se distribuye entre la variable dependiente y la función de peso y, además incluye a las condiciones naturales del problema. A través del desarrollo para encontrar la formulación débil de la ecuación diferencial, vimos que se pueden clasificar las condiciones de frontera en dos tipos: las naturales y las esenciales, las cuales juegan un papel crucial para la derivación de las funciones de aproximación y la selección de los grados de libertad nodales en el modelo del elemento finito. Las condiciones de frontera naturales siempre tienen un significado físico de interés, como por ejemplo, para el caso de placas representan fuerzas aplicadas en los nodos; y las condiciones de frontera esenciales son aquellas que tienen que ver con el tipo de restricción existente en los nodos.

Para encontrar la forma débil de la ecuación diferencial se siguen estos tres pasos:

- 1.- Igualamos con cero a todas las expresiones de la ecuación diferencial y multiplicamos a toda la expresión resultante por una función de peso, después se integra sobre todo el dominio del problema. A la integral resultante la llamamos integral ponderada o residual ponderado, equivalente a la ecuación diferencial original.

- 2.- Se integra por partes a la integral ponderada, para poder identificar dentro de los terminos de frontera, a las condiciones de frontera natural y esencial. De esta manera los coeficientes de la función de peso y sus derivadas en las expresiones de frontera son conocidos como variables secundarias, y la especificación de éstas sobre la frontera constituyen las condiciones de frontera naturales. Por otro lado, la variable dependiente del problema expresada en la misma forma que la función de peso, es llamada la variable primaria, y su especificación sobre la frontera constituye la condición de frontera esencial.

- 3.- El último paso consiste en imponer las condiciones de frontera reales del problema en consideración.

Es en este último punto donde se requiere que la función de peso sea igual a cero en los puntos frontera, para los cuales las condiciones de frontera esenciales están especificadas, es decir se requiere que sea satisfecha la forma homogénea de las condiciones de frontera esenciales. Como la forma débil es un funcional, para el cual es necesario evaluar su valor mínimo, las variaciones en los extremos deben de ser iguales a cero. Cualquier ecuación diferencial admite una expresión de integral ponderada, y la forma débil existirá siempre que el orden de la ecuación sea dos o mayor; sin embargo no todas las ecuaciones admiten la forma funcional, para que éste exista, la forma bilineal asociada debe de ser simétrica en sus argumentos.

Utilizando el principio del trabajo virtual encontramos la forma débil para el problema de flexión de placas. De los términos frontera presentes en la forma débil, pudimos observar que las variables primarias tenían que ser por los menos tres para cada nodo $(w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y)$. Es decir en cada nodo se deben de especificar la deflexión y dos giros. Como el elemento placa consta de cuatro nodos, se requiere que el polinomio de interpolación tenga 12 términos, dicha exigencia es cubierta por un polinomio completo de tercer orden. El elemento que se obtiene con estos tres grados de libertad por nodo lo llamamos *elemento no conforme*, debido a que carece de continuidad en la pendiente a lo largo de sus fronteras, además la segunda derivada de w con respecto a x y y no es univaluada en las esquinas. También utilizamos para el método del elemento finito a un *elemento conforme*, cuyos polinomios de interpolación se dedujeron de la condición de que en cada nodo de éste existen cuatro grados de libertad $(w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x \partial y)$, por lo tanto se tuvo que utilizar un polinomio con 16 términos, este elemento no viola ninguna de las condiciones de continuidad, como en el caso del elemento no conforme.

Una vez establecidos los polinomios que íbamos a utilizar en el método del elemento finito, se procedió a encontrar, en primer lugar, a los polinomios cúbicos de Hermite unidimensionales. Después de encontrar a estos polinomios de Hermite, se realizó el producto tensorial entre ellos, es decir se llevó a cabo la multiplicación tensorial entre el polinomio cúbico de Hermite para el eje x y el correspondiente al eje y ; de esta operación se obtienen los polinomios de interpolación para el elemento rectangular conforme. Estos polinomios se presentaron utilizando las coordenadas naturales del elemento (ξ, η) , es decir haciendo que las dimensiones del elemento para cada lado tuvieran un valor de dos; la razón para ello fué aprovechar la técnica de integración numérica de Gauss - Legendre. El utilizar la integración numérica es obvia al observar las ecuaciones que representan tanto a la matriz de rigidez del elemento, como al vector fuerza y al vector de los grados de libertad nodal secundarios, ya que estas pueden ser difíciles de evaluar por los medios analíticos, además la técnica de integración numérica se puede programar fácilmente.

Antes de utilizar la integración numérica es necesario transformar a las integrales definidas sobre el elemento Ω^e un unas nuevas integrales definidas sobre el elemento $\hat{\Omega}$, conocido como elemento maestro y cuyo dominio es: $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$; recuerde que esto es motivado por la necesidad de evaluar dichas integrales mediante métodos numéricos, y que no hubo ningún cambio físico del elemento en cuestión. Una vez que se encontraron las

ecuaciones para la transformación se procedió a dar un breve repaso de la cuadratura de Gauss - Legendre, con el fin de comprender mejor el método a utilizar.

La ventaja de utilizar el método de la cuadratura de Gauss - Legendre radica primordialmente en que con éste se necesitan menos puntos base para obtener una evaluación exacta de la integral, que los utilizados por el método de Newton - Cotes.

A partir de este punto ya contábamos con las herramientas necesarias para poder “desarrollar” un programa para computadora, con el fin de utilizarlo para analizar el problema de la flexión de placas.

En este trabajo se modificó el programa FEM2DV2 desarrollado por J. N. Reddy, y que se encuentra en su libro “An introduction to the finite element method”, para utilizarlo únicamente como un programa para analizar placas delgadas, al cual se le llamo PLACA. Este programa se escribió en FORTRAN y, con el se resolvieron algunos problemas para poder comprobar su eficiencia y convergencia a la solución “exacta” que nos arrojaban sus resultados, los cuales se comparaban para cada caso con las soluciones proporcionadas por los métodos analíticos.

El primer problema que se analizó con el programa fue el de una placa cuadrada de acero simplemente apoyada y sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre toda su superficie. Cuando este problema se modeló con el método del elemento finito, se aprovechó que el problema tenía dos ejes de simetría, tanto para las condiciones de carga como para las condiciones de frontera, así que solo se utilizó $\frac{1}{4}$ de la placa únicamente. La ventaja de solo haber utilizado $\frac{1}{4}$ de placa radica en que con una malla que tiene la cuarta parte de elementos, comparada con una malla para toda la placa, se obtienen resultados idénticos pero con la ventaja de ahorrar tiempo en el análisis, en la cantidad de datos necesarios para el problema, y en la cantidad de memoria de la computadora. Para este caso la solución analítica nos da como resultado un valor de 0.0055419 para la deflexión máxima, la cual se presenta en el centro de la placa; utilizando el programa PLACA fuimos modelando el problema con mallas de 1X1, 2X2, 3X3 y finalmente con una de 4X4, así pudimos observar que para el elemento conforme los resultados obtenidos con esta serie de mallas cada vez más se aproximaban a la solución analítica, y para la malla de 4X4 se alcanzó un valor para la deflexión máxima de 0.0055453. Comentarios similares se aplican para el valor de los momentos flexionantes. Por otro lado, también se modelo el problema utilizando elementos no conformes y, como era de esperarse su convergencia era más lenta, tanto para las deflexiones como para los momentos; con una malla de 6X6 se alcanzó un valor para la deflexión máxima de 0.0055857; recuerde que se llamó elemento no conforme a aquel que violaba las condiciones de continuidad. Se observó que para ambos casos, el valor de los momentos tiene una convergencia más lenta que la de las deflexiones, esto fue debido a la forma en la cual se calcularon.

Existen dos formas para calcular a los momentos flexionantes, y en general a cualquiera de las variables secundarias, la primera es usando a las ecuaciones ensambladas, las cuales representan a las relaciones de equilibrio del sistema, y de éstas podemos calcularlos, pero para ello necesitamos a la matriz de rigideces global, la cual debido a aspectos

computacionales tuvo que ser modificada y no esta disponible en el programa PLACA. La otra opción, que es la que se utilizó en el programa PLACA, consiste en calcular los momentos usando la solución aproximada, es decir calculando las derivadas de la solución aproximada según se requiera en las ecuaciones de los momentos. Esta última forma de calcular los momentos es menos exacta que la solución dada por el método del equilibrio. Es por eso que los resultados de los momentos obtenidos con el programa tienen una convergencia más lenta que las deflexiones. Para tener una mejor aproximación de éstos es necesario refinar aún más la malla de la placa.

Para el problema dos podemos hacer unos comentarios semejantes a los anteriores, con respecto a los resultados de las deflexiones, sin embargo podemos hacer un comentario adicional a cerca de los momentos. Se observó que la solución para la deflexión se estabilizó para el elemento conforme de 3×3 y el de 4×4 , es decir para ambas mallas se obtuvo el mismo resultado para la deflexión, pero el valor de los momentos no fué igual para ambas mallas, esto se debió a que la convergencia de estos es más lenta y es necesario utilizar una malla más refinada para lograr la estabilidad en los valores, pero con los resultados obtenidos podemos asumir que éstos convergen a la solución "real". Cabe mencionar que con el programa PLACA se obtuvieron los valores para los momentos torsionantes, para los cuales no se da la solución analítica. Para los problemas resueltos con el programa placa podemos observar que los elementos conformes dan mejores resultados que los no conformes tanto para las deflexiones como para los momentos.

Cabe mencionar que la dimensión de los arreglos matriciales, utilizados en el programa, se pueden modificar dependiendo de las necesidades de memoria para resolver el problema, pero esta modificación depende de la cantidad de memoria con la que cuenta la computadora en la cual se corre el programa.

Aún y cuando con este programa podemos resolver algunos casos posibles de flexión de placas, es solo un programa básico que se implementó con la idea de servir de base para otro u otros más complejos, además de mostrar la importancia del método del elemento finito. Por ejemplo, este programa se puede modificar para tomar en cuenta la variación de los esfuerzos a través del espesor de la placa o, para hacer análisis dinámicos de las mismas. Otras modificaciones interesantes podrían ser: tomar en cuenta los efectos de segundo orden, problemas de pandeo, hacer que analice condiciones de carga más complicadas, implementar una sub rutina que grafique los resultados, crear elementos placa con más nodos, etc. Como puede verse, todavía queda mucho por hacer, por lo tanto este trabajo se puede utilizar como base para otras tesis o investigaciones futuras.

REFERENCIAS.

Cook R. D. : Concepts and applications of finite element analysis, second edition. John Wiley & Sons, 1981

Elsgolts L.: Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, segunda edición. Editorial Mir Moscú, 1977.

Kaplan, W., : Advanced calculus, second edition. Addison - Wesley Publishing Company, 1973.

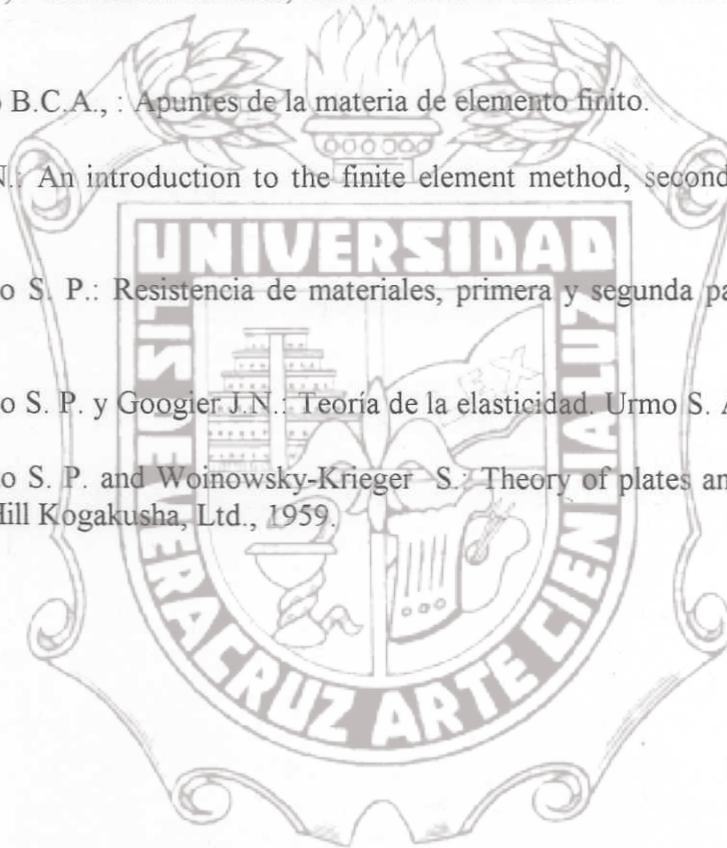
Peña Pardo B.C.A., : Apuntes de la materia de elemento finito.

Reddy J. N.: An introduction to the finite element method, second edition. McGraw-Hill, 1993.

Timoshenko S. P.: Resistencia de materiales, primera y segunda parte. Espasa-Calpe S.A. 1944.

Timoshenko S. P. y Googier J.N.: Teoría de la elasticidad. Urmo S. A. de ediciones, 1968

Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S.: Theory of plates and shells, second edition McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1959.



REFERENCIAS

Cook R. D. : Concepts and applications of finite element analysis, second edition, John Wiley & Sons, 1981

Elsgoltz L. : Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, segunda edición, Mir, Moscú, 1973

Kaplan W. : Advanced calculus, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1973

Peter Ludo R. : ...

Roddy J. : ...

Timoshenko S. P. : ...

Timoshenko S. P. : ...

Timoshenko S. P. : ...



Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

APÉNDICE.

Programa PLACA. :

§DEBUG

PROGRAM PLACA

DESCRIPCION DE ALGUNAS DE LAS VARIABLES USADAS EN EL PROGRAMA:

[CMAT] MATRIZ DE RIGIDECESES PARA PROBLEMAS DE FLEXION DE PLACAS
 {ELF} VECTOR DE LA FUENTE VECTORIAL(O FUERZA) NODAL DE ELEMENTO
 [ELK] MATRIZ DE COEFICIENTES (O RIGIDECESES) DEL ELEMENTO
 {ELU} VECTOR DE LOS VALORES DE LOS ELEMENTOS NODALES DE LAS
 VARIABLES PRIMARIAS (DESPLAZAMIENTOS)
 {ELXY} VECTOR DE COORDENADAS GLOBALES DEL ELEMENTO:
 ELXY(I,1)=COORDENADA X; ELXY(I,2)= COORDENADA Y
 {GLE} VECTOR DE LAS FUENTES NODALES GLOBALES VECTORIALES
 (O FUERZAS)
 {GLU} VECTOR DE VALORES NODALES GLOBALES DE VARIABLES PRIMARIAS
 (DESPLAZAMIENTOS EN COORDENADAS GLOBALES)
 NDF NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NUDO:

NDF=3, PARA FLEXION DE PLACAS CUANDO SE USAN ELEMENTOS
 NO CONFORMES

NDF=4, PARA LA FLEXION DE PLACAS CUANDO SE USAN ELEMENTOS
 CONFORMES

NEQ NUMERO TOTAL DE ECUACIONES EN EL PROBLEMA (=NNM*NDF)
 NHBW ANCHO DE BANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDECESES GLOBAL, GLK
 NN NUMERO TOTAL DE GRADOS DE LIBERTAD POR ELEMENTO

DESCRIPCION DE LOS PARAMETROS USADOS EN ARREGLOS BIDIMENSIONALES

MAXELM..MAXIMO NUMERO DE ELEMENTOS PERMITIDOS EN EL PROGRAMA
 MAXNOD..MAXIMO NUMERO DE NODOS PERMITIDOS EN EL PROGRAMA
 MAXNX...MAXIMO NUMERO DE SUBDIVISIONES PERMITIDAS DX(I) A LO LARGO
 DE X
 MAXNY...MAXIMO NUMERO DE SUBDIVISIONES PERMITIDAS DY(I) A LO LARGO
 DE Y
 MAXSPV..MAXIMO NUMERO DE VARIABLES PRIMARIAS ESPECIFICADAS
 MAXSSV..MAXIMO NUMERO DE VARIABLES SECUNDARIAS ESPECIFICADAS
 NCMAX...DIMENSION REAL DE LAS COLUMNAS DE: [GLK], {GLU}, Y {GLE}

LA DIMENSION REAL DE RENGLONES DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES
 ENSAMBLADOS DEBE DE SER MAYOR QUE O IGUAL A EL NUMERO TOTAL
 DE ECUACIONES ALGEBRAICAS EN EL MODELO DE ELEMENTO FINITO.

NRMAX...DIMENSION REAL DEL RENGLON DE: [GLK]

LA DIMENSION REAL DE LA COLUMNA DE LA MATRIZ DE COEFICIEN-
 TES ENSAMBLADOS DEBE DE SER MAYOR QUE O IGUAL A LA MITAD
 DEL ANCHO DE BANDA.

NOTA: LOS VALORES DE NRMAX, NCMAX, MAXELM, MAXNOD, MAXSSV
 Y MAXSPV EN EL COMANDO "PARAMETER" DEBE DE MODIFI-
 CARSE SEGUN SE REQUIERA POR EL TAMANO DEL PROBLEMA.

Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana

Tesis de Maestría

```
CALL MALLA2DR (IEL,NX,NY,NPE,NNM,NEM,NOD,DX,DY,X0,Y0,  
* GLXY,MAXELM,MAXNOD,MAXNX,MAXNY)
```

```
ELSE  
  READ(5,*) NEM,NNM  
  CALL MALLA2DG(NEM,NNM,NOD,MAXELM,MAXNOD,GLXY)  
END IF
```

```
C  
IF(ITIPO.EQ.1) THEN  
  NDF = 3  
ELSE  
  NDF = 4  
ENDIF
```

```
C  
NEQ=NNM*NDF  
NN=NPE*NDF
```

```
C  
C CALCULO DE LA MITAD DEL ANCHO DEL BANDA DE LA MATRIX DE  
C COEFICIENTES  
C GLOBALES (matriz de rigidez global)
```

```
C  
NHBW=0  
DO 20 N=1,NEM  
DO 20 I=1,NPE  
DO 20 J=1,NPE  
NW=(IABS(NOD(N,I)-NOD(N,J))+1)*NDF  
20 IF (NHEW.LT.NW) NHBW=NW
```

```
C  
C LEE LOS GRADOS DE LIBERTAD ESPECIFICADOS PRIMARIOS Y SECUNDARIOS  
C
```

```
READ(5,*) NVPE  
IF(NVPE.NE.0) THEN  
  READ(5,*) ((IVPE(I,J),J=1,2),I=1,NVPE)  
  READ(5,*) (VPE(I),I=1,NVPE)  
ENDIF  
READ(5,*) NVSE  
IF(NVSE.NE.0) THEN  
  READ(5,*) ((IVSE(I,J),J=1,2),I=1,NVSE)  
  READ(5,*) (VSE(I),I=1,NVSE)  
ENDIF
```

```
C  
WRITE(6,400) TITULO,TITULO1  
WRITE(6,910)  
WRITE(6,890)  
WRITE(6,910)
```

```
C  
C MATRIZ DE RIGIDEZ PARA PLACAS EN FLEXION:  
C
```

```
WRITE(6,500)  
WRITE(6,506)  
READ(5,*) E1,E2,ANU12,G12,G13,G23,ESPE  
WRITE(6,520) ESPE,E1,E2,ANU12,G12  
WRITE(6,530) G13,G23  
ANU21=ANU12*E2/E1  
DENOM=1.0-ANU12*ANU21  
CMAT(1,1)=(ESPE**3)*E1/DENOM/12.0D0  
CMAT(1,2)=ANU21*CMAT(1,1)  
CMAT(2,2)=E2*CMAT(1,1)/E1  
CMAT(3,3)=G12*(ESPE**3)/12.0D0  
SCF=5.0D0/6.0D0  
C44=SCF*G23*ESPE  
C55=SCF*G13*ESPE
```

```
C
```


Tesis de Maestría

* (IBS(K), K=1, NDF)

```
      ENDIF
150 CONTINUE
      WRITE(6,910)
C
C   DEFINE EL GRADO DEL POLINOMIO Y EL NUMERO DE PUNTOS DE INTEGRACION
C   (BASADA EN LA VARIACION SUPUESTA DE LOS COEFICIENTES AX, BX, ETC.)
C
      IPDR=IEL
      NIPR=IPDR+IEL-1
      IPDF=4
      ISTR=2
      WRITE(6,485) IPDF, IPDR, ISTR
```

```
C
C *****
C *
C *                               *
C *                               *
C *                               *
C *                               *
C *                               *
C *                               *
C *****
```

INICIALIZA EL VECTOR Y MATRIZ DE COEFICIENTES GLOBALES

```
DO 180 I=1, NEO
GLF(I)=0.0
DO 180 J=1, NHBW
180 GLK(I, J)=0.0
```

CICLO DO SOBRE EL NUMERO DE ELEMENTOS PARA CALCULAR LAS MATRICES DE LOS ELEMENTOS, Y SU ENSAMBLE COMIENZA AQUI

```
DO 250 N=1, NEM
DO 200 I=1, NPE
NI=NOD(N, I)
ELXY(I, 1)=GLXY(NI, 1)
ELXY(I, 2)=GLXY(NI, 2)
200 CONTINUE
```

LLAMA A LA SUBROUTINA RIGIDEZ PARA ELEMENTOS RECTANGULARES PARA CALCULAR LA [K], [M], Y {E}.

CALL RIGIDEZ (NPE, NN)

```
IF (IMPRE.EQ.1 .OR. IMPRE.EQ.3) THEN
  IF (N.EQ.1) THEN
```

IMPRIME VECTOR Y MATRIZ DE ELEMENTOS (SOLO CUANDO IMPRE=1 O IMPRE=3

```
      WRITE(6,610)
      DO 220 I=1, NN
220          WRITE(6,930) (ELK(I, J), J=1, NN)
              WRITE(6,630)
              WRITE(6,930) (ELF(I), I=1, NN)
```

```
      ENDIF
      ENDIF
```

ENSAMBLE DE LAS MATRICES DE LOS ELEMENTOS PARA OBTENER LAS MATRICES GLOBALES:

Tesis de Maestría

```
DO 240 I=1,NPE
  NR=(NOD(N,I)-1)*NDF
DO 240 II=1,NDF
  NR=NR+1
  L=(I-1)*NDF+II
  GLF(NR)=GLF(NR)+ELF(L)
DO 240 J=1,NPE
  NCL=(NOD(N,J)-1)*NDF
DO 240 JJ=1,NDF
  M=(J-1)*NDF+JJ
  NC=NCL+JJ+1-NR
  IF(NC.GT.0) THEN
    GLK(NR,NC)=GLK(NR,NC)+ELK(L,M)
  ENDIF
```

```
240 CONTINUE
250 CONTINUE
```

```
IMPRIME LAS MATRICES GLOBALES CUANDO IMPRE > 2
```

```
IF(IMPRES.GE.2) THEN
  WRITE(6,640)
  DO 260 I=1,NEQ
260   WRITE(6,930) (GLK(I,J),J=1,NHFW)
      WRITE(6,650)
      WRITE(6,930) (GLF(I),I=1,NEQ)
  ENDIF
```

```
CONDICIONES DE FRONTERA SOBRE LAS VARIABLES PRIMARIAS Y SECUNDARIAS
```

```
* CALL CONFRON(IVPE,IVSE,MAXSPV,MAXSSV,NDF,NCMAX,NRMAX,NEQ,NHFW,
  NVPE,NVSE,GLK,GLF,VVPE,VVSE)
```

```
LLAMA A LA SUBROUTINA "SOLVE" PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECS.
ALGEBRAICAS. LA SOLUCION SE REGRESA EN EL ARREGLO "GLF".
```

```
IRES=0
CALL SOLUCION(NRMAX,NCMAX,NEQ,NHFW,GLK,GLF,IRES)
```

```
DO 290 I=1,NEQ
290   GLU(I)=GLF(I)
```

```
IMPRIME LA SOLUCION (I.E.LOS VALORES NODALES DE LAS VARIABLES
PRIMARIAS)
```

```
WRITE(6,660)
IF(NDF.LE.3) THEN
  MDF=NDF
ELSE
  MDF=3
  WRITE(6,666)
  WRITE(6,930) (GLU(J),J=NDF,NEQ,NDF)
ENDIF
WRITE(6,970)
IF(NDF.GE.3) WRITE(6,690)
  WRITE(6,970)
DMENOR=1.0E-20
DO 300 I=1,NNM
  II=NDF*(I-1)+1
  JJ=II+MDF-1
  IF(GLU(II).GT.DMENOR) THEN
```

Tesis de Maestría

```
DMENOR=GLU (II)
NMENOR=I
XMENOR=GLXY (I, 1)
YMENOR=GLXY (I, 2)
ENDIF
300 WRITE (6, 950) I, (GLXY (I, J), J=1, 2), (GLU (J), J=II, JJ)
WRITE (6, 951)
WRITE (6, 952) NMENOR, XMENOR, YMENOR, DMENOR
WRITE (6, 970)
```

C
C
C
C
C
C
C

```
IF (IGRAD.NE.0) THEN
```

```
*****
*
*          UNIDAD DE POST-PROCESAMIENTO
*
*****
```

```
WRITE (6, 941)
WRITE (6, 770)
WRITE (6, 941)
```

C
C
C
C

```
SE CALCULAN LOS ESFUERZOS Y MOMENTOS PARA UN PROBLEMA DE
FLEXION DE PLACAS.
```

```
DXMENOR = 1.0D-20
DYMENOR = 1.0D-20
DXYMEN = 1.0D-20
DMXMEN = 1.0D-20
DMYMEN = 1.0D-20
DMXYMEN = 1.0D-20
```

```
DO 320 N=1, NEM
DO 310 I=1, NPE
NI=NOD (N, I)
```

```
ELXY (I, 1) = GLXY (NI, 1)
```

```
ELXY (I, 2) = GLXY (NI, 2)
```

```
LI = (NI - 1) * NDF
```

```
L = (I - 1) * NDF
```

```
DO 310 J=1, NDF
```

```
LI=LI+1
```

```
L=L+1
```

```
ELU (L) = GLU (LI)
```

310

```
CONTINUE
```

```
CALL POSTPRO (ELXY, NDF, NPE, ESPE, ELU, ISTR,
```

```
* XX, YX, XY, YY, XXY, YXY, DMXX, DMYX, DMXY1, DMY1, DMXXY, DMYXY)
```

320 CONTINUE

```
WRITE (6, 301) DXMENOR, XX, YX
```

```
WRITE (6, 302) DYMENOR, XY, YY
```

```
WRITE (6, 303) DXYMEN, XXY, YXY
```

```
WRITE (6, 304) DMXMEN, DMXX, DMYX
```

```
WRITE (6, 305) DMYMEN, DMXY1, DMY1
```

```
WRITE (6, 306) DMXYMEN, DMXXY, DMYXY
```

```
WRITE (6, 940)
```

```
ENDIF
```

C
C
C
C

```
STOP
```

F O R M A T S

```
301 FORMAT (/ , 2X, 'EL SIGMA-X MAYOR ES =', F10.4, 3X, 'X=', F10.4,
* 3X, 'Y=', F10.4)
```

```
302 FORMAT (2X, 'EL SIGMA-Y MAYOR ES =', F10.4, 3X, 'X=', F10.4,
```

```

*3X, 'Y=', F10.4)
303 FORMAT(2X, 'EL SIGMA-XY MAYOR ES =', F10.4, 3X, 'X=', F10.4,
*3X, 'Y=', F10.4)
304 FORMAT(/, 2X, 'EL MOMENTO-X MAYOR ES =', F10.4, 3X, 'X=', F10.4,
*3X, 'Y=', F10.4)
305 FORMAT(2X, 'EL MOMENTO-Y MAYOR ES =', F10.4, 3X, 'X=', F10.4,
*3X, 'Y=', F10.4)
306 FORMAT(2X, 'EL MOMENTO-XY MAYOR ES=', F10.4, 3X, 'X=', F10.4,
*3X, 'Y=', F10.4)
400 FORMAT(20A4)
401 FORMAT(20A4)
430 FORMAT (/, 5X, 'COEFICIENTES PARA EL VECTOR DE CARGA:', //,
*      8X, 'COEFICIENTE,  F0.....=', E12.4, //,
*      8X, 'COEFICIENTE,  FX.....=', E12.4, //,
*      8X, 'COEFICIENTE,  FY.....=', E12.4, //)
485 FORMAT (/, 5X, 'DATOS DE LA INTEGRACION NUMERICA:', //,
*      8X, 'REGLA DE CUADRATURA COMPLETA (IPDF*IPDF) IPDF=', I4, //,
*      8X, 'CUADRATURA REDUCIDA (IPDR*IPDR) IPDR=', I4, //,
*      8X, 'REGLA DE CUADRATURA USADA EN POSTPROC. ISTR=', I4, //)
500 FORMAT (/, 16X, 'SE ANALIZA UN PROBLEMA DE FLEXION EN PLACAS')
506 FORMAT (16X, '*** SE USA LA TEORIA CLASICA DE PLACAS *** ')
520 FORMAT (/, 5X, 'PROPIEDADES DEL MATERIAL SOLIDO ANALIZADO:', //,
*      8X, 'ESPESOR DEL CUERPO,  ESP.....=', E12.4, //,
*      8X, 'MODULO DE ELASTICIDAD,  E1.....=', E12.4, //,
*      8X, 'MODULO DE ELASTICIDAD,  E2.....=', E12.4, //,
*      8X, 'RELACION DE POISSON, ANU12.....=', E12.4, //,
*      8X, 'MODULO DE CORTANTE,  G12.....=', E12.4)
530 FORMAT (8X, 'MODULO DE CORTANTE,  G13.....=', E12.4, //,
*      8X, 'MODULO DE CORTANTE,  G23.....=', E12.4, //)
560 FORMAT (/, 5X, 'INFORMACION DE LA MALLA DEL ELEM. FINITO:', //,
*      8X, 'NUMERO DE NODOS POR ELEMENTO, NPE.....=', I4, //,
*      8X, 'NUM. DE GRADOS DE LIBERTAD POR NODO, NDE.....=', I4, //,
*      8X, 'NUMERO DE ELEMENTOS EN LA MALLA, NEM.....=', I4, //,
*      8X, 'NUMERO DE NODOS EN LA MALLA, NNM.....=', I4, //,
*      8X, 'NUMERO DE ECUACIONES POR RESOLVER, NEQ.....=', I4, //,
*      8X, 'MITAD DEL ANCHO DE BANDA DE LA MAT.GLK, NHBW=', I4)
570 FORMAT (8X, 'SUBDIVISIONES DE LA MALLA, NX Y NY.....=', 2I4, //)
580 FORMAT (5X, 'NODO COOR.-X COOR.-Y VARIABLES PRIM. Y',
*      ' SEC. ESPECIFICADAS', //,
*      45X, '(0, NO ESPECI; >0, ESPECI)',
*      /, 40X, 'GDL PRIMARIOS GDL SECUNDARIOS')
610 FORMAT (/, 5X, 'ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES:', //)
630 FORMAT (/, 5X, 'ELEMENTOS DEL VECTOR DE CARGA:', //)
640 FORMAT (/, 5X, 'COEFICIENTES DE LA MATRIZ GLOBAL:', //)
650 FORMAT (/, 5X, 'VECTOR DE CARGA GLOBAL:', //)
660 FORMAT (/, 5X, 'S O L U C I O N:', //)
666 FORMAT (/, 5X, 'VALORES NODALES DE W, XY PARA UN',
*      2X, 'ELEM.PLACA CONFORME:', //)
690 FORMAT (/, 5X, 'NODO', 5X, 'COORD.-X', 6X, 'COORD.-Y', 5X, 'DEFLEC. W',
*      6X, 'ROT.-X', 8X, 'ROT.-Y')
700 FORMAT (/, 5X, 'MATRIZ DE CONECTIVIDAD, [NOD]', //)
710 FORMAT (8X, 'NUM. DE VARIABLES PRIM. ESPECIF., NVPE=', I4)
715 FORMAT (8X, 'NUM. DE VARIABLES SEC. ESPECIF., NVSE=', I4, //)
720 FORMAT (6X, 'NODO GDL VALOR', //)
770 FORMAT (4X, 'COORD.-X COORD.-Y SIGMA-X SIGMA-Y',
*      ' SIGMA-XY MX MY MXY')
800 FORMAT (/, 8X, '*** SE ANALIZA CON MALLA DE ELEMENTOS',
*      ' RECTANGULARES ***')
880 FORMAT (5X, I3, 2E12.4, 7X, 3I4, 2X, 3I4)
885 FORMAT (5X, I3, 2E12.4, 5X, 4I4, 2X, 4I4)
890 FORMAT (27X, 'SALIDA DEL PROGRAMA')
900 FORMAT (10X, 10I5)

```

**Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana**

```

910 FORMAT(2X,70('_',),/)
930 FORMAT(8X,5E14.5)
940 FORMAT(2X,65('_',),/)
941 FORMAT(2X,94('_',),/)
950 FORMAT(5X,13,5E14.5)
951 FORMAT(/,5X,'LA DEFLEXIÓN MAYOR SE ENCUENTRA EN:',/)
952 FORMAT(5X,'NODO',I4,2X,'COOR. X=',F8.5,2X,'COOR. Y=',F8.5,
*      2X,'VALOR=',F14.10)
960 FORMAT(5X,I5,I4,E14.5)
970 FORMAT(2X,77('_',),/)
END
    
```

\$debug

SUBROUTINE CONECTI (NELEM, NODES, MAXELM, MAXNOD, GLXY)

```

C -----
C
C   GENERA ARREGLO DE CONECTIVIDAD NODAL PARA EL TIPO DE MALLA
C   ESPECIFICADA
C   NEL1  = PRIMER ELEMENTO EN EL ARREGLO DE ELEMENTOS
C   NELU  = ÚLTIMO ELEMENTO EN EL ARREGLO
C   INCEL = INCREMENTO DESDE ELEMENTO A EL SIGUIENTE EN EL RENGLON
C   INCNOD = INCREMENTO NODAL DE UN ELEMENTO A EL SIGUIENTE
C   NPE   = NUMERO DE NODOS POR ELEMENTO
C   NODO(I) = NUMERO GLOBAL DE NODOS CORRESPONDIENTE A LOS NODOS
C           LOCALES DEL PRIMER ELEMENTO EN EL RENGLON
C -----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION NODES (MAXELM, 9), GLXY (MAXNOD, 2), NODO (9)
C
C   LEE DATOS DEL ELEMENTO
C
C   READ(5,*) NRECEL
C   DO 30 IREC=1,NRECEL
C   READ(5,*) NEL1,NELU,INCEL,INCNOD,NPE,(NODO(I),I=1,NPE)
C   IF(INCEL.LE.0) INCEL=1
C   IF(INCNOD.LE.0) INCNOD=1
C   IF(NELU.LE.NEL1) NELU=NEL1
C   IF(NELU.GT.NELEM) THEN
C     WRITE(6,60)
C     STOP
C   ELSE
C     NINC=-1
C     DO 20 N=NEL1,NELU,INCEL
C       NINC=NINC+1
C     DO 10 M=1,NPE
C10  NODES(N,M)=NODO(M)+NINC*INCNOD
C20  CONTINUE
C   ENDIF
C30  CONTINUE
C
C   DO 50 N=1,NELEM
C   SUMX=0.0
C   SUMY=0.0
C   NEN=NPE
C   IF(NEN.NE.4) THEN
C     DO 40 M=5,NEN
C     MM=NODES(N,M)
    
```

```

IF(M.NE.9 .OR. M.NE.6) THEN
  M4=NODES(N,M-4)
  M3=NODES(N,M-3)
  IF(M.EQ.8) M3=NODES(N,1)
  IF(GLXY(MM,1).EQ.1.E20)
  *   GLXY(MM,1)=0.5*(GLXY(M4,1)+GLXY(M3,1))
  IF(GLXY(MM,2).EQ.1.E20)
  *   GLXY(MM,2)=0.5*(GLXY(M4,2)+GLXY(M3,2))
  IF(NEN.NE.8) THEN
    SUMX=SUMX+GLXY(M4,1)
    SUMY=SUMY+GLXY(M4,2)
  ENDIF
ELSE
  IF(GLXY(MM,1).EQ.1.E20) GLXY(MM,1)=0.25*SUMX
  IF(GLXY(MM,2).EQ.1.E20) GLXY(MM,2)=0.25*SUMY
ENDIF
40 CONTINUE
ENDIF
50 CONTINUE
60 FORMAT(/, 'MSG DESDE CONECTI: NUM. DE ELE. QUE EXCEDE AL MAX. ')
RETURN
END
  
```



\$debug

```

SUBROUTINE CONFRON(IVPE,IVSE,MAXSPV,MAXSSV,NDF,NCMAX,NRMAX,NEQ,
  * NHBW,NVPE,NVSE,S,SL,VVPE,VVSE)
  
```

LA SUBROUTINA IMPLEMENTA LOS VALORES ESPECIFICADOS DE LAS VARIABLES PRIMARIAS Y SECUNDARIAS MODIFICANDO LA MATRIZ DE COEFICIENTES {S} Y (BANDEADA Y SIMETRICA) Y EL VECTOR DEL LADO DERECHO {SL}.

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION S(NRMAX,NCMAX),SL(NRMAX),IVPE(MAXSPV,2),VVPE(MAXSPV,
  * IVSE(MAXSSV,2),VVSE(MAXSSV)
IF(NVSE.NE.0) THEN
  
```

IMPLEMENTA LOS VALORES ESPECIFICADOS DE LAS VARIABLES SECUNDARIAS:

```

DO 10 I=1,NVSE
  II=(IVSE(I,1)-1)*NDF+IVSE(I,2)
10 SL(II)=SL(II)+VVSE(I)
ENDIF
  
```

IMPLEMENTA LOS VALORES ESPECIFICADOS DE LAS VARIABLES PRIMARIAS:

```

IF(NVPE.NE.0) THEN
  DO 50 NB=1,NVPE
    IE=(IVPE(NB,1)-1)*NDF+IVPE(NB,2)
    VALUE=VVPE(NB)
    IT=NHBW-1
    I=IE-NHBW
    DO 30 II=1,IT
      I=I+1
      IF(I.GE.1) THEN
        J=IE-I+1
        SL(I)=SL(I)-S(I,J)*VALUE
      
```

```

S(I,J)=0.0
ENDIF
30 CONTINUE
S(IE,1)=1.0
SL(IE)=VALUE
I=IE
DO 40 II=2,NHBW
I=I+1
IF(I.LE.NEQ) THEN
SL(I)=SL(I)-S(IE,II)*VALUE
S(IE,II)=0.0
ENDIF
40 CONTINUE
50 CONTINUE
ENDIF
RETURN
END
    
```

\$debug

```

SUBROUTINE INVERSA(A,B)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    
```

C
C
C
C
C
C
C

 LA SUBROUTINA CALCULA LA INVERSA DE UNA MATRIZ DE 3X3, [A]; LA
 INVERSA ES ALMACENADA EN LA MATRIZ [B]

```

DIMENSION A(3,3),B(3,3)
    
```

```

G(Z1,Z2,Z3,Z4)=Z1*Z2-Z3*Z4
F(Z1,Z2,Z3,Z4)=G(Z1,Z2,Z3,Z4) / DET
C1 =G(A(2,2),A(3,3),A(2,3),A(3,2))
C2 =G(A(2,3),A(3,1),A(2,1),A(3,3))
C3 =G(A(2,1),A(3,2),A(2,2),A(3,1))
DET = A(1,1)*C1 + A(1,2)*C2 + A(1,3)*C3
B(1,1) = F(A(2,2),A(3,3),A(3,2),A(2,3))
B(1,2) = -F(A(1,2),A(3,3),A(1,3),A(3,2))
B(1,3) = F(A(1,2),A(2,3),A(1,3),A(2,2))
B(2,1) = -F(A(2,1),A(3,3),A(2,3),A(3,1))
B(2,2) = F(A(1,1),A(3,3),A(3,1),A(1,3))
B(2,3) = -F(A(1,1),A(2,3),A(1,3),A(2,1))
B(3,1) = F(A(2,1),A(3,2),A(3,1),A(2,2))
B(3,2) = -F(A(1,1),A(3,2),A(1,2),A(3,1))
B(3,3) = F(A(1,1),A(2,2),A(2,1),A(1,2))
RETURN
END
    
```

\$debug

```

SUBROUTINE MALLA2DG (NELEM, NNODE, NODES, MAXELM, MAXNOD, GLXY)
    
```

C
C
C
C
C
C

 SE GENERAN LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS NODALES PARA EL TIPO DE
 MALLA ESPECIFICADO

```

NOD1 =PRIMER NUMERO DE NODO EN EL SEGMENTO DE LINEA
NODU =ULTIMO NUMERO DE NODO EN EL SEGMENTO DE LINEA
    
```

```

C   INCNOD =INCRE. DE UN NODO CON EL SIGUIENTE A LO LARGO DE LA LINEA
C   X1,Y1  =COORDENADAS GLOBALES DEL PRIMER NODO SOBRE LA LINEA
C   XU,YU  =COORDENADAS GLOBALES DEL ULTIMO NODO SOBRE LA LINEA
C   RELAC  =RELACION DEL PRIMER ELEMENTO A EL ULTIMO ELEMENTO
C   -----

```

```

C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   DIMENSION GLXY(MAXNOD,2)

```

```

C   DO 10 I=1,NNODE
C   GLXY(I,1)=1.E20
10  GLXY(I,2)=1.E20

```

```

C   LEE NUMEROS DE LOS RECORDS (SEGMENTOS DE LINEA) Y DATOS DE CADA
C   LINEA

```

```

C   READ(5,*)NRECL
C   DO 30 IREC=1,NRECL
C   READ(5,*)NOD1,NODU,INCNOD,X1,Y1,XU,YU,RELAC
C   IF(NODU.LT.NOD1) NODU=NOD1
C   IF(NODU.NE.NOD1) THEN
C     IF(INCNOD.LE.0) INCNOD=1
C     IF(RELAC.LE.0) RELAC=1.0
C     NODIF=(NODU-NOD1)/INCNOD
C     XL1=XU-X1
C     YL1=YU-Y1
C     GLXY(NOD1,1)=X1
C     GLXY(NOD1,2)=Y1
C     ALNGTH=DSQRT(XL1*XL1+YL1*YL1)
C     ALINC=(2.0*ALNGTH/NODIF)*RELAC/(RELAC+1)
C     ALRAT=ALINC/RELAC
C     IF(NODIF.NE.1) DEL=(ALINC-ALRAT)/(NODIF-1)
C     IF(NODIF.EQ.1) DEL = 0.0
C     SUM=0.0
C     I=-1
C     DO 20 N=1,NODIF
C     I=I+1
C     SUM=SUM+ALINC-I*DEL
C     NI=NOD1+N*INCNOD
C     GLXY(NI,1)=X1+XL1*SUM/ALNGTH
C     GLXY(NI,2)=Y1+YL1*SUM/ALNGTH
20  CONTINUE
C   ENDIF
30  CONTINUE
C   CALL CONECTI(NELEM,NODES,MAXELM,MAXNOD,GLXY)
C   RETURN
C   END

```

\$debug

```

SUBROUTINE MALLA2DR(IEL,NX,NY,NPE,NNM,NEM,NOD,DX,DY,XO,YO,
*                GLXY,MAXNEM,MAXNNM,MAXNX,MAXNY)

```

```

C   -----
C   LA SUBRUTINA GENERA LOS ARREGLOS [NOD] Y [GLXY] PARA DOMINIOS
C   RECTANGULARES. EL DOMINIO SE DIVIDE EN NX SUBDIVISIONES A LO LARGO

```



```

C
DX(NEX1)=0.0
DY(NEY1)=0.0
XC=X0
YC=Y0
IF(NPE.EQ.8) THEN
DO 180 NI=1,NEY1
I=(NXX1+NEX1)*(NI-1)+1
J=2*NI-1
GLXY(I,1)=XC
GLXY(I,2)=YC
DO 150 NJ=1,NX
DELX=0.5*DX(NJ)
I=I+1
GLXY(I,1)=GLXY(I-1,1)+DELX
GLXY(I,2)=YC
I=I+1
GLXY(I,1)=GLXY(I-1,1)+DELX
GLXY(I,2)=YC
150 CONTINUE
IF(NI.LE.NY) THEN
I=I+1
YC=YC+0.5*DY(NI)
GLXY(I,1)=XC
GLXY(I,2)=YC
DO 160 II=1,NX
I=I+1
GLXY(I,1)=GLXY(I-1,1)+DX(II)
GLXY(I,2)=YC
160 ENDIF
180 YC=YC+0.5*DY(NI)
C
ELSE
YC=Y0
DO 200 NI=1,NEY1
XC=X0
I=NXX1+IEL*(NI-1)
DO 190 NJ=1,NEX1
I=I+1
GLXY(I,1)=XC
GLXY(I,2)=YC
IF(NJ.LT.NEX1) THEN
IF(IEL.EQ.2) THEN
I=I+1
XC=XC+0.5*DX(NJ)
GLXY(I,1)=XC
GLXY(I,2)=YC
ENDIF
ENDIF
190 XC=XC+DX(NJ)/IEL
XC=X0
IF(IEL.EQ.2) THEN
YC=YC+0.5*DY(NI)
DO 195 NJ=1,NEX1
I=I+1
GLXY(I,1)=XC
GLXY(I,2)=YC
IF(NJ.LT.NEX1) THEN
I=I+1
XC=XC+0.5*DX(NJ)
GLXY(I,1)=XC
GLXY(I,2)=YC

```



```

        ENDIF
195      XC=XC+0.5*DX (NJ)
        ENDIF
200      YC=YC+DY (NI) / IEL
        ENDIF
        RETURN
        END
    
```

§debug

```

SUBROUTINE POSTPRO (ELXY, NDF, NPE, ESPE, ELU, ISTR,
*           XX, YX, XY, YY, XXY, YXY, DMXX, DMYX, DMXY1, DMY1, DMXXY, DMYXY)
    
```

C
C
C
C
C
C

CALCULA LAS DERIVADAS DE LA SOLUCION PARA LA FLEXION DE
PLACAS

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION ELXY (9, 2), ELU (27), GAUSPT (5, 2)
COMMON /PST/ A10, A1X, A1Y, A20, A2X, A2Y, A00, C0, CX, CY, F0, FX, FY,
*           C44, C55, AMJ, CMAT (3, 3)
COMMON /SHP/ SF (9), GDSF (2, 9), SFH (16), GDSFH (2, 16), GDDSFH (3, 16)
COMMON /MENOR/ DXMENOR, DYMENOR, DXYMEN, DMXMEN, DMYMEN, DMXYMEN
    
```

C

```

DATA GAUSPT / 5 * 0.0D0, -1.0D0, -0.57735027D0, 0.0D0,
* 0.57735027D0, 1.0D0 /
PI = 4.0D0 * DATAN (1.0D0)
CONST = 180.0D0 / PI
    
```

C
C
C
C

CALCULO DEL GRADIENTE/ESFUERZOS EN LOS PUNTOS DE LA INTEGRACION
REDUCIDA DE GAUSS DE LOS ELEMENTOS RECTANGULARES:

```

DO 100 NI = 1, 5
DO 100 NJ = 1, 5
XI = GAUSPT (NI, ISTR)
ETA = GAUSPT (NJ, ISTR)
CALL RECTAN (NPE, XI, ETA, DET, ELXY, NDF)
XC = 0.0
YC = 0.0
DO 50 I = 1, NPE
XC = XC + SF (I) * ELXY (I, 1)
50  YC = YC + SF (I) * ELXY (I, 2)
    
```

C
C
C
C
C

PROBLEMAS DE FLEXION DE PLACAS:
ESFUERZOS SGMAX, SGMAY Y SGMXY SE CALCULAN EN EL SUPERIOR/INFERIOR
DE LA PLACA (Y SGMXZ Y SGMYZ SON CONSTANTES A LO LARGO DEL ESPESOR

```

PLTD = (ESPE * ESPE) / 6.0D0
DSXY = 0.0
DSXX = 0.0
DSYY = 0.0
    
```

C
C
C

TEORIA CLASICA DE PLACAS:

```

NN = NPE * NDF
DO 90 I = 1, NN
DSXX = DSXX + GDDSFH (1, I) * ELU (I)
DSYY = DSYY + GDDSFH (2, I) * ELU (I)
    
```

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Tesis de Maestría

```
C GDSF(J,I) ..... DERIVADA DE SF(I) CON RESPECTO A X SI J=1 Y
C Y SI J=2
C XNODE(I,J) ..... J-ESIMA (J=1,2) COORDENADA DEL NODO I DEL ELE-
C MENTO.
C NP(I) ..... ARREGLO DE LOS NODOS DE LOS ELEMENTOS (USADO PARA
C DEFIRNIR SF Y DSF)
C GJ(I,J) ..... MATRIZ JACOBIANA.
C GJINV(I,J) ..... INVERSA DE LA MATRIZ JACOBIANA.
C -----
```

```
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C DIMENSION ELXY(9,2),XNODE(9,2),DSF(2,9),GJ(2,2),GJINV(2,2)
C DIMENSION GGJ(3,3),GGINV(3,3),DDSJ(3,16),DDSF(3,4),DJCB(3,2),
C * DSFH(3,16),DDSFH(3,16)
C COMMON/SHP/SF(9),GDSF(2,9),SFH(16),GDSFH(2,16),GDDSFH(3,16)
C DATA XNODE/-1.0D0, 2*1.0D0, -1.0D0, 0.0D0, 1.0D0, 0.0D0, -1.0D0,
C * 0.0D0, 2*-1.0D0, 2*1.0D0, -1.0D0, 0.0D0, 1.0D0, 2*0.0D0/
```

```
C FNC(A,B)=A*B
```

```
C FUNCIONES DE INTERPOLACION LINEAL DE LAGRANGE PARA UN ELEMENTO DE
C CUATRO NODOS.
```

```
DO 10 I=1,NPE
XP =XNODE(I,1)
YP =XNODE(I,2)
XI0 =1.0+XI*XP
ETA0=1.0+ETA*YP
SF(I) =0.25*FNC(XI0,ETA0)
DSF(1,I)=0.25*FNC(XP,ETA0)
10 DSF(2,I)=0.25*FNC(YP,XI0)
```

```
C CALCULO DE LA MATRIZ JACOBIANA [GJ] Y SU INVERSA [GJINV].
```

```
DO 40 I=1,2
DO 40 J=1,2
GJ(I,J)=0.0
DO 40 K=1,NPE
40 GJ(I,J)=GJ(I,J)+DSF(I,K)*ELXY(K,J)
```

```
DET=GJ(1,1)*GJ(2,2)-GJ(1,2)*GJ(2,1)
GJINV(1,1)=GJ(2,2)/DET
GJINV(2,2)=GJ(1,1)/DET
GJINV(1,2)=-GJ(1,2)/DET
GJINV(2,1)=-GJ(2,1)/DET
```

```
C FUNCIONES DE INTERPOLACION CONFORMES DE HERMITE (PARA ELEMENTO
C DE CUATRO NODOS)
```

```
IF(NDF.EQ.4) THEN
```

```
II=1
```

```
DO 60 I=1,NPE
```

```
XP =XNODE(I,1)
```

```
YP =XNODE(I,2)
```

```
XI1 =XI*XP-1.0
```

```
XI2 =XI1-1.0
```

```
ETA1 =ETA*YP-1.0
```

```
ETA2 =ETA1-1.0
```

```
XI0 =(XI+XP)**2
```

```
ETA0 =(ETA+YP)**2
```

```
XI00 =XI+XP
```

```

XIP1 =3.0*XI*XP+XP*XP
XIP2 =3.0*XI*XP+2.0*XP*XP
YIPO =ETA+YP
YIP1 =3.0*ETA*YP+YP*YP
YIP2 =3.0*ETA*YP+2.0*YP*YP
    
```

```

SFH(II) =0.0625*FNC(ETA0,ETA2)*FNC(XI0,XI2)
DSFH(1,II) =0.0625*FNC(ETA0,ETA2)*XIP0*(XIP1-4.0)
DSFH(2,II) =0.0625*FNC(XI0,XI2)*YIPO*(YIP1-4.0)
DDSFH(1,II) =0.125*FNC(ETA0,ETA2)*(XIP2-2.0)
DDSFH(2,II) =0.125*FNC(XI0,XI2)*(YIP2-2.0)
DDSFH(3,II) =0.0625*(XIP1-4.0)*(YIP1-4.0)*XIP0*YIPO
    
```

```

SFH(II+1) =-0.0625*XP*FNC(XI0,XI1)*FNC(ETA0,ETA2)
DSFH(1,II+1) =-0.0625*FNC(ETA0,ETA2)*XP*XIP0*(XIP1-2.0)
DSFH(2,II+1) =-0.0625*FNC(XI0,XI1)*XP*YIPO*(YIP1-4.0)
DDSFH(1,II+1) =-0.125*FNC(ETA0,ETA2)*XP*(XIP2-1.0)
DDSFH(2,II+1) =-0.125*FNC(XI0,XI1)*(YIP2-2.0)*XP
DDSFH(3,II+1) =-0.0625*XP*XIP0*(XIP1-2.0)*(YIP1-4.0)*YIPO
    
```

```

SFH(II+2) =-0.0625*YP*FNC(XI0,XI2)*FNC(ETA0,ETA1)
DSFH(1,II+2) =-0.0625*FNC(ETA0,ETA1)*YP*XIP0*(XIP1-4.0)
DSFH(2,II+2) =-0.0625*FNC(XI0,XI2)*YP*YIPO*(YIP1-2.0)
DDSFH(1,II+2) =-0.125*FNC(ETA0,ETA1)*YP*(XIP2-2.0)
DDSFH(2,II+2) =-0.125*FNC(XI0,XI2)*YP*(YIP2-1.0)
DDSFH(3,II+2) =-0.0625*YP*YIPO*(YIP1-2.0)*(XIP1-4.0)*XIP0
    
```

```

SFH(II+3) =0.0625*XP*YP*FNC(XI0,XI1)*FNC(ETA0,ETA1)
DSFH(1,II+3) =0.0625*FNC(ETA0,ETA1)*XP*YP*(XIP1-2.0)*XIP0
DSFH(2,II+3) =0.0625*FNC(XI0,XI1)*XP*YP*(YIP1-2.0)*YIPO
DDSFH(1,II+3) =0.125*FNC(ETA0,ETA1)*XP*YP*(XIP2-1.0)
DDSFH(2,II+3) =0.125*FNC(XI0,XI1)*XP*YP*(YIP2-1.0)
DDSFH(3,II+3) =0.0625*XP*YP*YIPO*XIP0*(YIP1-2.0)*(XIP1-2.0)
    
```

```

II=I*NDI+1
CONTINUE
    
```

ELSE

FUNCIONES DE INTERPOLACIONES NO-CONFORMES DE HERMITE (ELEMENTO DE CUATRO NODOS)

```

II=1
DO 80 I=1,NPE
XP =XNODE(I,1)
YP =XNODE(I,2)
XI0 =XI*XP
ETA0 =ETA*YP
XIP1 =XI0+1
ETAP1 =ETA0+1
XIM1 =XI0-1
ETAM1 =ETA0-1
XID =3.0+2.0*XI0+ETA0-3.0*XI*XI-ETA*ETA-2.0*XI/XP
ETAD =3.0+XI0+2.0*ETA0-XI*XI-3.0*ETA*ETA-2.0*ETA/YP
ETAXI =4.0+2.0*(XI0+ETA0)-3.0*(XI*XI+ETA*ETA)
        -2.0*(ETA/YP+XI/XP)
    
```

```

SFH(II) = 0.125*XIP1*ETAP1*(2.0+XI0+ETA0-XI*XI-ETA*ETA)
DSFH(1,II) =0.125*XP*ETAP1*XID
DSFH(2,II) =0.125*YP*XIP1*ETAD
DDSFH(1,II) =0.250*XP*ETAP1*(XP-3.0*XI-1.0/XP)
DDSFH(2,II) =0.250*YP*XIP1*(YP-3.0*ETA-1.0/YP)
DDSFH(3,II) =0.125*XP*YP*ETAXI
    
```

```

SFH(II+1) =0.125*XP*XIP1*XIP1*XIM1*ETAP1
    
```

Tesis de Maestría

```
DSFH(1,II+1) =0.125*XP*XP*ETAP1*(3.0*XI0-1.0)*XIP1
DSFH(2,II+1) =0.125*XP*YP*XIP1*XIP1*XIM1
  DDSFH(1,II+1) =0.250*XP*XP*XP*ETAP1*(3.0*XI0+1.0)
DDSFH(2,II+1) =0.0
DDSFH(3,II+1) =0.125*XP*XP*YP*(3.0*XI0-1.0)*XIP1
```

C

```
SFH(II+2) =0.125*YP*XIP1*ETAP1*ETAP1*ETAM1
DSFH(1,II+2) =0.125*XP*YP*ETAP1*ETAP1*ETAM1
DSFH(2,II+2) =0.125*YP*YP*XIP1*(3.0*ETA0-1.0)*ETAP1
DDSFH(1,II+2) =0.0
DDSFH(2,II+2) =0.250*YP*YP*YP*XIP1*(3.0*ETA0+1.0)
DDSFH(3,II+2) =0.125*XP*YP*YP*(3.0*ETA0-1.0)*ETAP1
II=I*NDF+1
80 CONTINUE
```

ENDIF

C

C

C

C

C

C

CALCULO DE LAS PRIMERAS Y SEGUNDAS DERIVADAS GLOBALES DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION DE HERMITE. LA GEOMETRIA SE APROXIMA USANDO LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION LINEAL DE LAGRANGE (FORMULACION SUBPARAMETRICA)

```
DDSF(1,1) = 0.0D0
DDSF(2,1) = 0.0D0
DDSF(3,1) = 0.250D0
DDSF(1,2) = 0.0D0
DDSF(2,2) = 0.0D0
DDSF(3,2) = -0.250D0
DDSF(1,3) = 0.0D0
DDSF(2,3) = 0.0D0
DDSF(3,3) = 0.250D0
DDSF(1,4) = 0.0D0
DDSF(2,4) = 0.0D0
DDSF(3,4) = -0.250D0
```

C

C

C

C

CALCULO DE LAS PRIMERAS DERIVADAS GLOBALES DE LAS FUNCIONES DE HERMITE

```
NN=NDF*NPE
DO 110 I=1,2
  DO 100 J=1,NN
    SUM=0.0D0
    DO 90 K=1,2
      SUM=SUM+GJINV(I,K)*DSFH(K,J)
```

90

CONTINUE

GDSFH(I,J)=SUM

100

CONTINUE

110

CONTINUE

C

C

C

C

CALCULO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS GLOBALES DE LAS FUNCIONES DE HERMITE

```
DO 140 I=1,3
  DO 130 J=1,2
    SUM=0.0D0
    DO 120 K=1,NPE
      SUM=SUM+DDSF(I,K)*ELXY(K,J)
```

120

CONTINUE

DJCB(I,J)=SUM

130

CONTINUE

140

CONTINUE

C

DO 170 K=1,3

C CO Y BANDEADO USANDO EL METODO DE ELIMINACION DE GAUSS:
 C [BAND]{U}={RHS}. LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES INTRODUCIDA COMO
 C RHS (NEQNS), DONDE NEQNS SON LOS NUMEROS REALES DE LAS ECUACIONES
 C Y NBW ES LA MITAD DEL ANCHO DE BANDA. LAS VERDADERAS DIMENSIONES
 C DELA MATRIZ [BAND] EN EL PROGRAMA, SON NRM Y NCM. CUANDO IRES ES
 C MAYOR QUE CERO, EL LADO DERECHO DE LA ELIMINACION ES EVITADA.
 C -----

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
 DIMENSION BAND (NRM, NCM), RHS (NRM)

MEQNS=NEQNS-1
 IF (IRES.LE.0) THEN
 DO 30 NPIV=1, MEQNS

NPIVOT=NPIV+1
 LSTSUB=NPIV+NBW-1
 IF (LSTSUB.GT.NEQNS) THEN
 LSTSUB=NEQNS
 ENDIF

DO 20 NROW=NPIVOT, LSTSUB
 NCOL=NROW-NPIV+1
 FACTOR=BAND (NPIV, NCOL) / BAND (NPIV, 1)
 DO 10 NCOL=NROW, LSTSUB
 ICOL=NCOL-NROW+1
 JCOL=NCOL-NPIV+1
 10 BAND (NROW, ICOL) =BAND (NROW, ICOL) -FACTOR*BAND (NPIV, JCOL)
 20 RHS (NROW) =RHS (NROW) -FACTOR*RHS (NPIV)
 30 CONTINUE

ELSE
 DO 60 NPIV=1, MEQNS
 NPIVOT=NPIV+1
 LSTSUB=NPIV+NBW-1
 IF (LSTSUB.GT.NEQNS) THEN
 LSTSUB=NEQNS

ENDIF
 DO 50 NROW=NPIVOT, LSTSUB
 NCOL=NROW-NPIV+1
 FACTOR=BAND (NPIV, NCOL) / BAND (NPIV, 1)
 50 RHS (NROW) =RHS (NROW) -FACTOR*RHS (NPIV)
 60 CONTINUE

ENDIF

SUBSTITUCION HACIA ATRAS

DO 90 IJK=2, NEQNS
 NPIV=NEQNS-IJK+2
 RHS (NPIV) =RHS (NPIV) / BAND (NPIV, 1)
 LSTSUB=NPIV-NBW+1
 IF (LSTSUB.LT.1) THEN
 LSTSUB=1
 ENDIF
 NPIVOT=NPIV-1
 DO 80 JKI=LSTSUB, NPIVOT
 NROW=NPIVOT-JKI+LSTSUB
 NCOL=NPIV-NROW+1
 FACTOR=BAND (NROW, NCOL)
 80 RHS (NROW) =RHS (NROW) -FACTOR*RHS (NPIV)
 90 CONTINUE
 RHS (1) =RHS (1) / BAND (1, 1)
 RETURN
 END

Tesis de Maestría

```
* 0.88888888D0, 0.55555555D0, 2*0.0D0, 0.34785485D0,  
* 2*0.65214515D0, 0.34785485D0, 0.0D0, 0.23692688D0,  
* 0.47862867D0, 0.56888888D0, 0.47862867D0, 0.23692688D0/
```

C

```
NDF=NN/NPE  
NET=NN
```

C

C

C

```
INICIALIZA LOS ARREGLOS
```

```
DO 120 I=1,NN
```

```
ELF(I)=0.0
```

```
DO 120 J=1,NN
```

```
120 ELK(I,J)=0.0
```

C

C

C

C

```
CICLOS DO PARA LA INTRACION NUMERICA (GAUSS) COMIENZA AQUI.  
LA SUBROUTINA RECTAN ES LLAMADA AQUI
```

```
DO 200 NI=1,IPDF
```

```
DO 200 NJ=1,IPDF
```

```
XI=GAUSPT(NI,IPDF)
```

```
ETA=GAUSPT(NJ,IPDF)
```

```
CALL RECTAN (NPE, XI, ETA, DET, ELXY, NDF)
```

```
CNST=DET*GAUSWT(NI,IPDF)*GAUSWT(NJ,IPDF)
```

```
X=0.0
```

```
Y=0.0
```

```
DO 140 I=1,NPE
```

```
X=X+ELXY(I,1)*SF(I)
```

```
140 Y=Y+ELXY(I,2)*SF(I)
```

C

C

```
FUENTE=F0+FX*X+FY*Y
```

C

```
II=1
```

```
DO 180 I=1,NET
```

```
JJ=1
```

```
DO 160 J=1,NET
```

C

C

C

```
TEORIA CLASICA DE PLACAS:
```

```
BM1=CMAT(1,1)*GDDSFH(1,J)+CMAT(1,2)*GDDSFH(2,J)
```

```
BM2=CMAT(1,2)*GDDSFH(1,J)+CMAT(2,2)*GDDSFH(2,J)
```

```
BM6=2.0*CMAT(3,3)*GDDSFH(3,J)
```

```
ELK(I,J)=ELK(I,J)+CNST*(GDDSFH(1,I)*BM1+
```

```
GDDSFH(2,I)*BM2+2.0*GDDSFH(3,I)*BM6)
```

```
160 JJ=NET*J+1
```

C

C

C

```
SE SUPONE QUE LA FUENTE DE LA FORMA  $f_x = F_0 + F_X * X + F_Y * Y$ 
```

```
ELF(I) = ELF(I)+CNST*SFH(I)*FUENTE
```

```
180 II = NDF*I+1
```

```
200 CONTINUE
```

C

```
RETURN
```

```
END
```

§debug

```
SUBROUTINE SOLUCION(NRM,NCM,NEQNS,NBW,BAND,RHS,IRES)
```

C

C

```
LA SUBROUTINA RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS SIMETRI
```