



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

INSTITUTO DE INGENIERIA

**ANALISIS Y DISEÑO DE UN SISTEMA
DE CONTROL PARA UN
PENDULO INVERTIDO**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA ELECTRICA
OPCION CONTROL**

PRESENTA:

LUIS DAVID RAMIREZ GONZALEZ

H. VERACRUZ, VER.

DICIEMBRE 1999



UNIVERSIDAD VERACRUZANA
INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., a 13 de Diciembre de 1999
SI789/99

Al Candidato al Grado
ING. LUIS DAVID RAMIREZ GONZALEZ
PRESENTE:

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Secretaría propuso el Dr. Enrique A. Morales González para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería Eléctrica Opción Control

TEMA :
"ANALISIS Y DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UN
PENDULO INVERTIDO"

- I .- Introducción
 - II .- Modelo no lineal
 - III .- Espacio de estado
 - IV .- Análisis de estabilidad
 - V .- Diseño del sistema de control
- Conclusiones
Bibliografía

Sin otro particular, me es grato quedar de Usted como su atento y seguro servidor.

ATENTAMENTE
"LIS DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"

M.I. ENRIQUE RODRIGUEZ MAGAÑA
SECRETARIO

EMG/apm*

DEDICATORIAS:

Deseo dedicar este trabajo en forma muy especial a mi esposa Marina y a mi hija Dalia Azucena por el gran apoyo y paciencia que han tenido en este y en otros trabajos de mi vida profesional.

A mis Padres, a mis Suegros, y a mis hermanos.

Así como también a:

Efraín y Malena.

Alejandro y Chela.

Juan Guillermo Sánchez Palacios.

Carlos E. Ibarra Rivera

José Antonio Meza Sarabia

Alberto Riveroll Hurtado.

Mis Maestros.

Mis amigos y compañeros de trabajo.

Román, Leonardo, Roberto, Carlos y Xóchitl

La Universidad Veracruzana

Con mucho respeto y admiración a:

Dra. Clara Celina Medina Sagahón.

Mtro. Walter Luis Sáiz González.

En forma especial mi más sincero agradecimiento y reconocimiento a:

Dr. Enrique A. Morales González.

Dr. Ismael Antonio Muñoz Maya.

Dr. Vicente Miguel Díaz de León.

M.I. Enrique Rodríguez Magaña.



AGRADECIMIENTOS:

Es una obligación para todo aquél que alcanza una meta difícil de llegar el reconocer que no todo se debe al esfuerzo propio, por muy grande que éste haya sido. Para mí es motivo de un gran placer en este caso, el expresar mi más profundo reconocimiento a las siguientes personas y a mi Alma Mater, pues sin ellas este trabajo no se hubiera podido realizar:

Al Dr. Enrique A. Morales González

Por su constante y decidido apoyo y sus valiosas enseñanzas en los cursos que tuve la fortuna de tomar con él, y por los ánimos que me infundió para terminar este trabajo. Definitivamente, nada de esto se habría realizado sin su apoyo.

Al Dr. Ismael A. Muñoz Maya

Por su gran apoyo, las enseñanzas impartidas en sus cursos y la dedicación e interés que demostró en todo momento para ver que esta tesis pudiera tener una feliz conclusión en el tiempo planeado.

Al Dr. Vicente Miguel Díaz de León Santiago

Por sus valiosas sugerencias y observaciones, que permitieron dar a este trabajo una mejor presentación, y por todo el "argot controlero" que me ha enseñado en el poco tiempo que he tenido la oportunidad de tratar con él.

Al M.I. Enrique Rodríguez Magaña

Por su amistad, por los repetidos estímulos que me dio para continuar y terminar mi trabajo y por haber permitido acelerar los trámites necesarios para la presentación de este trabajo a tiempo.

A la Universidad Veracruzana

Mi Alma Mater, porque no sólo me he formado en ella como profesionista, sino que me ha permitido seguir creciendo de manera constante como un integrante del personal que forma parte de ella, pero mejor aún, como persona a través del intercambio de conocimientos, experiencias y el trato diario con las personas que la integran: autoridades, compañeros, catedráticos y alumnos.

¡MUCHAS GRACIAS A TODOS!

Contenido

1	Introducción.....	1
1.1	El Problema del Péndulo Invertido.....	1
1.2	Planteamiento.....	1
1.3	Descripción.....	4
2	Modelo no lineal.....	5
2.1	Modelado por el método de Euler-Lagrange.....	6
2.2	Modelado usando las leyes de Newton.....	9
2.3	Modelado usando el voltaje de armadura del motor.....	12
2.3.1	Sistema eléctrico.....	12
2.3.2	Sistema mecánico.....	13
3	Espacio de Estado.....	18
3.1	Introducción.....	18
3.2	Espacio de Estado.....	19
4	Análisis de Estabilidad.....	22
4.1	Introducción.....	22
4.1	Puntos de equilibrio.....	22
4.1.1	Estabilidad de los puntos de equilibrio.....	24
5	Diseño del Sistema de Control.....	31
5.1	Linealización.....	32
5.2	Función de Transferencia.....	34
5.3	Controlabilidad.....	35
5.4	Observabilidad.....	36
5.5	Ley de Control.....	37
5.6	Diseño del Observador de orden completo.....	42
5.7	Diseño del observador de orden reducido.....	46

Contenido

5.8 Control Optimo por Retroalimentación de Salida.....	55
Conclusiones.....	59
Bibliografía.....	60
Apéndice A.....	62
Apéndice B.....	66
Apéndice C.....	68
Apéndice D.....	71



Capítulo 1 Introducción

1.1 El Problema del Péndulo Invertido

El péndulo invertido es un problema clásico en la teoría de control. Los modelos del operador humano han sido investigados por muchos años. Estos modelos pueden ser la base para entrenar a otros sistemas o bien montar el conocimiento en una máquina que pueda reemplazar al operador humano ya que existen operaciones dentro de la industria que pueden ser muy peligrosas tales como exploraciones bajo el mar, aplicaciones en el espacio o dentro de una planta nuclear. Se tiene interés en el desarrollo de un modelo que capture una respuesta muy parecida al del operador humano a la hora de balancear manualmente un sistema robótico como es el caso del péndulo invertido.

1.2 Planteamiento

Dentro del estudio de los robots de piernas o extremidades, lo más importante ha sido el balanceo de estos, pues es la parte esencial para que no caiga el cuerpo del robot. Las primeras máquinas que se balanceaban activamente fueron automáticamente controladas por péndulos invertidos. Es sabido, que un humano puede balancear una escoba en su mano o en un dedo con relativa facilidad. ¿Por que no usar control automático para construir una escoba (un péndulo invertido) que se balancee por si misma? Claude Shannon fue quizá el primero en hacerlo. En 1951 usó las partes de un juego erector para construir una máquina

1.2 Planteamiento

que balanceara un péndulo invertido que estaba arriba de un pequeño carrito. A partir de los trabajos de Shannon, Robert Cannon y dos de sus estudiantes de la Universidad de Standford, trabajaron en controladores demostradores que balanceaban dos péndulos a la vez. En un caso, los péndulos fueron montados de lado a lado del carro, y en otro caso fueron montados uno arriba del otro tal y como se observa en la figura 1.1

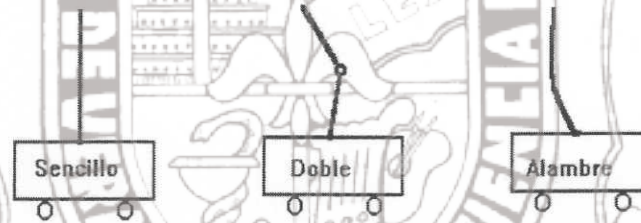


Fig. 1.1 Cannon y sus estudiantes construyeron máquinas que balanceaban péndulos invertidos en un carro móvil.

Cannon y su grupo estaban interesados en el problema de única entrada-múltiples salidas, en las limitaciones de realizar y llevar a cabo el balance. Más tarde, ellos expresaron técnicas para proporcionar balance a un péndulo invertido flexible [Schaefer & Cannon 1966]. Todos estos estudios para balancear al péndulo invertido fueron importantes precursores para investigaciones realizadas más tarde en el área de locomoción, tal que el modelado del péndulo invertido evolucionó para llegar a ser la herramienta principal para el estudio de sistemas con extremidades (por ejemplo Vukobratovic y Stepaneko[1972], Hemami y Golliday [1977], Kato *et al.*[1983], Miura y Shimoyama [1984]. Desafortunadamente, ninguno se ha extendido hasta alcanzar los resultados con la elegancia analítica de Cannon para

1.2 Planteamiento

sistemas con extremidades más complicados. La importancia del balance activo para la locomoción ha sido conocido por algunos desde hace ya algunos años (por ejemplo, McGhee y Kuhner[1969], y Frank [1970], pero el progreso en la construcción de sistemas con extremidades físicas que ocuparan estos principios fue retardada por la evidente dificultad del trabajo. No fue sino hasta finales de los 70's, que los experimentos en el balance comenzaron a salir adelante. Kato y sus colaboradores construyeron un bípedo que caminaba paso a paso Kato, *et al.*[1983], Miura y Shimoyama [1984] construyeron la primera máquina caminadora que se balanceaba por sí misma basada para su control en el modelo del péndulo invertido.


Bípedos dinámicos que son balanceados están siendo estudiados en varios laboratorios alrededor del mundo, existen videos que reportan los trabajos recientes y lo que se espera en un futuro.

Otras de las principales aplicaciones que se pueden encontrar para un péndulo invertido, además de los robots que ya se han comentado, se puede mencionar, la posición de un satélite con respecto a la Tierra, en este caso el satélite está en movimiento y las antenas que se encuentran en la Tierra no pueden dejarlo que se mueva demasiado, ya que si no se saldría del rango de comunicación entre ellos. Es como si se pudiera decir que están sujetos estos dos cuerpos (satélite y antena) por un vector virtual, el cuál en la parte de la Tierra se encuentra fijo, y en la parte en movimiento en el espacio, haciendo así la función de péndulo invertido. Existen más aplicaciones para el péndulo invertido como lo es la estabilidad en grúas, edificios, aplicaciones didácticas, etc.

Capítulo 2 Modelo no Lineal

A continuación se presenta el desarrollo de un modelo dinámico del péndulo invertido.

Las variables de interés son:



θ	posición angular del péndulo
$\dot{\theta}$	velocidad angular del péndulo
x	posición lineal del carro, con respecto a una referencia
\dot{x}	velocidad lineal del carro
V	voltaje aplicado al motor
τ	fuerza aplicada por el motor sobre el carro
M	masa del carro
m	masa del péndulo
L	longitud del péndulo
g	aceleración gravitacional
k_i	energía cinética del eslabón i
v_i	energía potencial del eslabón i
ℓ	lagrangiano

2.1 Modelado por el método de Euler - Lagrange

2.1 Modelado por el Método de Euler – Lagrange

Se considera el péndulo invertido, como un robot articulado de 2 grados de libertad cuya primera articulación es translacional, mientras que la segunda es rotacional.

Primero se obtiene el lagrangiano, donde la energía cinética y potencial del carro κ_1 y v_1 respectivamente, están dadas por

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (2.1)$$

y

$$v_1 = -\frac{1}{2} LMg \quad (2.2)$$

mientras que las correspondientes del péndulo son

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL \dot{x} \cos(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

y

$$v_2 = \frac{L}{2} (\cos \theta - 1) mg \quad (2.4)$$

2.1 Modelado por el método de Euler - Lagrange

El lagrangiano es por definición, la energía cinética total del sistema menos su energía potencial. Esto es,

$$\ell = \kappa_1 + \kappa_2 - (v_1 + v_2) \quad (2.5)$$

$$\ell = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL \left[\dot{x} \cos(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{3} L \dot{\theta}^2 + \frac{M}{m} g - g(-1 + \cos\theta) \right] \quad (2.6)$$

Las ecuaciones que modelan al sistema se obtienen mediante la fórmula

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \ell}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.7)$$

donde q_i representa la posición (angular o lineal) correspondiente a cada elemento móvil del sistema, \dot{q}_i es la velocidad correspondiente y τ_i es el par aplicado a dicho elemento.


La notación $\frac{\partial \ell}{\partial x}$ indica la derivación parcial. Aplicando esto al sistema en estudio resulta

$$\frac{\partial \ell}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} = (M + m) \dot{x} + \frac{1}{2} mL \cos\theta \quad (2.8)$$

2.1 Modelado por el método de Euler – Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right] = (M + m) \ddot{x} - \frac{1}{2} mL \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mL \cos(\theta) \ddot{\theta} \quad (2.9)$$



$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{1}{2} mgL \sin \theta - \frac{1}{2} m \dot{x} L \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\theta}} \right] = -\frac{1}{2} mL \dot{x} L \sin(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} m \dot{x} L \cos(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} \quad (2.11)$$

Aplicando la ecuación (2.7) y resolviendo, las ecuaciones resultantes que modelan al sistema son:

$$(M + m) \ddot{x} - \frac{1}{2} mL \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mL \cos(\theta) \ddot{\theta} = \tau \quad (2.12)$$

y

$$\frac{2}{3} L \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta - g \sin \theta = 0 \quad (2.13)$$

2.2 Modelado usando las leyes de Newton

2.2 Modelado usando las leyes de Newton

Primeramente, se hacen los diagramas de cuerpo libre, los cuales se muestran en la figura 2.1

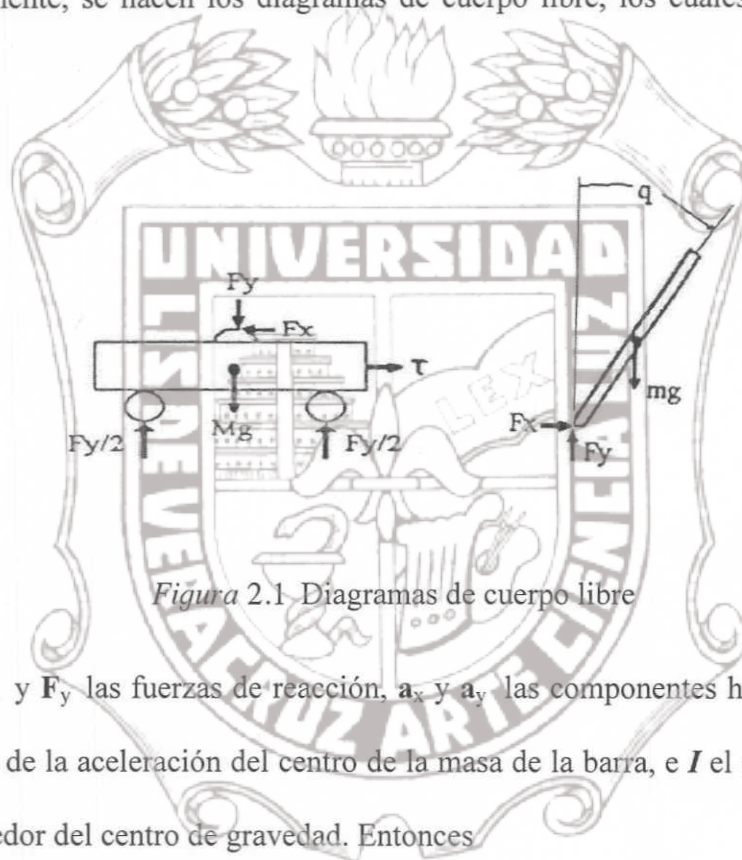


Figura 2.1 Diagramas de cuerpo libre

Sean F_x y F_y las fuerzas de reacción, a_x y a_y las componentes horizontal y vertical, respectivamente de la aceleración del centro de la masa de la barra, e I el momento de inercia rotacional alrededor del centro de gravedad. Entonces

$$F_x = ma_x \quad (2.14)$$

$$F_y = mg + ma_y \quad (2.15)$$

$$I\ddot{\theta} = F_y \frac{L}{2} \sin\theta - F_x \frac{L}{2} \cos\theta \quad (2.16)$$

2.2 Modelado usando las leyes de Newton

Las aceleraciones a_x y a_y se obtienen derivando dos veces la posición del centro de gravedad de la masa m en la dirección correspondiente, lo cual lleva a

$$a_x = \frac{d^2}{dt^2} \left(x + \frac{L}{2} \text{sen} \theta \right) = \ddot{x} + \frac{L}{2} \cos(\theta) \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \text{sen} \theta \dot{\theta}^2 \quad (2.17)$$

$$a_y = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{L}{2} \cos \theta \right) = -\frac{L}{2} \text{sen}(\theta) \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \cos(\theta) \dot{\theta}^2, \quad (2.18)$$

de donde

$$F_x = m \left(\ddot{x} + \frac{L}{2} \cos(\theta) \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \text{sen}(\theta) \dot{\theta}^2 \right) \quad (2.19)$$

y

$$F_y = m \left(g - \frac{L}{2} \text{sen}(\theta) \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \right) \quad (2.20)$$

Haciendo suma de fuerzas en x

$$\tau - F_x = M \ddot{x} + \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} \quad (2.21)$$

2.2 Modelado usando las leyes de Newton

de donde

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{1}{2}mL\cos(\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2 = \tau \quad (2.22)$$

Por otra parte, si la barra se considera uniforme, entonces su momento de inercia I

es $mL^2/12$; de ahí que

$$I\ddot{\theta} = F_y \frac{L}{2} \text{sen} \theta - (\tau - Mx) \frac{L}{2} \cos \theta \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{2}m \left(g - \frac{L}{2} \text{sen}(\theta)\ddot{\theta} - \frac{L}{2} \cos(\theta)\dot{\theta}^2 \right) L \text{sen} \theta - \frac{1}{2}(\tau - Mx)L \cos \theta \quad (2.24)$$

sustituyendo \ddot{x} y simplificando se obtiene

$$\frac{2}{3}L\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta - g \text{sen} \theta = 0 \quad (2.25)$$

Como puede verse, (2.12) y (2.13) coinciden con (2.22) y (2.25),

respectivamente

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

Considerando para el análisis, que el carro se mueve a través de una cremallera, mediante una razón de engranes, y con un voltaje de corriente directa.

2.3.1 Sistema Eléctrico

Despreciando la inductancia de la armadura, las ecuaciones del circuito son

$$V = IR_m + K_m \omega_m \quad (2.26)$$

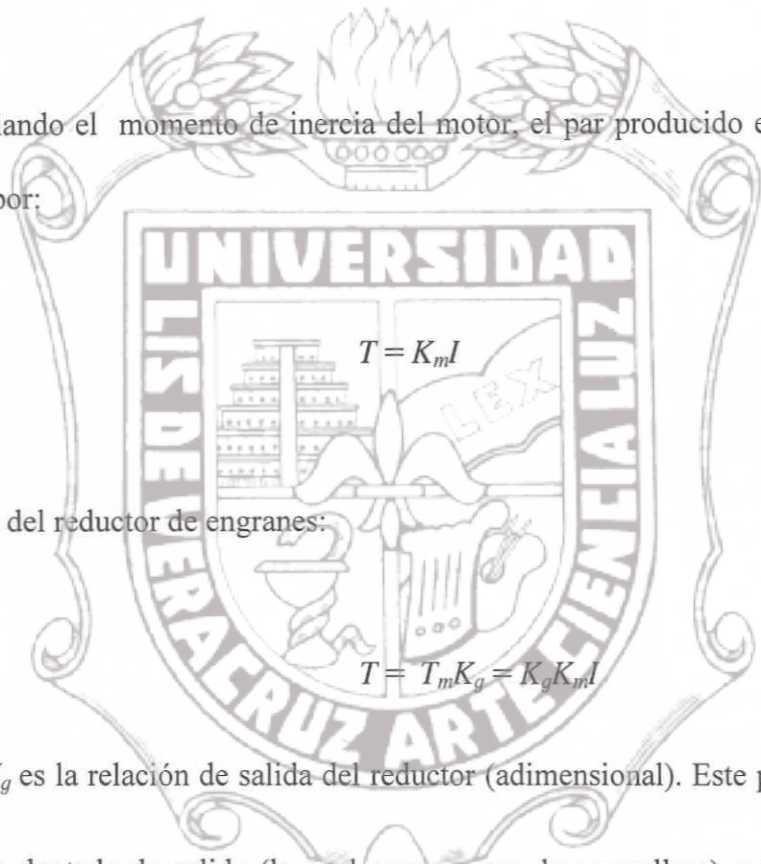
donde

- V Voltaje de entrada (Volts)
- I Corriente de armadura (Amperes)
- R_m Resistencia de armadura (Ohms)
- K_m Constante del par del motor (N-m/Amp)
- ω_m Velocidad angular del eje del motor (rads/seg)

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

2.3.2 Sistema Mecánico

Despreciando el momento de inercia del motor, el par producido en el eje del motor esta expresado por:



$$T = K_m I \tag{2.27}$$

Después del reductor de engranes:

$$T = T_m K_g = K_g K_m I \tag{2.28}$$

donde K_g es la relación de salida del reductor (adimensional). Este par crea una fuerza (τ) en la rueda dentada de salida (la cual engrana con la cremallera) y que actúa sobre el carro:

$$\tau = \frac{T}{r} \tag{2.29}$$

donde r es el radio de la rueda de salida. Sustituyendo 2.27 en 2.25:

$$V = \frac{T}{K_g K_m} R_m + K_m \omega_m \tag{2.30}$$

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

pero de 2.28 se tiene $T = \tau r$ y por otro lado $\omega_m = K_g x$, entonces:

$$V = \frac{\tau r}{K_g K_m} R_m + K_m K_g \frac{x}{r} \quad (2.31)$$

despejando de aquí la fuerza que actúa sobre el carro:

$$\tau = \frac{K_m K_g}{r R_m} V - \frac{K_g^2 K_m^2}{r^2 R_m} x \quad (2.32)$$

considerando términos constantes como:

$$C_1 = \frac{K_m K_g}{r R_m} \quad (2.33)$$

$$C_2 = \frac{K_g^2 K_m^2}{r^2 R_m} \quad (2.34)$$

la expresión 2.32 se simplifica a:

$$\tau = C_1 V - C_2 x \quad (2.35)$$

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

Regresando a la ecuación 2.22 del modelo no lineal:

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{1}{2}mL \cos(\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2 = \tau \quad (2.36)$$

de 2.35 y 2.36 se tiene:

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{1}{2}mL \cos(\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2 = C_1V - C_2\dot{x} - F\dot{x} \quad (2.37)$$

donde se agrega la fuerza de fricción $-F\dot{x}$. Si de 2.25 del modelo no lineal:

$$\frac{2}{3}L\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - g\text{sen}\theta = 0 \quad (2.38)$$

despejando $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2L} \left[g\text{sen}\theta - \ddot{x}\cos\theta \right] \quad (2.39)$$

sustituyendo en 2.37

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{1}{2}mL \cos\theta \frac{3}{2} \left[g\text{sen}\theta - \ddot{x}\cos\theta \right] - \frac{1}{2}mL \text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2 + (C_2 + F)\dot{x} = C_1V \quad (2.40)$$

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

simplificando:

$$\left(M + m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta \right) \ddot{x} + (C_2 + F) \dot{x} + \frac{3}{4} mg \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} mL \dot{\theta}^2 \sin \theta = C_1 V \quad (2.41)$$

despejando \ddot{x} de 2.37

$$\ddot{x} = \left[C_1 V - (C_2 + F) \dot{x} + \frac{1}{2} mL \dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{1}{2} mL \ddot{\theta} \cos \theta \right] \frac{1}{M + m} \quad (2.42)$$

sustituyendo 2.37 en 2.41 queda

$$\left[C_1 V - (C_2 + F) \dot{x} + \frac{1}{2} mL \dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{1}{2} mL \ddot{\theta} \cos \theta \right] \frac{\cos \theta}{M + m} - g \sin \theta + \frac{2}{3} L \ddot{\theta} = 0 \quad (2.43)$$

multiplicando por dos y haciendo $M' = \frac{m}{M + m}$:

$$M' L \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - M' L \ddot{\theta} - 2g \sin \theta + \frac{4}{3} L \ddot{\theta} = - [C_1 V - (C_2 + F) \dot{x}] \frac{2 \cos \theta}{M + m}$$

(2.44)

2.3 Modelado usando el voltaje de armadura del motor

factorizando:

$$M' L \theta^2 \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{4}{3} - M' \cos^2 \theta \right) L \ddot{\theta} - 2g \sin \theta = - [C_1 V - (C_2 + F) \dot{x}] \frac{2 \cos \theta}{M + m}$$

(2.45)



Capítulo 3 Espacio de Estado

3.1 Introducción

Los métodos del lugar de las raíces y los de respuesta en frecuencia son muy útiles para al análisis y el diseño de sistemas con una entrada y una salida. Con las pruebas de respuesta en frecuencia de lazo abierto se puede predecir el desempeño dinámico del sistema de lazo cerrado, así como también si es necesario se puede mejorar el desempeño dinámico de un sistema complejo insertando un compensador de adelanto o de atraso. En la teoría de control convencional sólo se consideran importantes las señales de entrada, salida y error. El análisis y diseño se realiza utilizando funciones de transferencia, junto con técnicas gráficas como el diagrama del lugar de las raíces y los de Bode. La desventaja principal de la teoría de control convencional es que en general sólo se aplica a sistemas lineales invariantes en el tiempo, con una entrada y una salida. No tiene aplicación en sistemas de control óptimo o adaptables que en la mayoría son variables en el tiempo y/o no lineales.

En cambio, en la teoría de control moderna, con los métodos en el espacio de estado se pueden diseñar sistemas con los polos de lazo cerrado deseado o con las ecuaciones características deseadas, o sistemas de control óptimo con índices determinados de desempeño. Los índices de desempeño son importantes porque determinan la naturaleza del sistema de control resultante. Es decir, el sistema de control resultante, puede ser lineal, no lineal, estacionario o variable en el tiempo, dependiendo del índice de desempeño. También se permite con la teoría de control

3.2 Espacio de Estado

moderna incluir condiciones iniciales, en caso de ser necesarias. No obstante, el diseño utilizando la teoría de control moderna por medio de los métodos en el espacio de estado, requiere una descripción matemática precisa de la dinámica del sistema.. Desde el punto de vista de computación, los métodos en el espacio de estado son particularmente adecuados para utilizar la computadora digital, debido a que están planteados en el dominio del tiempo. Esto libera al diseñador del peso de los cálculos tediosos que son necesarios y, además le permite dedicar sus esfuerzos exclusivamente a los aspectos analíticos del problema. Esta es una de las ventajas de los métodos en espacio de estado. Otra de las ventajas constituye la elección de las variables de estado, ya que estas no necesariamente representan magnitudes físicas del sistema. Se pueden elegir como variables de estado, aquellas que no representan cantidades físicas o que no son medibles ni observables.

3.2 Espacio de Estado

Se utiliza la técnica de espacio de estado para el análisis como sigue:

Se propone el vector de estado $\begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$

Despejando de 2.41:

3.2 Espacio de Estado

$$\ddot{x} = \frac{C_1 V - (C_2 + F)x - \frac{3}{4}mg \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2}mL\theta^2 \sin \theta}{M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta} \quad (3.46)$$

multiplicando denominador y numerador por cuatro:

$$\ddot{x} = \frac{4C_1 V - 4(C_2 + F)x - 3mg \sin \theta \cos \theta + 2mL\theta^2 \sin \theta}{4\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)} \quad (3.47)$$

despejando $\ddot{\theta}$ de 2.45:

$$\ddot{\theta} = \frac{-ML\theta^2 \sin \theta \cos \theta + 2(M+m)g \sin \theta - \frac{2 \cos \theta}{M+m} [C_1 V - (C_2 + F)]}{\left(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 \theta\right)L} \quad (3.48)$$

como $M' = \frac{m}{M+m}$, se tiene que, $M'(M+m) = m$; entonces multiplicando y dividiendo por

$M+m$:

3.2 Espacio de Estado

$$\ddot{\theta} = \frac{-mL\theta^2 \cos\theta \sin\theta + 2(M+m)g \sin\theta - 2\cos\theta[C_1V - (C_2 + F)x]}{\left(\frac{4}{3}(M+m) - m\cos^2\theta\right)L} \quad (3.49)$$

Construyendo el espacio de estado con las ecuaciones anteriores:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4C_1V - 4(C_2 + F)x - 3mg \sin\theta \cos\theta + 2mL\theta^2 \sin\theta}{4\left(M+m - \frac{3}{4}m\cos^2\theta\right)} \\ -2\cos\theta[C_1V - (C_2 + F)x] - mL\theta^2 \sin\theta \cos\theta + 2(M+m)g \sin\theta \\ \frac{\left(\frac{4}{3}(M+m) - m\cos^2\theta\right)L}{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Capítulo 4

Análisis de Estabilidad

4.1 Introducción

Para un sistema de control dado, la estabilidad es generalmente el punto más importante para ser determinado. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, muchos criterios de estabilidad están disponibles. Algunos de ellos son el criterio de estabilidad de Nyquist y el criterio de Routh. Si el sistema es no lineal, o lineal pero variante en el tiempo, entonces tales criterios de estabilidad no son aplicables. Muchos métodos están disponibles para el análisis de estabilidad de sistemas de control invariantes en el tiempo. Sin embargo, para sistemas no lineales y/o variantes en el tiempo, el análisis de estabilidad puede ser extremadamente difícil o imposible.

El análisis de estabilidad de Liapunov es un método que puede ser aplicado para encontrar respuestas a cuestiones de estabilidad de sistemas no lineales.

4.1 Puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio se igualan las derivadas a cero, de donde se deduce que:

$$\dot{x} = \dot{\theta} = 0 \quad (4.51)$$

4.1 Puntos de equilibrio

utilizando este resultado, se tiene para las demás derivadas:

$$4C_1V = 3mg \sin \theta \cos \theta \quad (4.52)$$

$$2(M+m)g \sin \theta = 2C_1V \cos \theta \quad (4.53)$$

si se supone que $V = 0$, entonces las expresiones anteriores se pueden reducir a:

$$0 = 3mg \sin \theta \cos \theta \quad (4.54)$$

$$2(M+m)g \sin \theta = 0 \quad (4.55)$$

lo anterior se cumple para $\theta = n\pi$, por lo tanto, se observa que el péndulo invertido tiene sus puntos de equilibrio en:

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

$$\begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x}_e \\ \theta_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ 0 \\ n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

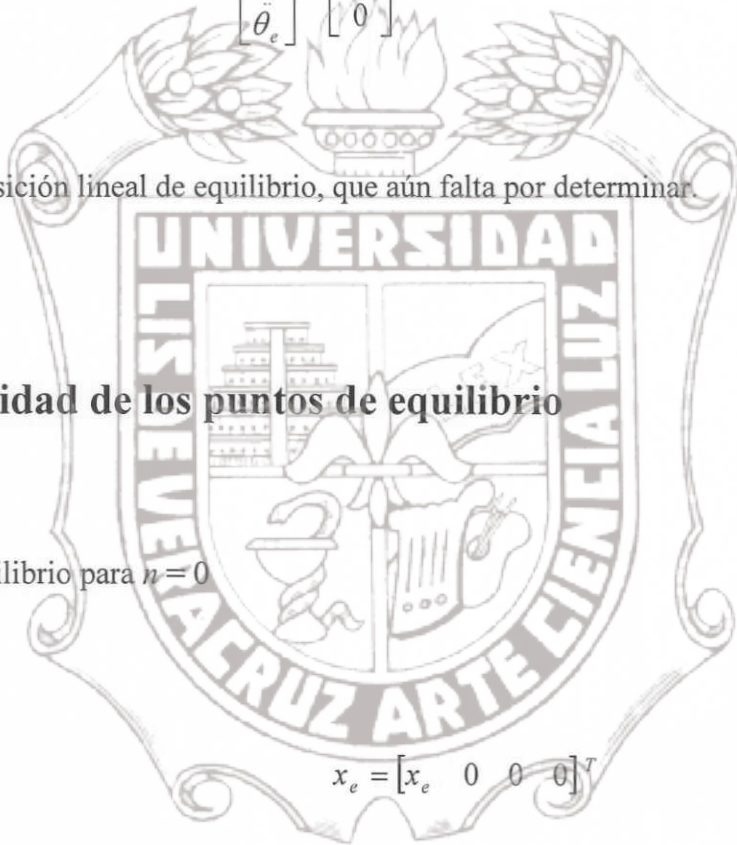
donde x_e es la posición lineal de equilibrio, que aún falta por determinar.

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

Se propone el equilibrio para $n = 0$

$$x_e = [x_e \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (4.57)$$

con una entrada de control $V = 0$



4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

Utilizando el primer método de Liapunov, se tiene que la ecuación de estado es de la

forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.58)$$

donde $f(x)$ es a su vez:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

sustituyendo en 3.50 $V = 0$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{-4(C_2 + F)x - 3mg \sin \theta \cos \theta + 2mL\theta^2 \sin \theta}{4\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)} \\ \theta \\ \frac{-mL\theta^2 \sin \theta \cos \theta + 2(M + m)g \sin \theta + 2 \cos \theta (C_2 + F)x}{\left(\frac{4}{3}(M + m) - m \cos^2 \theta\right)L} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

Entonces el punto de equilibrio x_e será asintóticamente estable si se puede encontrar una

matriz A

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} \quad (4.61)$$

tal que todos sus valores propios tengan parte real negativa. Entonces:

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial \theta} \end{bmatrix} \right|_{x=x_e} \quad (4.62)$$

donde

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \frac{-4(C_2 + F)x - 3mg \sin \theta \cos \theta + 2mL\theta^2 \sin \theta}{4\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)}$$

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

$$f_3(x) = \theta$$

$$f_4(x) = \frac{-mL\theta^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2(M+m)g \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta (C_2 + F)x}{\left(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 \theta\right)L}$$

desarrollando las derivadas de la matriz A:

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = \frac{\partial f_3(x)}{\partial x} = \frac{\partial f_4(x)}{\partial x} = 0 \quad (4.63)$$

Se observa que la estabilidad de los equilibrios no depende de la posición.

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = 1 \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = \frac{-4(C_2 + F)}{4\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)_{x=x_e}} = -\frac{4(C_2 + F)}{4M + m} \quad (4.65)$$

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_4(x)}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_e} &= \frac{2 \cos \theta (C_2 + F)}{\left(\frac{4}{3} (M + m) - m \cos^2 \theta \right) L} \Bigg|_{x=x_e} = \frac{2(C_2 + F)}{\left(\frac{4}{3} (M + m) - m \right) L} = \frac{6(C_2 + F)}{(4M + 4m - m)L} \\ &= \frac{6(C_2 + F)}{(4M + m)L} \end{aligned} \tag{4.67}$$


$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta} = 0 \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2(x)}{\partial \theta} &= \frac{4 \left(M + m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta \right) \left[-3mg(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2mL\theta^2 \cos \theta \right]}{\left[4 \left(M + m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta \right) \right]^2} \\ &\quad - \frac{\left[-4(C_2 + F)x - 3mg \sin \theta \cos \theta + 2mL\theta^2 \sin \theta \right] 6m \cos \theta \sin \theta}{\left[4 \left(M + m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta \right) \right]^2} \Bigg|_{x=x_e} \end{aligned} \tag{4.69}$$

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial \theta} = -\frac{3mg}{4M+m} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.71)$$



$$\left. \frac{\partial f_4(x)}{\partial \theta} \right|_{x=x_e} = \frac{\left(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 \theta \right) L \left[-2 \sin \theta (C_2 + F) x - mL \theta^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(M+m)g \cos \theta \right]}{\left[\left(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 \theta \right) L \right]^2} \frac{\left[-mL \theta^2 \cos \theta \sin \theta + 2(M+m)g \sin \theta + 2 \cos \theta (C_2 + F) x \right] 2mL \cos \theta \sin \theta}{\left[\left(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 \theta \right) L \right]^2} \Bigg|_{x=x_e}$$

$$\frac{\partial f_4(x)}{\partial \theta} = \frac{3[2(M+m)g]}{(4M+m)L} = \frac{6(M+m)g}{(4M+m)L} \quad (4.72)$$

4.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

$$\left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial \theta} \right|_{x=x_e} = 0 \quad (4.73)$$

$$\left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial \theta} \right|_{x=x_e} = \frac{mL\theta \operatorname{sen} \theta}{M+m-\frac{3}{4}\cos^2 \theta} \Big|_{x=x_e} = 0 \quad (4.74)$$

$$\left. \frac{\partial f_3(x)}{\partial \theta} \right|_{x=x_e} = 1 \quad (4.75)$$

$$\left. \frac{\partial f_4(x)}{\partial \theta} \right|_{x=x_e} = \frac{2mL\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\left(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 \theta\right)L} \Big|_{x=x_e} = 0 \quad (4.76)$$

reagrupando los términos, la matriz queda:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4(C_2 + F)}{4M + m} & -\frac{3mg}{4M + m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{6(C_2 + F)}{(4M + m)L} & \frac{6(M + m)g}{(4M + m)L} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Capítulo 5

Diseño del Sistema de Control

Los siguientes parámetros serán usados a través del proceso de diseño:

PARAMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR
θ	Posición angular del péndulo	radian
M	Masa del carro	455 g
r	Radio de la rueda de salida	0.635 cm
m	Masa del péndulo	210 g
L	Longitud del péndulo	0.6096 m
g	Aceleración gravitacional	9.81 m/s ²
F	Fuerza de fricción	2.778 N
R_m	Resistencia de armadura	2.6 ohms
K_m	Constante de par del motor	0.767 N-m /amp
T	Par máximo del motor	0.004025 N-m
ω_m	Velocidad angular del eje del motor péndulo	rad/seg
K_g	Relación de salida del reductor	3.7 : 1

Tabla 5.1 Parámetros del péndulo invertido.

Sustituyendo valores en la ecuación 4.77 se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

5.1 Linealización

5.1 Linealización

El método de Liapunov utilizado para determinar la estabilidad de los equilibrios, corresponde a linealizar el sistema alrededor de un punto de equilibrio, así que la matriz A obtenida anteriormente es la matriz de entrada del sistema. Para encontrar la matriz de entrada se procede de manera similar:



$$B = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial V} \right|_{x=x_e} \tag{5.79}$$

desarrollando las derivadas:

$$\left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial V} \right|_{x=x_e} = 0 \tag{5.80}$$

$$\left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial V} \right|_{x=x_e} = \frac{4C_1}{4 \left(M + m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta \right)} \Bigg|_{x=x_e} = \frac{4C_1}{4M + m} \tag{5.81}$$

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

5.1 Linealización

$$\left. \frac{\partial f_3(x)}{\partial V} \right|_{x=x_e} = 0 \quad (5.82)$$

$$\left. \frac{\partial f_4(x)}{\partial V} \right|_{x=x_e} = \frac{-2C_1 \cos \theta}{\left(\frac{4}{3}(m+m) - m \cos^2 \theta \right) L} = \frac{6C_1}{(4M+m)L} \quad (5.83)$$

Finalmente considerando la salida y igual a los estados medibles, y denotando $U=V$, el espacio de estado completo queda:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4(C_2+F)}{4M+m} & -\frac{3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{6(C_2+F)}{(4M+m)L} & \frac{6(M+m)}{(4M+m)L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4C_1}{4M+m} \\ 0 \\ -\frac{6C_1}{(4M+m)L} \end{bmatrix} U \quad (5.85)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

5.2 Función de Transferencia

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.3870 \\ 0 \\ 8.3341 \end{bmatrix} U \quad (5.87)$$

5.2 Función de Transferencia

La función de transferencia del sistema linealizado (5.86) y (5.87) se obtiene mediante la ecuación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Lo cual resulta en:

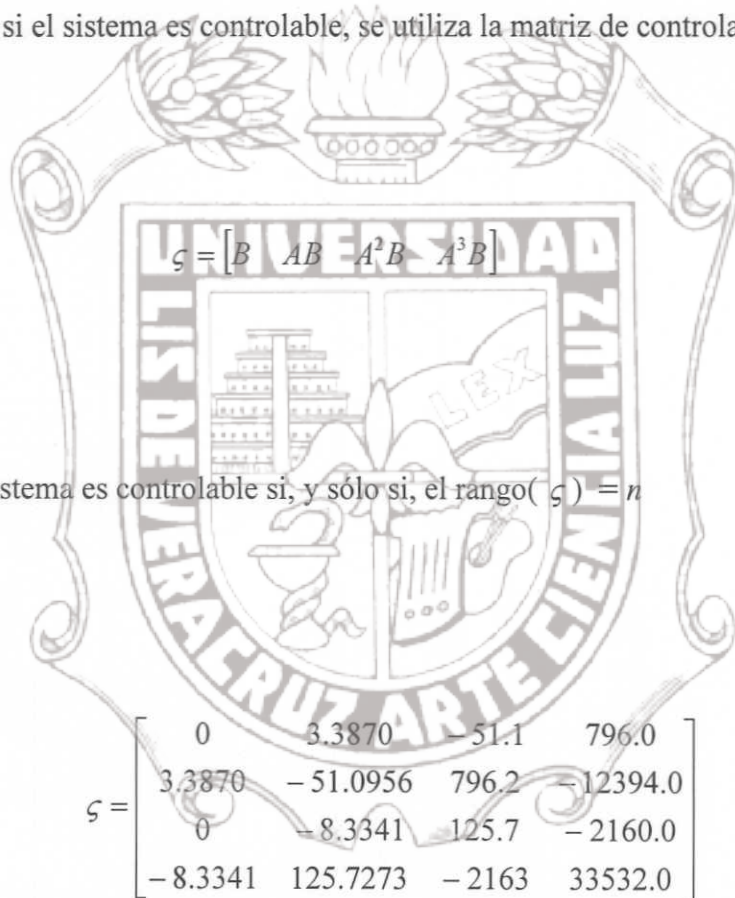
$$G(s) = \frac{\frac{3.387s^2 - 81.7578}{s^3 + 15.0858s^2 - 31.6301s - 364.1536} \cdot 8.3341s}{s^3 + 15.0858s^2 - 31.6301s^3 - 364.1536}$$

$$= \frac{\frac{3.387(s - 4.9131) * (s + 4.9131)}{s(s - 5.1)(s + 15.663)(s + 4.5699)} \cdot 8.3341s}{(s - 5.1016)(s + 15.6167)(s + 4.5707)} \quad (5.88)$$

5.3 Controlabilidad

5.3 Controlabilidad

Para determinar si el sistema es controlable, se utiliza la matriz de controlabilidad:



$$\zeta = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 3.3870 & -51.1 & 796.0 \\ 3.3870 & -51.0956 & 796.2 & -12394.0 \\ 0 & -8.3341 & 125.7 & -2160.0 \\ -8.3341 & 125.7273 & -2163 & 33532.0 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Se dice que el sistema es controlable si, y sólo si, el rango(ζ) = n

El rango(ζ) = 4 = n , entonces el sistema es controlable.

5.4 Observabilidad

5.4 Observabilidad

El sistema es observable si, y solo si, el rango (\mathcal{O}) = n

$\mathcal{O} = [C^T \quad A^T C^T \quad A^{2T} C^T \quad A^{3T} C^T]^T$; rango (\mathcal{O}) = n; Para el péndulo invertido:



$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \\ 0 & 227.5823 & 45.9286 & -3.0445 \\ 0 & -559.9959 & -113.0132 & 31.6301 \end{bmatrix}$$

(5.90)

Puesto que el rango (\mathcal{O}) = 4 = n, el sistema es observable.

5.5 Ley de Control

5.5 Ley de Control

Como el péndulo invertido es inestable puede caer en cualquier momento debido a perturbaciones externas. Entonces para mantener la varilla en la posición vertical, se debe diseñar un controlador para mover el carro basado en la posición del carro y la información del ángulo de la varilla. Se asume que se conocen la posición y velocidad del carro, el ángulo y la velocidad angular del péndulo, entonces una manera para el control del motor es el uso de la siguiente ecuación:

$$u(t) = -F x(t) \quad (5.91)$$

Donde F es la matriz de ganancia de retroalimentación. La ecuación de estado se expresa como:

$$\dot{x}(t) = [A - BF]x(t) + u'(t) \quad (5.92)$$

5.5 Ley de Control

Con $u'(t)$ como una entrada adicional. La ley de control se calcula de manera que los valores propios de la matriz $[A - BF]$ queden del lado izquierdo del plano complejo. Entonces la matriz de ganancia será igual, $F = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]$ por lo que ahora se tiene:

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.3870 & 3.3870 & 3.3870 & 3.3870 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.3341 & -8.3341 & -8.3341 & -8.3341 \end{bmatrix} [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4] \quad (5.93)$$

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.3870\phi_1 & 3.3870\phi_2 & 3.3870\phi_3 & 3.3870\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.3341\phi_1 & -8.3341\phi_2 & -8.3341\phi_3 & -8.3341\phi_4 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.3870\phi_1 & -15.0858 - 3.3870\phi_2 & -3.0445 - 3.3870\phi_3 & -3.3870\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8.3341\phi_1 & 37.1206 + 8.3341\phi_2 & 31.6301 + 8.3341\phi_3 & 8.3341\phi_4 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

5.5 Ley de Control

Los valores propios se obtienen del determinante de la matriz.

$$\lambda I - (A - BF) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 3.387\phi_1 & \lambda + 15.0858 + 3.387\phi_2 & 3.0445 + 3.387\phi_3 & 3.387\phi_4 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -8.3341\phi_1 & -37.1206 - 8.3341\phi_2 & -31.6301 - 8.33\phi_3 & \lambda - 8.3341\phi_4 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

de donde:

$$\det [\lambda I - (A - BF)] = \lambda \begin{bmatrix} \lambda + 15.0858 + 3.387\phi_2 & 3.0445 + 3.387\phi_3 & 3.387\phi_4 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -37.1206 - 8.33\phi_2 & -31.6301 - 8.3341\phi_3 & \lambda - 8.3341\phi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.387\phi_1 & 3.0445 + 3.387\phi_3 & 3.387\phi_4 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -8.3341\phi_1 & -31.6301 - 8.3341\phi_3 & \lambda - 8.3341\phi_4 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

$$\det(\lambda I - (A - BF)) = \lambda^4 + [3.387\phi_2 + 15.0858 - 8.3341\phi_4] \lambda^3 + [-31.6301 + 3.387\phi_1 - 8.3341\phi_3] \lambda^2$$

$$+ [-364.1517 - 81.758\phi_2] \lambda - 81.758\phi_1 \quad (5.98)$$

5.5 Ley de Control

Asignando los polos de la siguiente manera:



(5.99)

Se obtiene:

$$((\lambda + (2 + i))(\lambda + (2 - i))(\lambda + (1 + i))(\lambda + (1 - i))) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda + 10 \quad (5.100)$$

Igualando los coeficientes entre (5.98) y (5.100) queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3.387\phi_2 - 8.3341\phi_4 = 6 - 15.0858$$

$$3.387\phi_1 - 8.3341\phi_3 = 15 + 31.6301 \quad (5.101)$$

$$-81.703\phi_2 = 18 + 364.1517$$

$$-81.758\phi_1 = 10$$

5.5 Ley de Control

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores se obtienen los coeficientes de control:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -0.1223 \\ \phi_2 &= -4.6741 \\ \phi_3 &= -5.6443 \\ \phi_4 &= -0.8093 \end{aligned} \quad (5.102)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.95):

$$(A - BF) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4142 & 0.7453 & 16.0727 & 2.7410 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.0192 & -1.8338 & -15.4100 & -6.7447 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Sustituyendo (5.100) en (5.92):

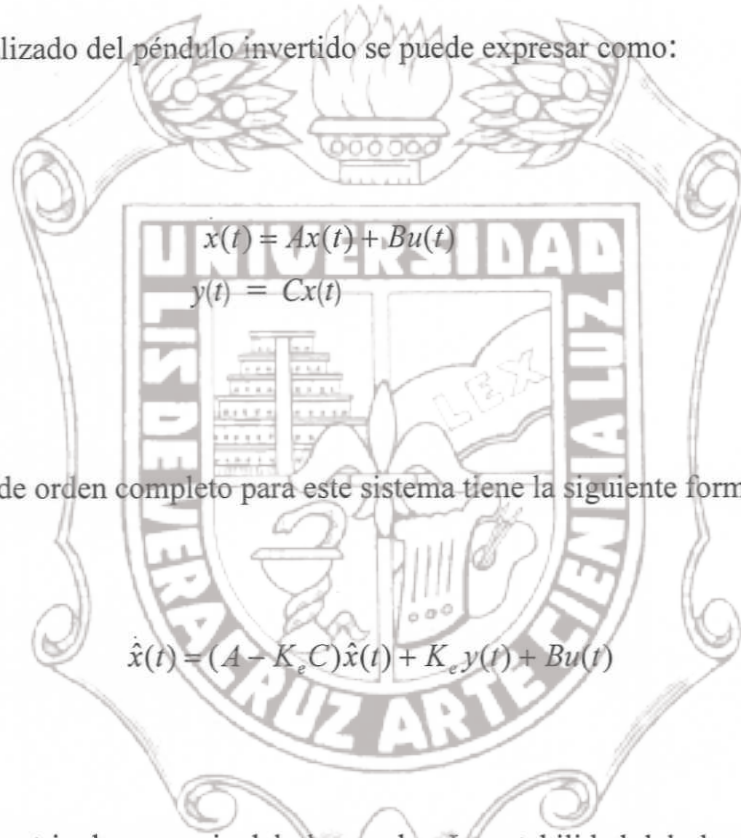
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4142 & 0.7453 & 16.0727 & 2.7410 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.0192 & -1.8338 & -15.4100 & -6.7447 \end{bmatrix} x(t) + u'(t) \quad (5.104)$$

$u'(t) = 0$ y condiciones iniciales $x(0) = 0.1$

5.6 Diseño del Observador de Orden Completo.

5.6 Diseño del Observador de Orden Completo

El sistema linealizado del péndulo invertido se puede expresar como:



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Un observador de orden completo para este sistema tiene la siguiente forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - K_e C)\hat{x}(t) + K_e y(t) + Bu(t) \tag{5.105}$$

donde K_e es la matriz de ganancia del observador. La estabilidad del observador necesita que los valores característicos de la matriz $[A - K_e C]$ estén localizados del lado izquierdo del plano complejo y que ocurran en pares conjugados cuando sea el caso. Entonces se proponen los polos del observador adecuadamente para después determinar la matriz de ganancia K_e , donde K_e es:

5.6 Diseño del observador de orden completo

$$K_e = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \\ k_3 & k_2 \\ k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

de donde:

$$A - K_e C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \\ k_3 & k_2 \\ k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

$$A - K_e C = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & -k_1 & 0 \\ -k_2 & -15.0858 & -3.0445 - k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & -k_3 & 1 \\ -k_4 & 37.1206 & 31.6301 - k_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

encontrando el polinomio característico:

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - (A - K_e C)] &= \lambda^4 + [k_3 + k_1 + 15.0858]\lambda^3 + [15.0858k_3 + 15.0858k_1 + k_4 + k_2 - 31.6301]\lambda^2 \\ &\quad + [15.0858k_4 - 3.0445k_3 + 37.1206k_2 - 31.6301k_1 - 364.1517] \lambda \\ &\quad - 3.0445k_4 - 31.6301k_2 - 364.1517k_1 \end{aligned} \quad (5.109)$$

5.6 Diseño del observador de orden completo

entonces la ecuación característica deseada es de la forma:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (5.110)$$

donde los coeficientes a_n se obtienen de los polos propuestos. Sustituyendo (5.110) en el polinomio característico, se construye el siguiente sistema de ecuaciones con las k_n como incógnitas.

$$\begin{aligned} a_1 - 15.0858 &= k_1 + k_3 \\ a_2 + 31.6301 &= 15.0858k_3 + 15.133k_1 + k_4 + k_2 \\ a_3 + 364.1517 &= 15.0858k_4 - 3.0445k_3 - 31.6301k_1 + 37.1206k_2 \\ a_4 &= -3.0445k_4 - 31.6301k_2 - 364.1517k_1 \end{aligned} \quad (5.111)$$

Asignando los polos de la siguiente manera:

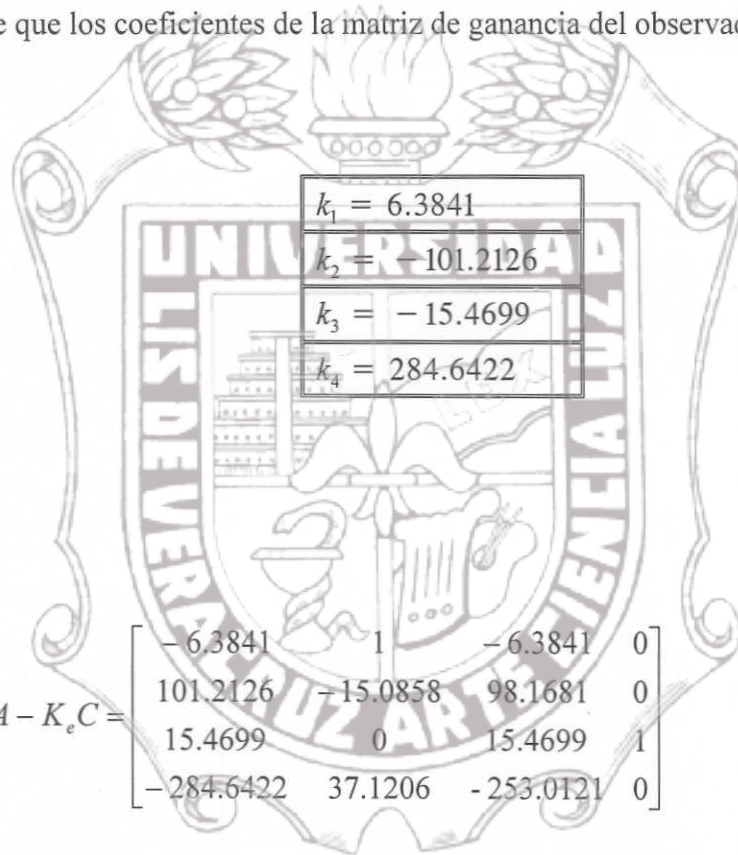
$$\lambda_1 = -2 - i, \lambda_2 = -2 + i, \lambda_3 = -1 - i, \lambda_4 = -1 + i$$

se tiene:

$$(\lambda + (2 + i))(\lambda + (2 - i))(\lambda + (1 + i))(\lambda + (1 - i)) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda + 10 \quad (5.112)$$

5.6 Diseño del observador de orden completo

donde $a_1 = 6$, $a_2 = 15$, $a_3 = 18$, y $a_4 = 10$, sustituyendo estos valores en (5.107) y resolviendo para k_n se tiene que los coeficientes de la matriz de ganancia del observador de orden son:



$$\begin{aligned} k_1 &= 6.3841 \\ k_2 &= -101.2126 \\ k_3 &= -15.4699 \\ k_4 &= 284.6422 \end{aligned} \tag{5.113}$$

$$A - K_e C = \begin{bmatrix} -6.3841 & 1 & -6.3841 & 0 \\ 101.2126 & -15.0858 & 98.1681 & 0 \\ 15.4699 & 0 & 15.4699 & 1 \\ -284.6422 & 37.1206 & -253.0121 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.114}$$

Para comprobar la estabilidad asintótica del observador se debe satisfacer que el error sea solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{e}(t) = [A - K_e C]e(t) \tag{5.115}$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

donde:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.116)$$

con:

$$e(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (5.117)$$

Esto ocurre así porque los valores propios de $A - K_e C$ tienen parte real negativa.

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

Para el péndulo invertido se tiene que la variable observable es:

$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.118)$$

y se propone entonces:

$$p(t) = C_1 x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.119)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

donde:

$$x(t) = \begin{bmatrix} C \\ C_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (5.120)$$



$$\begin{bmatrix} C \\ C_1 \end{bmatrix}^{-1} = [L_1 \quad L_2] \quad (5.121)$$

$$x(t) = L_1 y(t) + L_2 p(t) \quad (5.122)$$

con:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

Un observador para $p(t)$ debe obedecer la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{p}(t) = C_1 x(t) = C_1 Ax(t) + C_1 Bu(t) \quad (5.125)$$

sustituyendo (5.122) en (5.125):

$$\dot{p}(t) = C_1 AL_2 p(t) + C_1 AL_1 y(t) + C_1 Bu(t) \quad (5.126)$$

Por otro lado, se sabe que $y(t)$ no guarda ninguna información de $p(t)$, pero su derivada si; entonces, diferenciando $y(t)$ se tiene:

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) \quad (5.127)$$

sustituyendo (5.122):

$$\dot{y}(t) = CAL_2 p(t) + CAL_1 y(t) + CBu(t) \quad (5.128)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

de (5.126) y de (5.128), se sugiere un observador de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}}(t) = & C_1 A L_2 \hat{p}(t) + C_1 A L_1 y(t) + C_1 B u(t) \\ & + K_o \left[y(t) - (C A L_2 \hat{p}(t) + C A L_1 y(t) + C B u(t)) \right] \end{aligned} \quad (5.129)$$

Como se probó anteriormente, el sistema es observable, por lo tanto, se puede encontrar una K_o adecuada, colocando los polos del observador arbitrariamente del lado izquierdo del plano complejo.

Realizando los productos de las matrices en (5.129):

$$C_1 A L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

$$C_1AL_2 = \begin{bmatrix} -15.0858 & 0 \\ 37.1206 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$



$$C_1AL_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

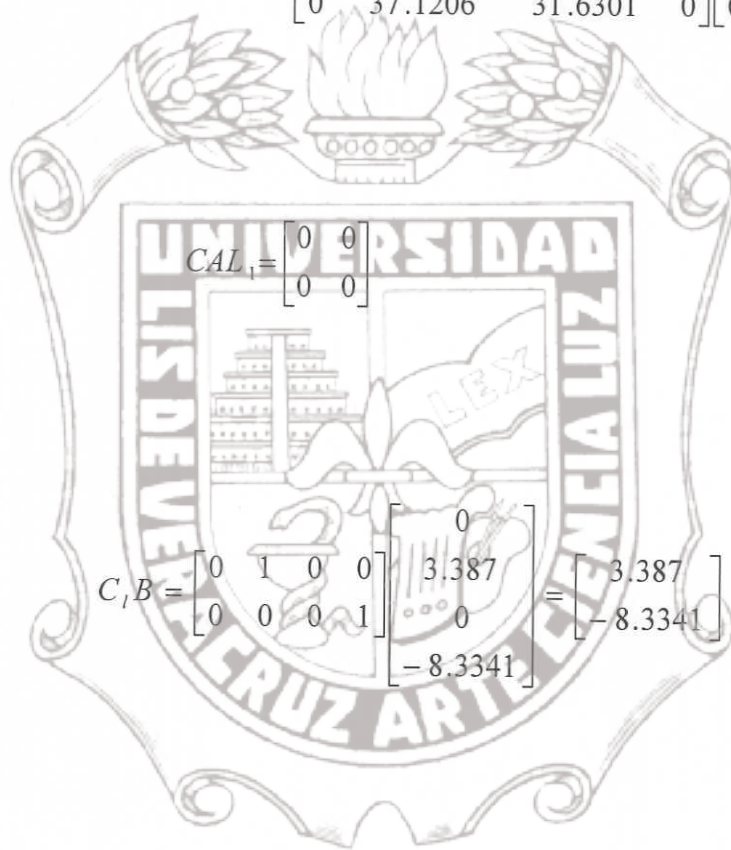
$$C_1AL_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3.0445 \\ 0 & 31.6301 \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

$$CAL_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

$$CAL_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

$$CAL_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.0858 & -3.0445 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 37.1206 & 31.6301 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.136)$$



$$CAL_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

$$C_1 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3.387 \\ 0 \\ -8.3341 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.387 \\ -8.3341 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

$$CB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3.387 \\ 0 \\ -8.3341 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

Sustituyendo estos resultados en (5.129) queda:

$$\dot{\hat{p}}(t) = \begin{bmatrix} -15.133 & 0 \\ 37.212 & 0 \end{bmatrix} \hat{p}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -3.0445 \\ 0 & 31.6301 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 3.387 \\ -8.3341 \end{bmatrix} u(t) + K_o \begin{bmatrix} p(t) - \hat{p}(t) \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

ahora, considerando a K_o como :

$$K_o = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

y factorizando $\hat{p}(t)$:

$$\dot{\hat{p}} = \left\{ \begin{bmatrix} -15.0858 & 0 \\ 37.1206 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \hat{p}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -3.0445 \\ 0 & 31.6301 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 3.387 \\ -8.3341 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} p(t) \quad (5.142)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

de lo anterior se concluye que se puede encontrar Ko mediante los valores característicos de la

matriz $[C_1AL_2 - Ko]$. Por lo tanto;

$$C_1AL_2 - Ko = \begin{bmatrix} -15.08058 & 0 \\ 37.1206 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.0858 - k_1 & -k_1 \\ 37.1206 - k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \quad (5.143)$$

$$\lambda I - (C_1AL_2 - Ko) = \begin{bmatrix} \lambda + 15.0858 + k_1 & +k_1 \\ -37.1206 + k_2 & \lambda + k_2 \end{bmatrix} \quad (5.144)$$

cuyo determinante es:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (C_1AL_2 - Ko)) \\ = \lambda^2 + [k_1 + k_2 + 15.0858]\lambda + 37.1206k_1 + 15.0858k_2 \end{aligned} \quad (5.145)$$

el cual es de la forma:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (5.146)$$

5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

Ahora, proponiendo los polos del observador reducido, como la magnitud de los del observador de orden completo, se tiene entonces: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -\sqrt{5}$; de donde:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2.2361) = \lambda^2 + 3.2362\lambda + 2.2361 \quad (5.147)$$

se construye un sistema de ecuaciones de (5.145) y (5.146) para calcular las K_n :

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= -11.8497 \\ 37.1206k_1 + 15.0858k_2 &= 2.2361 \end{aligned} \quad (5.148)$$

resolviendo el sistema (5.148) queda:

$k_1 = 8.2142$	(5.149)
$k_2 = -20.0639$	



5.7 Diseño del Observador de Orden Reducido

Sustituyendo los resultados de (5.148) en (5.143):

$$C_1 A L_2 - K_0 = \begin{bmatrix} -23.3000 & -8.2142 \\ 57.1845 & 20.0639 \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

5.8 Control Optimo por Retroalimentación de Salida

El sistema de lazo cerrado que resulta de interconectar la planta con el controlador es un sistema lineal, descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \hat{\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) - B(t)F(t) & -B(t)F(t) \\ K(t)C(t) & A(t) - K(t)C(t) - B(t)F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (5.151)$$

5.8 Control Óptimo por Retroalimentación de Salida

Considerando el error, es posible encontrar las matrices de ganancia F y K tal que el sistema de la ecuación siguiente constituya un sistema asintóticamente estable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) - B(t)F(t) & B(t)F(t) \\ 0 & A(t) - K(t)C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (5.152)$$

Ahora, encontrando los valores característicos del sistema anterior

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A + BF & -BF \\ 0 & \lambda I - A + KC \end{bmatrix} = \det[(\lambda I - A + BF)(\lambda I - A + KC)] \quad (5.153)$$

Para hacer que el observador sea más rápido que el regulador, se colocan los polos más alejados

$$\lambda_1 = -30 - 15i, \lambda_2 = -30 + 15i, \lambda_3 = -3 + 1.5i, \lambda_4 = -3 - 1.5i \quad (5.154)$$

$$(\lambda + (30 + 15i))(\lambda + (30 - 15i))(\lambda + (3 + 1.5i))(\lambda + (3 - 1.5i)) = \lambda^4 + 66\lambda^3 + 1496\lambda^2 + 7425\lambda + 12656 \quad (5.155)$$

5.8 Control Óptimo por Retroalimentación de Salida

Sustituyendo la ecuación anterior, en la ecuación (5.111) y resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} k_1 &= -24.4400 \\ k_2 &= -224.2733 \\ k_3 &= 75.3076 \\ k_4 &= 982.1120 \end{aligned} \tag{5.156}$$

Sustituyendo (5.156) en (5.108), se obtiene

$$A - KC = \begin{bmatrix} 24.4 & 1 & 24.4 & 0 \\ 224.2733 & -15.133 & 22.2288 & 0 \\ -75.3076 & 0 & -75.3076 & 1 \\ -982.112 & 37.1206 & -950.503 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.157}$$

puesto que $A - BF$ es:

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4142 & 0.7453 & 16.0727 & 2.7410 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.0192 & -1.8338 & -15.4100 & -6.7447 \end{bmatrix} \tag{5.158}$$

5.8 Control Óptimo por Retroalimentación de Salida

Finalmente, sustituyendo (5.157) y (5.158) en (5.152) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4142 & 0.7453 & 16.0727 & 2.7410 & 0.4142 & -15.8971 & -19.1667 & -2.7527 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0192 & -1.8338 & -15.4100 & -6.7447 & -1.0192 & 39.067 & 47.097 & 6.764 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24.4400 & 1 & 24.4400 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 224.2733 & -15.133 & 22.2288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -75.2733 & 0 & -75.3076 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -982.112 & 37.1206 & -950.503 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.159)$$

Entonces, el sistema extendido, planta y error ahora puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4142 & 0.7453 & 16.0727 & 2.7410 & 0.4142 & -15.8971 & -19.1667 & -2.7527 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0192 & -1.8338 & -15.4100 & -6.7447 & -1.0192 & 39.067 & 47.097 & 6.764 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24.4400 & 1 & 24.4400 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 224.2733 & -15.133 & 22.2288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -75.2733 & 0 & -75.3076 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -982.112 & 37.1206 & -950.503 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4142 & 16.5086 & 19.1172 & 2.7411 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0193 & 38.9544 & 47.0442 & 5.6749 \end{bmatrix} u'(t) \quad (5.160)$$

Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolló un modelo matemático para el péndulo invertido usando las leyes de Newton y el método de Euler—Lagrange. Utilizando las técnicas y resultados conocidos de la teoría del control, se determinaron los puntos de equilibrio del sistema; posteriormente, se linealizó el sistema alrededor del equilibrio, empleando para ello la matriz jacobiana.

La parte más importante del trabajo se concentró en el diseño y la simulación del controlador del sistema por medio de la colocación de polos, y se procedió análogamente para el diseño del observador de orden completo. Sin embargo, cabe señalar que la formulación del observador de orden reducido, así como el análisis de control óptimo se omitieron por razones de espacio.

Por otro lado, es importante puntualizar que la técnica de control empleada (de tipo lineal) dio buenos resultados comparada con el sistema de lazo abierto, que es inestable, debido principalmente al hecho de que se trabajó en una vecindad muy pequeña del punto de equilibrio.

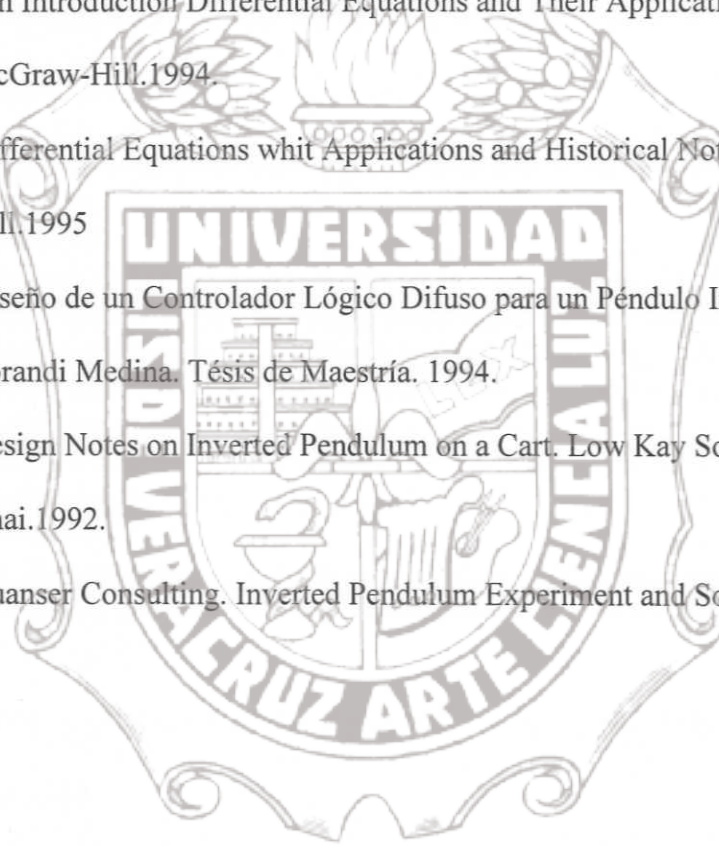
Se concluye además que con la ayuda de un programa que permita efectuar los cálculos necesarios y obtener la visualización de los resultados mediante simulación, como lo es el MatLab, se pueden realizar diseños de sistemas de control, de acuerdo a las condiciones y especificaciones de diseño, para así poder predecir el comportamiento del sistema en cuestión y evaluar los resultados y detectar posibles errores de diseño, para corregir antes de elaborar físicamente el sistema.

Algunas posibilidades para futuras investigaciones y mejoras incluyen: estudiar el desempeño del sistema en condiciones en que se encuentra más alejado de los puntos de equilibrio, diseñar los controles apropiados para obtener el control óptimo, control robusto y controles en tiempo real.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Modern Control System Theory and Design. Stanley M. Shinnars .1992
- [2] Modern Control Engineering. Katsuhiko Ogata. Prentice Hall International.1990.
- [3] Control System Design Using Matlab. Bahram Shahian, Michael Hassul. Prentice Hall International. 1993.
- [4] Computational Aids in Control Systems Using Matlab. Hadi Saadat. McGraw-Hill International Editions. 1993.
- [5] Modern Control Theory. Brogan W.L. Prentice Hall International.1985.
- [6] Digital Control of Dynamic Systems Franklin G., Powell J. And Workman. Addison-Wesley.1990.
- [7] System Theory. Pádulo L. Arbib, Hemisphere publishing. Corp. 1974
- [8] Computer-Controlled System. Karl J. Astrom, Bjorn W. Prentice Hall.1984
- [9] Introduction to Robotics. Phillip Jhon Mckerrow. Addison-Wesley.1997
- [10] System Dynamics. Katsuhiko Ogata. Prentice Hall.1987.
- [11] Design of Feedback in Control Systems. Hostetter. Savanta. Stefani. McGraw-Hill International Editions. 1993.
- [12] Automatic Control Systems. B.C. Kuo.Prentice Hall.1991
- [13] Digital Control Systems. Prentice Hall.1991
- [14] Digital Control Systems Analysis and Design. C.L. Phillip and H.T. Nagle. Prentice Hall.1990.
- [15] Modern Control System. Richard C. Dorf. Addison-Wesley.1986.
- [16] Control System Design Guide. George Ellis. Academic Press, Inc.1991

- [17] Feedback Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley.1991.
- [18] MatLab. Edición de estudiante. Versión 4. Guía de usuario.The MathWorks,Inc.,.1996.
- [19] Engineering Problem Solving whit MatLab. Delores M.Etter.1997.
- [20] An Introduction Differential Equations and Their Applications. Stanley J. Farlow. McGraw-Hill.1994.
- [21] Differential Equations whit Applications and Historical Notes. Simmons. McGraw-Hill.1995
- [22] Diseño de un Controlador Lógico Difuso para un Péndulo Invertido. Alberto Pedro Lorandi Medina. Tesis de Maestría. 1994.
- [23] Design Notes on Inverted Pendulum on a Cart. Low Kay Soon & Soh Yeng Chai.1992.
- [24] Quanser Consulting. Inverted Pendulum Experiment and Solution.1991.



% APENDICE A: LISTADO DEL PROGRAMA EN MATLAB DEL SISTEMA DE
% CONTROL DEL PENDULO INVERTIDO

% ***LISTADO DEL PROGRAMA EN MATLAB ***

% -----PARÁMETROS DEL SISTEMA PENDULO INVERTIDO-----CAP. 5

M=0.455;
m=0.210;
L=0.6096;
Kg=3.7;
Km=0.767;
r=0.635;
Rm=2.6;
F=2.778;
g=9.81;

%-----
% PROPUESTA DE CONSTANTES PARA LA MATRIZ DEL SISTEMA-----CAP. 2

C1=(Kg*Km)/(r*Rm)
C2=(Kg^2*Km^2) / (r*Rm)

a22= (-4*(C2+F)/(4*M+m))
a23=-(3*m*g)/(4*M+m)
a42=6*(C2+F)/((4*M+m)*L)
a43=(6*(M+m)*g)/((4*M+m)*L)

%-----
A=[0 1 0 0;0 a22 a23 0;0 0 0 1;0 a42 a43 0]

eig(A).....% COMANDO PARA DETERMINAR LOS VALORES PROPIOS DE "A"

%.....

% FUNCION DE TRANSFERENCIA-----CAP. 5 sección 5.2

b11 = 0
b21 = (4*C1)/((4*M)+m)
b31 = 0
b41 = -(6*C1)/((4*M+m)*L)

% el vector de entrada B queda:

B = [b11; b21; b31; b41]

C = [1 0 0 0;0 0 1 0]

D = [0;0]



```
% APENDICE A: LISTADO DEL PROGRAMA EN MATLAB DEL SISTEMA DEL
% CONTROL DEL PENDULO INVERTIDO
```

```
% CONVERSIÓN DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
%-----
```

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
```

```
% CALCULANDO LAS RAICES DEL DENOMINADOR DE G(S) PARA
% FACTORIZARLO
```

```
p=[1 15.0858 -31.609 -364.1536]
roots(p) % CON LA AYUDA DEL COMANDO roots(p)
```

```
% -----DETERMINANDO LA CONTROLABILIDAD----- CAP. 5 sección 5.3
```

```
B
```

```
AB = [A*B]
```

```
A2B = [(A2)*B]
```

```
A3B =[(A3)*B]
```

```
Mc = [ B A*B (A2)*B (A3)*B ] % "Mc es MATRIZ DE
% CONTROLABILIDAD"
```

```
%-----RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD "n=4"---
```

```
rank(Mc)
```

```
%-----
```

```
% DETERMINANDO LA OBSERVABILIDAD----- CAP. 5 sección 5.4
```

```
C
```

```
CA = [C*A]
```

```
CA2=[C*(A2)]
```

```
CA3=[C*(A3)]
```

```
Mo=[ C;C*A, C*(A2); C*(A3) ] % "Mo es la MATRIZ DE OBSERVABILIDAD"
```

```
%EL RANGO DE LA MATRIZ DE OBSERVABILIDAD "n=4"
```

```
rank(Mo)
```

```
%-----
```

```
% APENDICE A: LISTADO DEL PROGRAMA EN MATLAB DEL SISTEMA DEL
% CONTROL DEL PENDULO INVERTIDO
```

```
% -----DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL----- CAP. 5 sección 5.5
```

```
% *****ASIGNANDO LOS POLO DESEADOS DE LA MATRIZ J COMO .*****
```

```
J = [-2 + i    0    0    0
      0    -2-i    0    0
      0    0    -1+i    0
      0    0    0    -1-i];
```

```
% ENCONTRANDO LOS VALORES CARACTERISTICOS DEL
% POLINOMIO RESOLVIENDO CON EL COMANDO JJ= poly(J)
```

```
JJ= poly(J)
```

```
% ENCONTRANDO EL POLINOMIO CARACTERISTICO "PHI"
```

```
PHI = polyvalm(poly(J), A);
```

```
%
%
```

```
%-----LA MATRIZ DE GANANCIA DE RETROALIMENTACION DE
% ESTADO F SE OBTIENE -----
```

```
F = [0 0 0 1]*(inv (Mc))*PHI
```

```
% LA MATRIZ DE ESTADO QUEDA ENTONCES
```

```
Af = A - B*F;
```

```
% RESPUESTA A LAS CONDICIONES INICIALES
```

```
t=0:0.02:10;
```

```
r= zeros(1,length(t));
```

```
x0=[0.1 0.1 0.1 0.1];
```

```
[y,x]=lsim(Af,B,C,D,r,t,x0);
```

```
subplot(2,2,1), plot(t, x(:,1)), xlabel('seg'), ylabel('x'), grid;
```

```
subplot(2,2,2), plot(t, x(:,2)), xlabel('seg'), ylabel('x punto'), grid;
```

```
subplot(2,2,3), plot(t, x(:,3)), xlabel('seg'), ylabel('theta'), grid;
```

```
subplot(2,2,4), plot(t, y), xlabel('seg'), ylabel('salida,y'), grid;
```

```
%*****
```

Propiedad de Digitization de Tesis
Responsable M. B. Alberto Pedro Vorandi Medina

Colaboradores: Estanislao Ferrer García

M. B. Enrique Rodríguez Magaña

```
% APENDICE A: LISTADO DEL PROGRAMA EN MATLAB DEL SISTEMA DEL
% CONTROL DEL PENDULO INVERTIDO
```

```
%*****
```

```
% ----DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO--- CAP. 5 sección 5.6
```

```
OP = [-2 + i -2-i -1+i -1-i]; %Polos del observador deseados
JJ= poly(J); %comando para encontrar la ecuación
% polos deseada
```

```
% calculo de las Kn
a = [ 1 0 1 0; 15.0858 1 15.0858 1;-31.6301 37.1206 -3.0445 15.0858;
-364.1517 -31.6301 0 -3.0445]
b = [-9.0858; 46.36301; 382.1517;10]
```

```
% encontrando los valores de la matriz ganancia del observador
```

```
Ke = inv(a)*b
```

```
% los valores de Ke son
```

```
a11= [6.3841; -101.2126; -15.4699; 284.6422]
```

```
a12= [6.3841; -101.2126; -15.4699; 284.6422]
```

```
Ke = [ a11 a12]
```

```
% LA ECUACION DE ESTADO PARA EL OBSERVADOR
```

```
% DE ORDEN COMPLETO QUEDA ENTÓNCE
```

```
x = A - Ke*C
```

```
% PROPONIENDO LA MATRIZ DE ESTADO Pf
```

```
Pf = A - Ke*C;
```

```
% RESPUESTA A LAS CONDICIONES INICIALES
```

```
t=0:0.02:10;
```

```
r= zeros(1,length(t))
```

```
x0=[0.1 0.1 0.1 0.1]
```

```
[y,x]=lsim(Pf,B,C,D,r,t,x0)
```

```
subplot(2,2,1), plot(t, x(:,1)), xlabel('seg.'), ylabel('x'), grid
```

```
subplot(2,2,2), plot(t, x(:,2)), xlabel('seg.'), ylabel('x punto'), grid
```

```
subplot(2,2,3), plot(t, x(:,3)), xlabel('seg.'), ylabel('theta'), grid
```

```
subplot(2,2,4), plot(t, y), xlabel('seg.'), ylabel('salida, y'), grid
```

```
%*****
```

APENDICE B:

“Obtención de las respuestas a las condiciones iniciales usando MatLab”

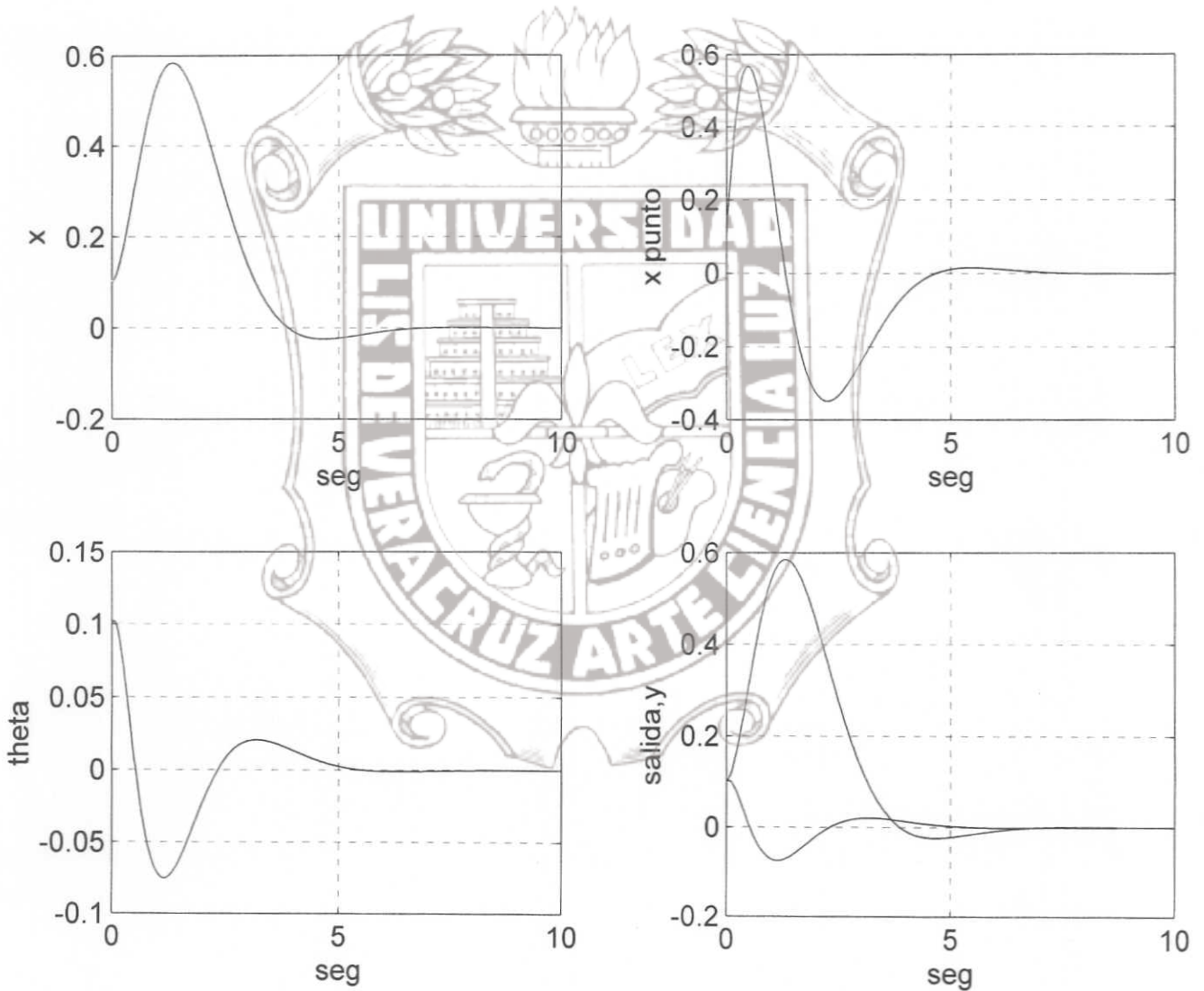


Figura B-1 Gráficas de la respuesta a las condiciones iniciales para el diseño del controlador del sistema del péndulo invertido simulado en MatLab.

APENDICE B:

“Obtención de las respuestas a las condiciones iniciales usando MatLab”

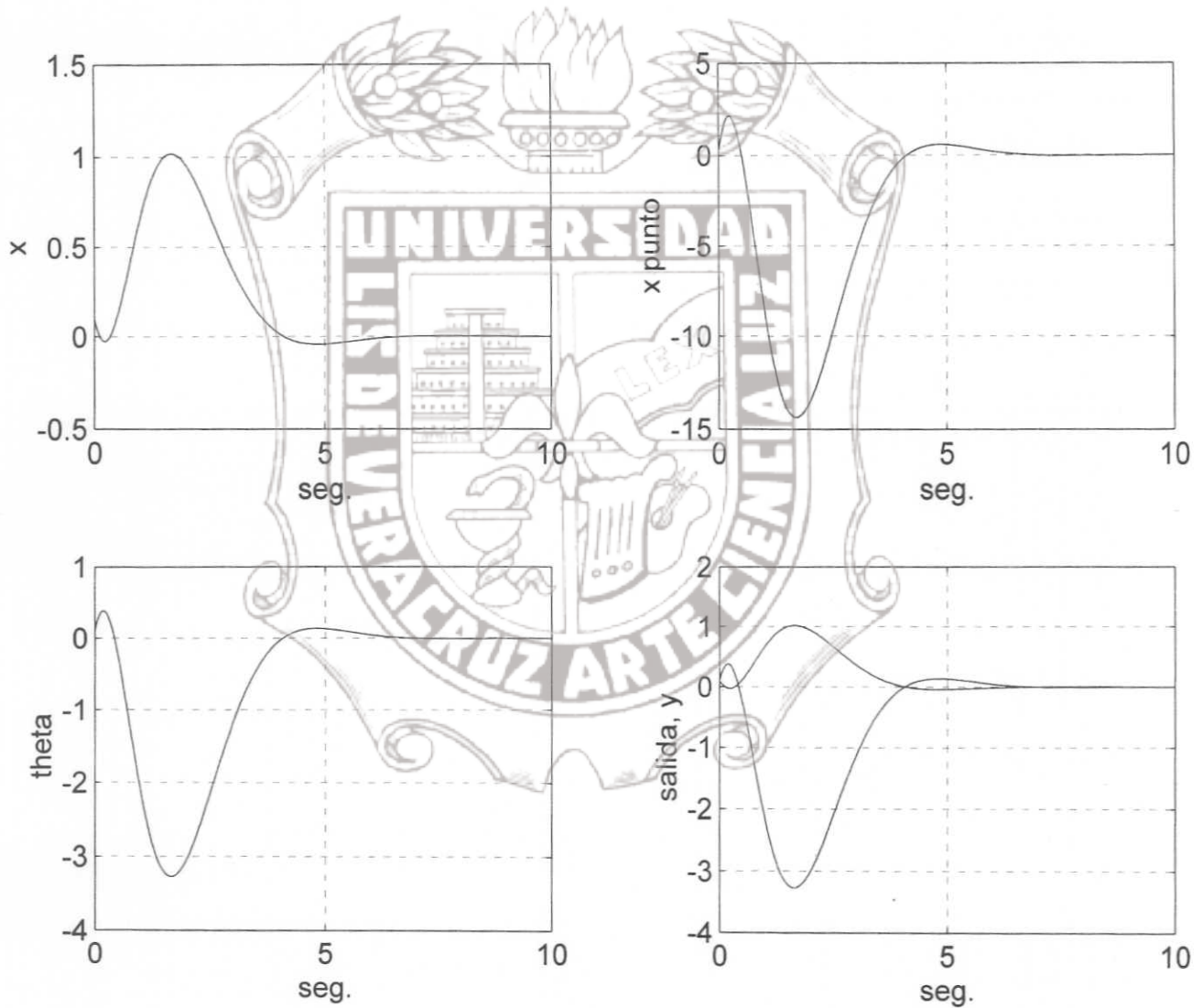
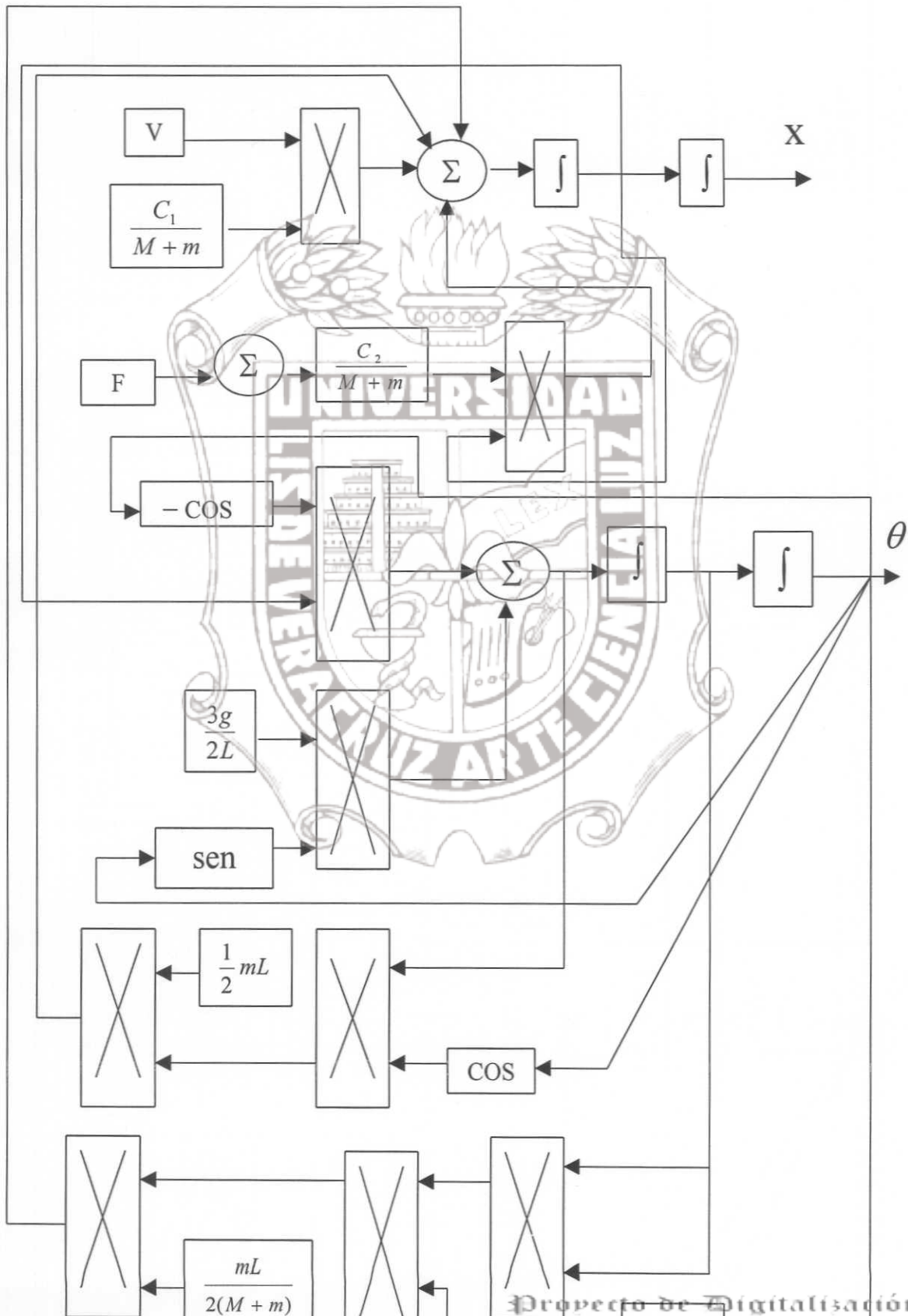


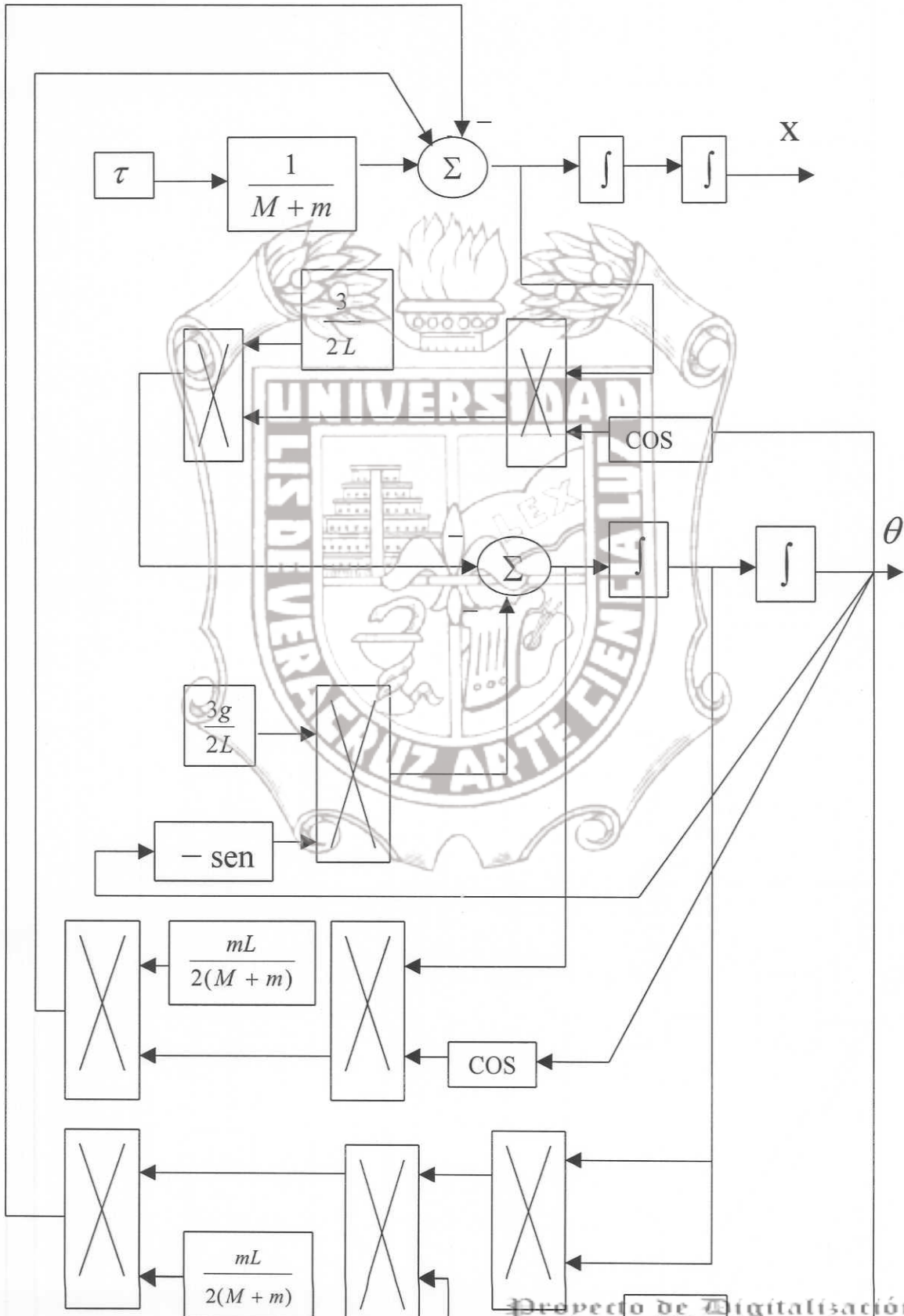
Figura B-2 Gráficas de la respuesta a las condiciones iniciales para el diseño del observador de orden completo del sistema del péndulo invertido simulado en MatLab.

APENDICE C: Figura C-1 Diagrama a bloques del sistema de péndulo invertido.



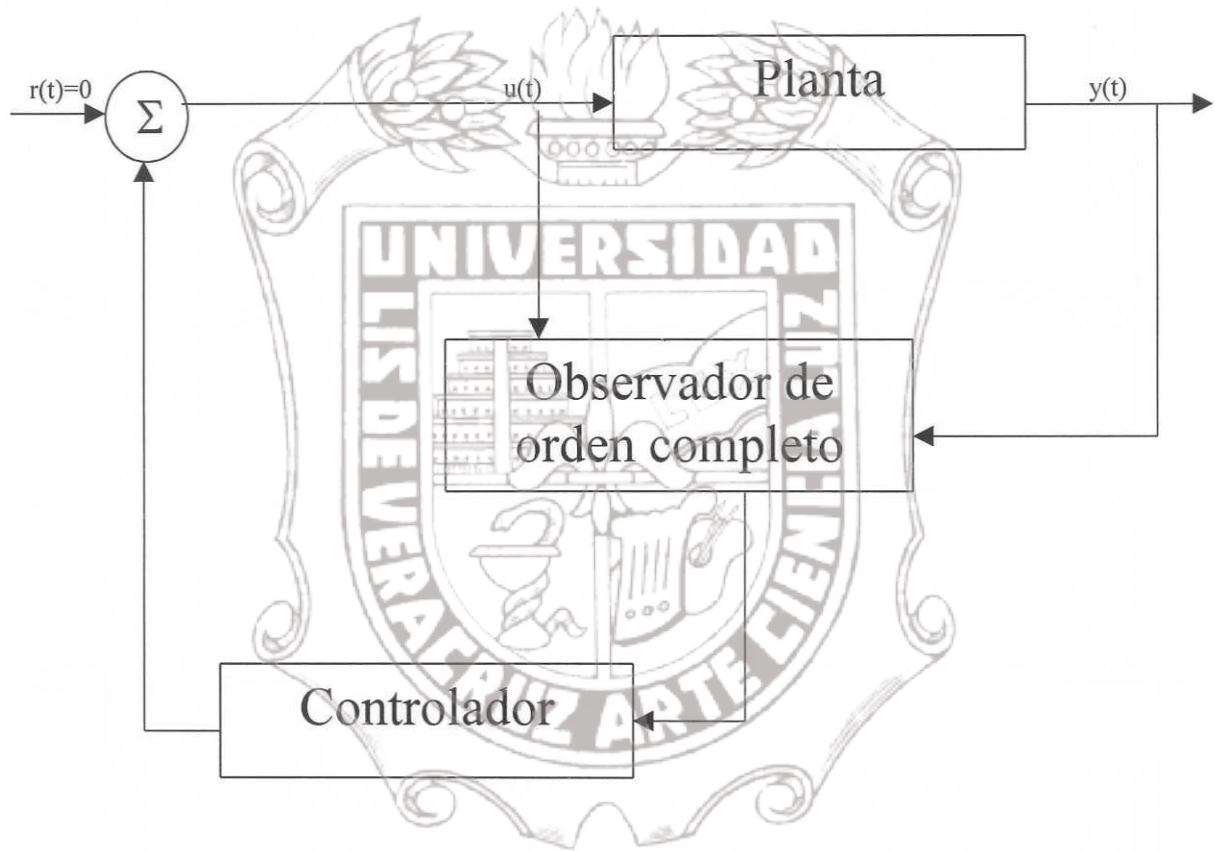
Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

APENDICE C: Figura C-2 Diagrama a bloques del modelo del sistema de péndulo invertido.



Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

APENDICE C: Figura C-3 Diagrama a bloques del diseño de sistema de control con el Observador



APENDICE D

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE LIAPUNOV.

Aleksandr M. Liapunov desarrolló un método fundamental para determinar la estabilidad de un sistema dinámico basado en la generalización de la consideraciones de la energía.

PRIMER METODO DE LIAPUNOV. Liapunov dividió el problema general del análisis de estabilidad de los sistemas no lineales en dos clases. La primera clase consiste de todos aquellos métodos en el cual la ecuación diferencial del sistema puede ser resuelta. Es decir, consiste de todos los procedimientos en el cual la forma explícita de las soluciones de las ecuaciones diferenciales son usadas para el análisis. La estabilidad o la inestabilidad del sistema es determinada de esta solución. Este desarrollo, el cual es conocido como primer método de Liapunov, no dice nada de particular importancia concerniente a la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, Liapunov, dejó el punto fuera en su primer método tal que la solución puede ser obtenida en la forma de series desde la cual la estabilidad puede ser determinada usando su segundo método. El segundo método, por otro lado, no requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Esto es, usando el segundo método de Liapunov, se puede determinar la estabilidad sin tener que resolver las ecuaciones de estado. En resumen, Liapunov probó que las aproximaciones de las soluciones de las ecuaciones diferenciales no lineales con frecuencia ofrecen útil información sobre la estabilidad.

Específicamente, el teorema de Liapunov establece: Si $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$ $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$

tiene un punto de equilibrio aislado en $(0,0)$, y si existe una función definida positiva** $L(x,y)$ cuyas derivadas parciales L_x y L_y son continuas y cuya derivada

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} P + \frac{\partial L}{\partial y} Q$$

es definida negativa sobre algún dominio conteniendo $(0,0)$, entonces $(0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

*Aleksandr M. Liapunov (1857-1918) fue un matemático ruso cuyo segundo método fue la conclusión de su disertación doctoral, originalmente publicada en 1892. Liapunov arguyó intuitivamente que si un sistema de ecuaciones diferenciales describe un sistema físico y si un punto de equilibrio es asintóticamente estable, entonces le corresponde a cada punto un mínimo de la energía potencial, y tal que la energía potencial debe decrecer tal como se aproxime al punto.

**Una función $L(x,y)$ es llamada definida positiva sobre un dominio D conteniendo el origen si $L(0,0) > 0$ en todos los otros puntos sobre D . Una función $L(x,y)$ es llamada definida negativa sobre D $L(0,0) = 0$ y $L(x,y) < 0$ en todos los otros puntos sobre D .