



**UNIVERSIDAD VERACRUZANA
INSTITUTO DE INGENIERÍA**



**Métodos para incluir los efectos de torsión
en la respuesta sísmica de edificios**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS**

**PRESENTA
ANGEL PONCE CÓRDOVA**

H. VERACRUZ, VER.

1999

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana



UNIVERSIDAD VERACRUZANA
INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., a 6 de Julio de 1999
DI463/99

Al candidato al Grado:
ING. ANGEL PONCE CORDOVA
P R E S E N T E:

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Dr. Bonifacio C.A. Peña Pardo, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería de Estructuras:

TEMA:
"METODOS PARA INCLUIR LOS EFECTOS DE TORSION EN LA RESPUESTA
SISMICA DE EDIFICIOS"

- I.- Introducción al Diseño Sísmico
- II.- Matriz de Rigideces de Edificios
- III.- Distribución de las Fuerzas Sísmicas entre los Elementos Resistentes del Edificio
- IV.- Conclusiones
Bibliografía
Apendice

Sin otro particular, me es grato quedar de Usted como su atento y seguro servidor.

ATENTAMENTE
"LIS DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"


DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ
DIRECTOR

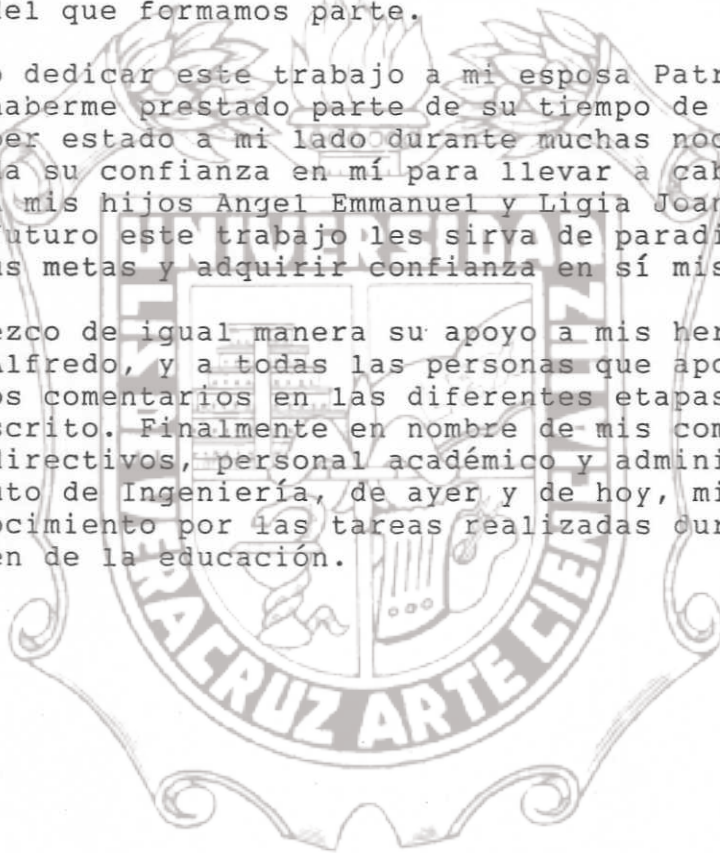
EMG/apm*.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer infinitamente a Dios por haber permanecido siempre a mi lado, dandome salud y las fuerzas necesarias para alcanzar mis metas. Así mismo quiero brindar -- mi eterna gratitud a mis Padres Sr. Alfredo Ponce Dominguez y Sra. Blanca Córdova de Ponce, quienes han sembrado en mí la semilla de la responsabilidad, la honradez y la lealtad -- para de esta forma cumplir con la exigencia social de atender servicios de más alta eficiencia terminal y mayor calidad con el firme proposito de cosechar progreso, bienestar y desarrollo para construir permanentemente el hermoso y -- gran país del que formamos parte.

Quiero dedicar este trabajo a mi esposa Patricia Jaramillo por haberme prestado parte de su tiempo de esposa y -- madre y haber estado a mi lado durante muchas noches depositando toda su confianza en mí para llevar a cabo este -- proyecto. A mis hijos Angel Emmanuel y Ligia Joanna espero que en un futuro este trabajo les sirva de paradigma para -- alcanzar sus metas y adquirir confianza en sí mismos.

Agradezco de igual manera su apoyo a mis hermanos -- Ricardo y Alfredo, y a todas las personas que aportaron -- sus valiosos comentarios en las diferentes etapas del presente manuscrito. Finalmente en nombre de mis compañeros -- expreso a directivos, personal académico y administrativo -- del Instituto de Ingeniería, de ayer y de hoy, mi más sentido reconocimiento por las tareas realizadas durante estos años en bien de la educación.



Prólogo

El objetivo del presente trabajo es explicar las bases e ilustrar la aplicación de los métodos que se emplean en la práctica del diseño sísmico de edificios para la distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes.

Se inicia con una breve descripción de los criterios de diseño, así como de algunos aspectos sobre los efectos de sitio en la Ciudad y Puerto de Veracruz.

Se presentan dos métodos para efectuar la distribución de cortantes sísmicas. El primero hace uso del concepto de rigidez de entrepiso; tiene la ventaja de que se puede incorporar fácilmente en una hoja de cálculo electrónica y hasta puede aplicarse manualmente con una calculadora de escritorio. En el segundo método, que emplea operaciones matriciales, es innecesaria la definición de rigideces de entrepiso, pero requiere el empleo de computadoras. Ambos métodos se basan en la hipótesis de que los pisos trabajan como diafragmas rígidos en su plano, además de que son aplicables aun cuando los elementos resistentes no estén ubicados en dos direcciones ortogonales.

Los conceptos fundamentales y procedimientos numéricos relacionados con los métodos mencionados se describen mediante su aplicación a estructuras sencillas, para evitar que un excesivo trabajo numérico oscurezca la presentación. Aunque gran parte de los ejemplos se resuelven manualmente, los algoritmos o sus variantes son válidos para sistemas más complejos, una vez que se instrumentan en programas de computadoras.

Finalmente se presentan conclusiones de carácter general respecto al problema de torsión, así como también de los métodos para la distribución de las fuerzas sísmicas.

Los requisitos específicos y los ejemplos se refieren esencialmente a lo prescrito por el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, aunque los criterios y los métodos de análisis son de validez general.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN AL DISEÑO SÍSMICO	1
1.1. Criterios de diseño sísmico del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF)	1
1.2. Condiciones de regularidad	6
1.3. Métodos de análisis	7
1.4. Microzonificación sísmica preliminar para la Ciudad y Puerto de Veracruz	8
1.4.1. Geología y geotécnica	9
1.4.2. Efectos de sitio	10
2. MATRIZ DE RIGIDECES DE EDIFICIOS	13
2.1. Edificios con pisos rígidos en planta	13
2.2. Edificios de un entrepiso	14
2.3. Edificios de más de un entrepiso	19
3. DISTRIBUCIÓN DE LAS FUERZAS SÍSMICAS ENTRE LOS ELEMENTOS RESISTENTES DEL EDIFICIO	23
3.1. Método basado en rigideces de entrepiso	24
3.1.1. Edificios de un entrepiso	24
3.1.2. Rotación de ejes coordenados	25
3.1.3. Traslación de ejes principales de rigidez	31
3.1.4. Distribución de fuerzas sísmicas	35
3.1.5. Edificios de más de un entrepiso	37
3.1.6. Ejemplo 1	40
3.1.7. Ejemplo 2	52
3.2. Método matricial	59
3.2.1. Cálculo matricial de momentos torsionantes	59
3.2.2. Distribución matricial de fuerzas sísmicas	63
3.2.3. Ejemplo 1	65
3.2.4. Ejemplo 2	71

4. CONCLUSIONES	83
4.1. <i>Problema de torsión</i>	83
4.2. <i>Método basado en rigideces de entrepiso</i>	85
4.3. <i>Método matricial</i>	86
Bibliografía	
Apéndice	
A Programa de computadora	
B Comentarios al inciso 3.1	



Capítulo 1

Introducción al diseño sísmico

1.1 CRITERIOS DE DISEÑO SÍSMICO DEL REGLAMENTO
DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RCDF)

Se presentarán aquí, en sus aspectos esenciales, los criterios de diseño sísmico del RCDF en su versión de 1993. Este Reglamento no tiene modificaciones relevantes en lo relativo a diseño sísmico, con respecto a la versión que fue promulgada en 1987.

Como en sus versiones anteriores, el cuerpo principal del Reglamento incluye solamente requisitos de carácter general. Métodos y prescripciones particulares están contenidos en las Normas Técnicas para Diseño Sísmico (NTDS). Además, requisitos específicos para el diseño sísmico de los principales materiales estructurales se encuentran en las Normas Técnicas para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, Metálicas, de Mampostería y de Madera, respectivamente.

Como índice de la acción sísmica de diseño se emplea el coeficiente sísmico, c , que representa el coeficiente de cortante basal, el cual define la fuerza cortante horizontal V_o , que actúa en la base del edificio, como una fracción del peso total del mismo, W_o .

$$c = \frac{V_o}{W_o}$$

El coeficiente sísmico también sirve de base para la construcción de los espectros de diseño. Este coeficiente varía en función del tipo de suelo y de la importancia de la construcción.

El suelo de la ciudad de México se divide en las tres zonas principales identificadas como I, II y III o de Lomas, de Transición y de Lago (figura 1.1). Una parte de las zonas II y III se denomina zona IV, y para ésta existen algunas limitaciones en la aplicación de métodos de diseño que incluyen los efectos de interacción suelo-estructura (figura 1.2).

Considerando que es mayor la seguridad que se requiere para construcciones en que las consecuencias de la falla son particularmente graves o para aquellas que es vital que permanezcan funcionando después de un evento sísmico importante, se especifica que el coeficiente sísmico se multiplique por 1.5 para diseñar las estructuras de construcciones como estadios, hospitales y auditorios, subestaciones eléctricas y telefónicas (es decir, las clasificadas dentro del grupo A).

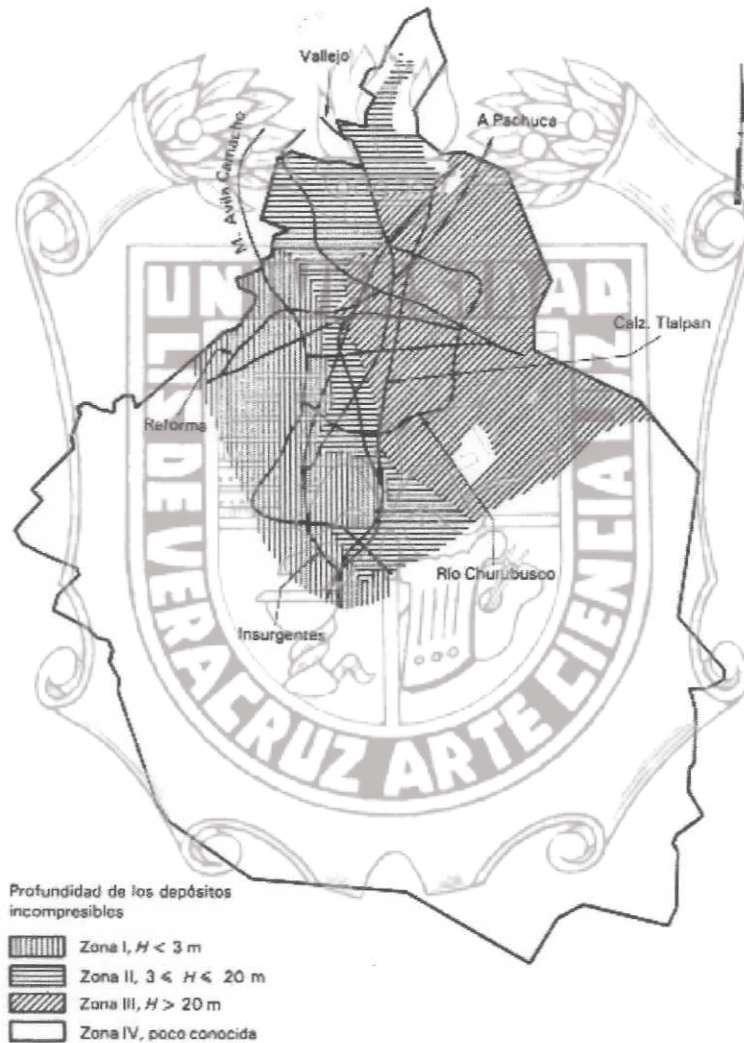


figura 1.1 Zonificación del Distrito Federal, según el tipo de suelo.

Los coeficientes sísmicos sirven para construir los espectros de aceleraciones de diseño que se emplean para análisis dinámicos. De hecho representan cotas superiores de dichos espectros que corresponden a su parte plana. Para el análisis estático puede emplearse el coeficiente sísmico c , o un coeficiente reducido según el valor del periodo fundamental. Los espectros así contruidos son "elásticos", y sirven para determinar las fuerzas laterales para las

que hay que diseñar una estructura que no tenga una capacidad significativa de deformarse fuera de su intervalo elástico lineal. Se admiten reducciones en las ordenadas espectrales. Están definidas por un factor de comportamiento sísmico Q que toma valores entre 1.0 y 4.0, según el tipo de estructuración y los detalles de dimensionamiento que se hayan adoptado en la estructura.

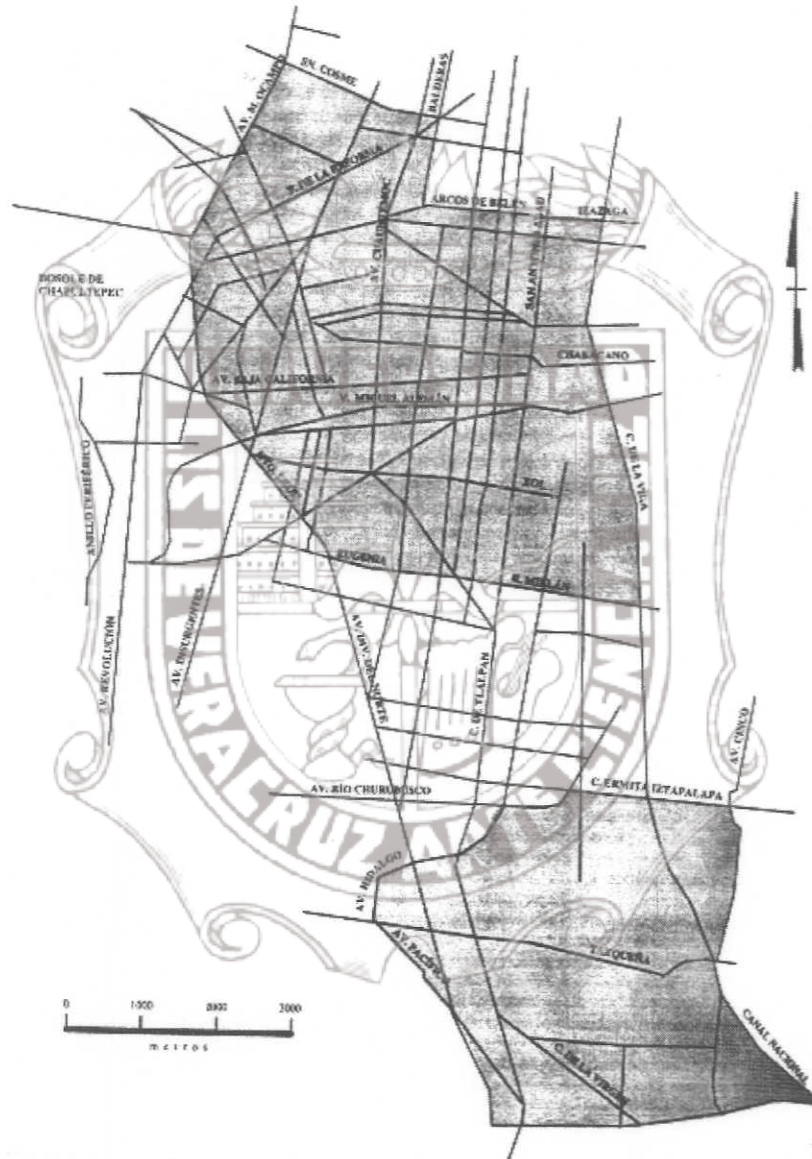


figura 1.2 Subzonificación de las zonas del lago y de transición.

Debe revisarse la estructura para la acción de dos componentes horizontales ortogonales del movimiento del terreno. Se considerará actuando simultáneamente el valor de diseño de un componente más 30 por ciento del valor de diseño del componente ortogonal (figura 1.3).

La estructura puede presentar además, movimientos de rotación en cada masa (figura 1.4) y un modelo más completo debe incluir ese grado de libertad mediante resortes de torsión en cada piso. La importancia de las rotaciones y la magnitud de las solicitaciones que por este efecto se inducen en la estructura, dependen de la distribución en planta de las masas y de las rigideces laterales.

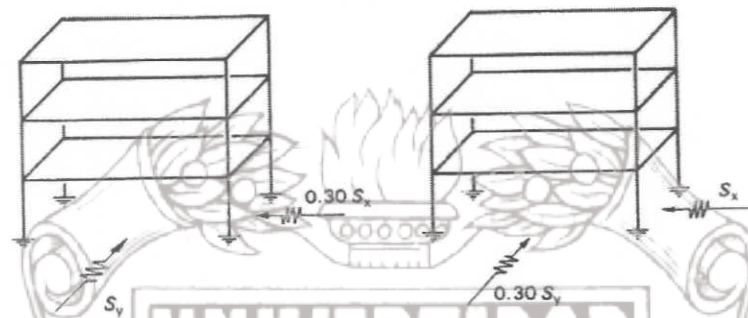


figura 1.3 Combinación del efecto sísmico en dos direcciones.

Cuando no se lleve a cabo un análisis dinámico que incluya los efectos de torsión a través de la consideración de un grado de libertad de rotación en cada nivel, el efecto de la torsión se suele considerar de manera estática superponiendo sus resultados a los de un análisis estático o dinámico, de los efectos de traslación calculados de manera independiente.

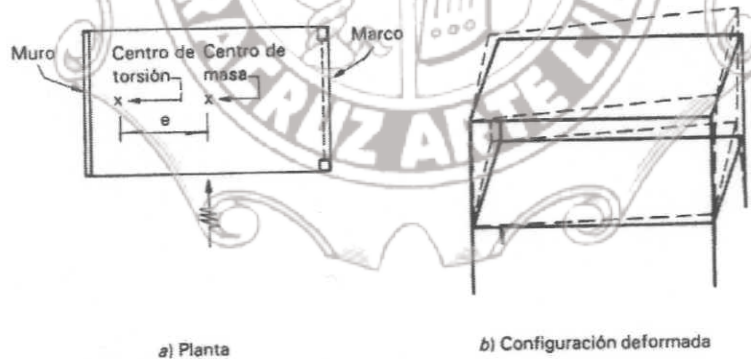


figura 1.4 Vibración de un edificio incluyendo efectos de torsión.

Debido al efecto dinámico de la vibración, el momento torsionante que actúa en cada entrepiso puede verse en general, amplificado y, por tanto, la excentricidad efectiva puede ser mayor que la calculada estáticamente. Por otra parte, el cálculo del centro de torsión sólo puede efectuarse con pobre aproximación, porque la rigidez de cada elemento particular puede ser alterada por agrietamientos locales o por la contribución de elementos no estructurales. Por las dos razones expuestas, el RCDF especifica que el momento torsionante de diseño se determine con una excentricidad total que se calculará como la más desfavorable de:

$$e = 1.5 e_c + 0.1 b$$

$$e = e_c - 0.1 b$$

donde e_c es la excentricidad calculada a partir de los valores teóricos de los centros de masa y de cortante; el factor 1.5 cubre la amplificación dinámica de la torsión; b es el lado del edificio en dirección normal a la del análisis; se considera un error posible en la determinación de la excentricidad igual a 10 por ciento del ancho del edificio.

Uno de los objetivos básicos del diseño sísmico, consistente en evitar daños ante temblores moderados, se trata de cumplir limitando los desplazamientos laterales de la estructura. El índice más importante para la determinación de la magnitud de los posibles daños es la distorsión de entrepiso Γ , o sea, el desplazamiento relativo entre dos pisos sucesivos Δ , dividido entre la altura de entrepiso H (figura 1.5)

$$\Gamma = \Delta/H$$

Hay que recordar que la reducción en el coeficiente sísmico por comportamiento inelástico es válida para determinar las fuerzas para las que hay que diseñar la estructura, pero que las deformaciones que se presentarán en la estructura serán aproximadamente Q veces las que se han determinado con un análisis elástico bajo esas fuerzas reducidas. Por tanto, antes de compararlas con deformaciones admisibles, las deformaciones calculadas Δ_c deberán multiplicarse por Q .

$$\Delta = Q \Delta_c$$

También debe tenerse en mente que el objetivo es limitar las deflexiones a valores que no causen daños en elementos estructurales y no estructurales, no para el sismo de diseño sino para uno de mucho menor intensidad. Para poder emplear los mismos resultados del análisis ante el sismo de diseño, las distorsiones admisibles se multiplican en el RCDF por un factor del orden de tres con respecto a las que realmente se quieren controlar. Así, se encuentra experimentalmente que en muros de mampostería y en recubrimientos frágiles de paredes divisorias se provocan agrietamientos cuando las distorsiones exceden de dos al millar (0.002); el reglamento en cuestión exige se compare la distorsión calculada con un valor admisible:

$$\Gamma_{adm} = 0.006$$

cuando las deformaciones de la estructura pueden afectar elementos no estructurales frágiles (caso A en la figura 1.5).



figura 1.5 Distorsiones de entrepiso.

Por otra parte, cuando no existen elementos frágiles que pueden ser dañados por el movimiento de la estructura o cuando éstos están desligados de la estructura principal (caso B en la figura 1.5) se aumenta al doble la distorsión admisible:

$$\Gamma_{adm} = 0.012$$

En este caso, el límite tiene como fin evitar que la edificación resulte excesivamente flexible y se originen deformaciones que causen molestias y pánico a los ocupantes y que hagan que se vuelvan importantes los efectos de segundo orden.

Los criterios aquí mencionados y los métodos de análisis que se describirán más adelante, se refieren esencialmente a edificios y estructuras en que la resistencia a cargas laterales es proporcionada por marcos, arriostrados o no, o rigidizados por muros. Otras estructuras como los muros de contención y los tanques, se comportan en forma radicalmente distinta y sus métodos de análisis sísmico son diferentes y no se tratarán aquí.

1.2 CONDICIONES DE REGULARIDAD

Las condiciones de regularidad que establece la sección 6 de las NTDS son el resultado de la intuición confirmada por la experiencia. El objetivo de la presente sección no es prohibir la construcción de edificios que no cumplan con las condiciones de regularidad, sino dar recomendaciones al respecto.

1. Planta sensiblemente simétrica en masas y elementos resistentes con respecto a dos ejes ortogonales.
2. Relación de altura a menor dimensión de la base menor de 2.5.
3. Relación de largo a ancho de la base menor de 2.5.
4. En planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o saliente.
5. Cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente.
6. No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura. Las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren en posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún nivel de 20 por ciento del área de la planta.
7. El peso de cada nivel, incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 por ciento de dicho peso.
8. Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70 por ciento de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.
9. Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas horizontales y por trabes o losas planas.
10. La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 por ciento a la del piso inmediatamente inferior.
11. En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente, e_t , excede del 10 por ciento de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

1.3 MÉTODOS DE ANÁLISIS

El primer paso del diseño es el análisis sísmico que permite determinar qué fuerzas representan la acción sísmica sobre el edificio y qué elementos mecánicos (fuerzas normales y cortantes y momentos flexionantes) producen dichas fuerzas en cada miembro estructural del edificio. Para este fin, los reglamentos aceptan métodos los cuales tienen distinto nivel de refinamiento y se subdividen en dos grupos: los de tipo estático y los dinámicos. Según lo dispuesto en la sección 2 de las NTDS, el método simplificado de la sección 7 solo es aplicable a ciertos edificios con altura no mayor de 13 m. Para alturas entre 13 y 60 m, el diseño de edificios se

puede basar en un análisis estático acorde con lo que marca la sección 8. Para alturas superiores a 60 m, es obligatorio realizar un análisis dinámico según se describe en la sección 9.

En la literatura actual se incluyen otros dos métodos de análisis que cumplen con los requisitos de aplicación del método estático: uno de ellos, el denominado cuasidinámico (Aranda y Rascón, 1986), suministra una precisión muy superior a la del estático y se acerca mucho a la del análisis modal; el otro (Cruz y Chopra, 1986), con base en una estimación de parámetros de la estructura, permite decidir el grado de refinamiento que se debe emplear en el análisis. Cualquiera de estos dos métodos puede utilizarse como alternativa de los que señala el Reglamento, siempre y cuando se calculen correctamente los parámetros necesarios y se sigan razonablemente los procedimientos señalados.

La obligatoriedad de emplear análisis dinámico para el diseño sísmico de edificios con altura mayor de 60 m proviene de que el método estático puede no dar suficiente importancia a la contribución de los modos superiores de vibración en la respuesta estructural, sobre todo cuando el periodo fundamental de vibración T sobrepasa de T_b (T_b es el periodo característico de los espectros de diseño) o el edificio en cuestión tiene una altura considerable. Algo de este fenómeno se corrige tomando las aceleraciones horizontales de diseño como se especifica en el inciso 2c de la sección 8 para el caso en que T exceda de T_b , pero aun dicha corrección es imprecisa y puede ser insuficiente cuando el periodo fundamental de vibración es muy largo.

Cualquiera que sea el método de análisis, los reglamentos especifican espectros o coeficientes para diseño sísmico que constituyen la base del cálculo de las fuerzas sísmicas.

La mayoría de los conceptos que fundamentan a los métodos estático y dinámico son independientes de las disposiciones reglamentarias y pueden emplearse con otros reglamentos de construcción con variantes menores que reflejen los requisitos correspondientes de tales documentos principalmente en lo referente a los espectros o coeficientes sísmicos estipulados para cada lugar.

1.4 MICROZONIFICACIÓN SÍSMICA PRELIMINAR PARA LA CIUDAD Y PUERTO DE VERACRUZ

El movimiento en la superficie del terreno en un sitio dado puede diferir radicalmente del que se tiene en la roca base, por alteraciones de las ondas debidas a efectos geológicos, topográficos y de rigidez del subsuelo. La importancia de estas alteraciones, llamadas en términos generales *efectos locales*, se reconoce cada vez más en años recientes y ha conducido a la

necesidad de estudios de microzonificación de las áreas de asentamientos humanos para detectar aquellas zonas que presentan problemas especiales.

Fenómenos locales extremos se tienen en zonas de suelos inestables donde la vibración sísmica puede provocar fallas de suelo, deslizamiento de laderas o problemas de licuación. Estas zonas deben identificarse con estudios geotécnicos específicos.

La Ciudad y Puerto de Veracruz, localizada a $19^{\circ}12'$ de latitud norte y a $96^{\circ}08'$ de longitud oeste, se encuentra asentada en el Litoral del Golfo de México. Aún cuando la sismicidad en el Golfo de México es dispersa, el Puerto de Veracruz ha experimentado sismos locales importantes, como es el caso del sismo del 11 de marzo de 1967, de magnitud $m_b=5.3$, conocido como el temblor de Veracruz por los daños ocasionados en aproximadamente 50 edificios. Este temblor de 1967 fue localizado en la plataforma continental, frente a Punta Antón Lizardo, a unos 20 km al sureste del Puerto de Veracruz. Otro sismo que tiene las mismas características tectónicas al temblor de 1967, es el sismo de Jáltipan del 26 de agosto de 1959 de magnitud $M_s=6.4$ que destruyó la ciudad de Jáltipan, Ver.

Por su localización, Veracruz se ha convertido en importante núcleo comercial y sus cuatro muelles lo hacen uno de los principales puertos mercantiles y financieros. En virtud del aumento en cuanto a población e industria en años recientes y la posibilidad de ser afectado por un temblor de las características ya mencionadas, es importante que la Ciudad y Puerto de Veracruz esté dotado de un reglamento de construcciones, que incluya el comportamiento dinámico de los diferentes tipos de suelo (efectos de sitio).

1.4.1 Geología y geotécnica

La Ciudad y Puerto de Veracruz se ubica entre la margen izquierda del río Jamapa y el litoral del Golfo de México. Morfológicamente en el área se diferencian tres zonas: una en la proximidad de la costa donde afloran depósitos de playa que presentan una ligera pendiente hacia el mar; otra constituida por cordones de dunas litorales que tienen un alineamiento aproximado de norte a sur, y una última zona ubicada sobre la margen izquierda del río y atrás de los cordones de dunas litorales, donde afloran depósitos aluviales.

En la figura 1.6 se han configurado estas zonas, que representan a su vez formaciones del cuaternario:

- i) *Depósitos de dunas (Qd)*, unidad formada por el acarreo de arenas litorales por acción eólica, las arenas son de grano medio a fino, compuestas por feldespatos, micas, fragmentos de roca, cuarzo, conchas de pelecípodos, etc. La unidad forma dunas longitudinales paralelas a la línea de costa con alturas mayores a 15 m. Los alineamientos de antiguas dunas fijas han permitido el desarrollo de vegetación, así como asentamientos humanos, tal es el caso de los fraccionamientos Vista Mar y Médano de Buenavista.
- ii) *Depósitos de playa (Qp)*, depósito de arena fina acumulada por la acción de la alta marea en la zona de playa; son arenas ricas en feldespatos, micas, cuarzo y fragmentos de roca. Estos depósitos que se ubican en la proximidad de la costa presentan una ligera pendiente hacia el mar. En esta zona también existen formaciones coralíferas que se extienden por toda la costa y que subyacen a los depósitos de playa a profundidades variables entre 15 y 20 m.
- iii) *Depósitos aluviales (Qal)*, depósitos aluviales originados por acción fluvial, su textura y granulometría varía de una región a otra; hacia la porción occidental de la Ciudad son suelos poco consolidados de arena gruesa ligeramente gravosos, compuestos por vidrio volcánico, feldespatos, micas y fragmentos de roca; hacia la planicie costera, los suelos son limo-arenosos, compuestos por clastos clasificados de cuarzo, feldespatos, micas, fragmentos de roca y gran contenido de limos, escasamente consolidados. Esta zona ubicada sobre la margen izquierda del Río Jamapa y atrás de los cordones de dunas litorales, presenta áreas inundables en la que prácticamente no existía desarrollo urbano hasta hace algunos años; sin embargo en la actualidad es la de mayor crecimiento, por ejemplo: Fracc. Floresta, Av. Lafragua, Av. Urano, Av. Jimenez Sur, etc.

1.4.2 Efectos de sitio

Lermo, *et al* (1995), en un trabajo reciente presentaron los resultados de un estudio de efectos de sitio en la Ciudad y Puerto de Veracruz. El objetivo de este estudio fue el de realizar una primera evaluación de los valores de periodo dominante T_0 asociados a la resonancia de las capas de suelo blando presentes en la zona, así como determinar los rangos de amplificación máxima A_r relativa a terreno firme que se puedan esperar durante temblores futuros. Para este fin, se recopiló información geológica. Adicionalmente, se llevaron a cabo mediciones de vibración ambiental en 21 puntos dentro de la Ciudad. Basados en toda esta información, propusieron un mapa de microzonificación sísmica preliminar para la Ciudad y Puerto de Veracruz.

En la figura 1.7 se muestra este mapa, donde se diferencian cinco zonas: La *Zona I*, esta conformada por los depósitos de Playa, que presentan valores de T_o entre 0.2 y 0.5 seg y A_r entre 2 y 4. *Zona II*, esta conformada por los depósitos de Dunas, que presentan valores de T_o entre 0.2 y 0.5 seg y A_r entre 2 y 6. *Zona III*, esta conformada por los depósitos Aluviales, los cuales pueden presentar valores de periodos dominantes más altos que el observado (0.5 seg) en sitios más cercanos a los afluentes del río Jamapa. Por esta razón y por su valor de $A_r > 10$, esta zona tiene una peligrosidad mayor que las otras dos. *Zona IV*, ubicada dentro de los depósitos de Playa y considerado de mayor peligrosidad por presentar valores altos de T_o y A_r , así como, por ser parte de la ciudad antigua de Veracruz. Por último, la *Zona V*, ubicada en la parte más angosta de los depósitos de Dunas, zona de inestabilidad, por el acarreo de arenas en tiempos de lluvia.

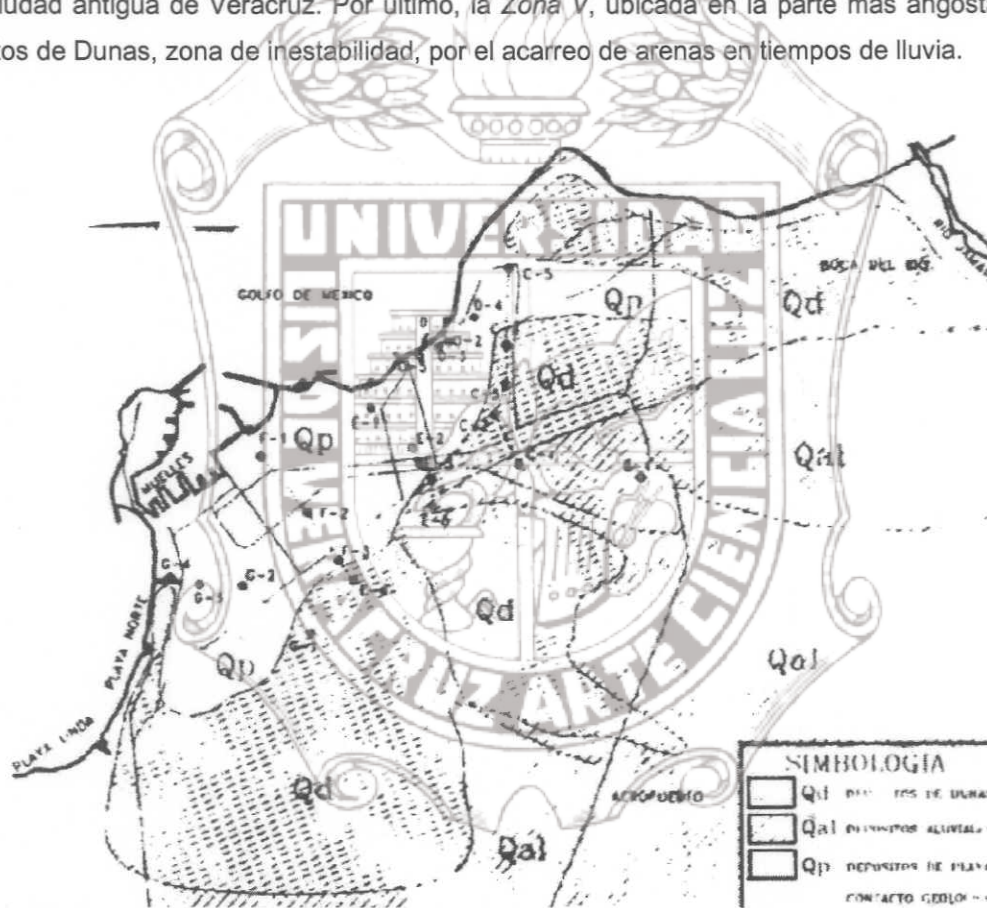


figura 1.6 Mapa geológico superficial de la Ciudad de Veracruz.

VERACRUZ

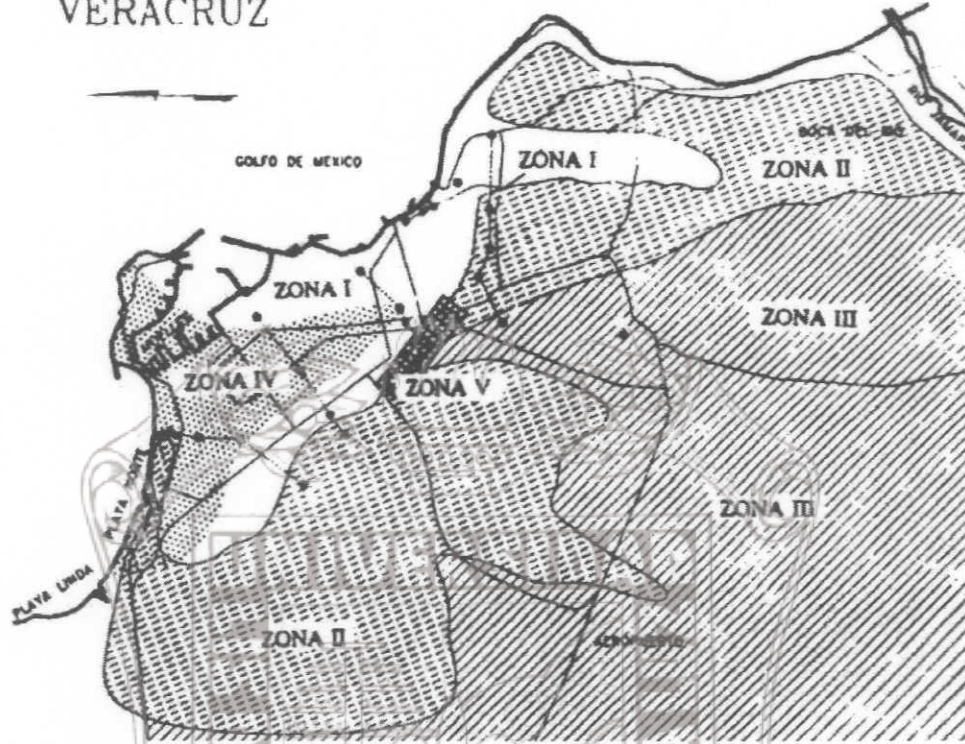


figura 1.7 Mapa de microzonificación sísmica preliminar para la Ciudad y Puerto de Veracruz.

Capítulo 2

Matriz de rigideces de edificios

Las estructuras de edificios son tridimensionales y pueden analizarse como tales mediante el método de elementos finitos, que permite representar losas, vigas, columnas, muros, diagonales, etc. empleando diferentes tipos de elementos. Sin embargo, esta no es una práctica común porque surgen las siguientes dificultades: a) es muy grande el número de grados de libertad necesario para representar un edificio completo, particularmente si es de varios pisos; b) la cantidad de datos que hay que proporcionar y su laboriosa organización aumentan las posibilidades de cometer errores, a veces difíciles de localizar; y c) aun con las modernas ayudas visuales es difícil interpretar los resultados, que con frecuencia están dados como esfuerzos y no como fuerzas y momentos que son las cantidades de interés en diseño estructural. Por tanto, un análisis tridimensional de tal naturaleza está reservado para estructuras muy importantes o a partes limitadas de un edificio de características desusuales.

2.1 EDIFICIOS CON PISOS RÍGIDOS EN PLANTA

En la mayoría de los casos es aceptable suponer que un edificio está formado por sistemas planos rectangulares verticales (marcos y/o muros), conectados horizontalmente entre sí por los sistemas de piso en cada uno de los niveles. La rigidez de los sistemas de piso en su propio plano es infinita, por lo cual funcionan como diafragmas rígidos. Esto implica que los desplazamientos laterales de cualquier punto en los pisos del edificio se puedan expresar en términos de dos desplazamientos horizontales y un giro alrededor de un eje vertical de un punto cualquiera de cada piso, de modo que, cuando las fuerzas laterales están aplicadas en los pisos, el problema se puede reducir a uno de sólo tres grados de libertad por cada nivel. Esta es la hipótesis de partida de los métodos expuestos a continuación.

Lo anterior, sólo hace compatibles, a los desplazamientos laterales de los niveles de todos los sistemas planos que forman el edificio. Los demás grados de libertad se consideran independientes de un sistema plano a otro, condición que no cumplen los desplazamientos verticales de las columnas que se encuentran en la intersección de dos sistemas planos y pertenecen a ambos. También debe notarse que los giros de estas columnas sólo son

independientes entre sí cuando los sistemas planos son ortogonales; por esto, los métodos aquí propuestos no deben usarse cuando los sistemas planos que componen un edificio se corten en ángulos muy agudos en planta. Además, cuando los pisos son flexibles en su propio plano, no es válida la suposición de que los sistemas planos están unidos por diafragmas infinitamente rígidos, lo cual invalida los procedimientos aquí expuestos.

Cuando sea inapropiado suponer que los pisos son infinitamente rígidos en planta, se tiene que recurrir a programas completamente tridimensionales de elementos finitos con los que los pisos se pueden representar con elementos placa o con marcos y/o armaduras horizontales.

2.2 MATRIZ DE RIGIDEZES DE EDIFICIOS DE UN ENTREPISO

Para fines de introducción se consideran edificios de un entrepiso, estos casos presentan la ventaja de que se puede trabajar en forma exacta con la rigidez de entrepiso de los marcos, definida como el cociente del cortante de entrepiso entre el desplazamiento producido en el marco al aplicar ese cortante $K_j = V_j / d_j$. Considérese el edificio de un entrepiso mostrado en la figura 2.1. El punto CM es el centro de masa del nivel; en él se considera aplicada la fuerza sísmica del nivel, que en este caso es también la fuerza cortante V del entrepiso; se supone que el sismo tiene una dirección definida por el ángulo Ψ ; el edificio se encuentra formado por marcos, como el j , que soportan la losa del edificio.

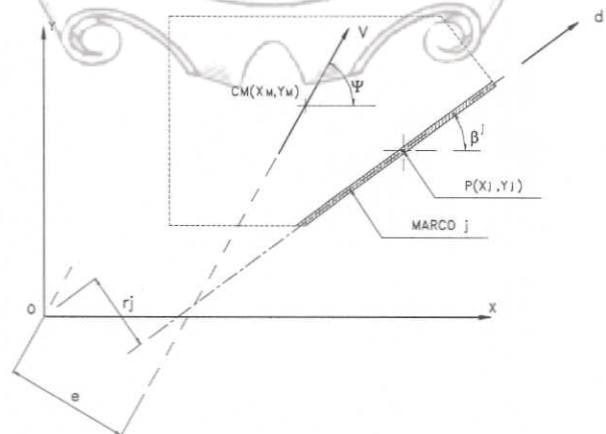


figura 2.1

Debido a la acción sísmica el entrepiso sufrirá un desplazamiento de cuerpo rígido cuyas componentes serán D_x , D_y y θ como se aprecia en la figura 2.2.



figura 2.2

Analizando los desplazamientos que sufre el entrepiso, el desplazamiento lateral d_j del sistema plano j en este entrepiso, considerando que el giro θ es pequeño, se expresa

$$d_j = D_x \cos \beta_j + D_y \operatorname{sen} \beta_j + \theta \cdot r_j \quad (2.1)$$

por lo que el desplazamiento lateral total de un marco cualquiera del entrepiso en estudio, es igual a la suma de las proyecciones de los desplazamientos de cuerpo rígido D_x , D_y y θ .

Desplazamiento que multiplicado por la rigidez del marco j nos da la fuerza que absorbe dicho marco

$$F_j = K_j d_j \quad (2.2)$$

y que proyectada en las direcciones X, Y se obtiene respectivamente

$$F_{xj} = K_j d_j \cos \beta_j \quad (2.3)$$

$$F_{yj} = K_j d_j \operatorname{sen} \beta_j \quad (2.4)$$

que vienen a ser las fuerzas equilibrantes a la descomposición del cortante sísmico V en las direcciones X , Y respectivamente, ver figura 2.3.



figura 2.3

Aunado a lo anterior se genera un momento debido a la fuerza F_j de magnitud

$$M_j = K_j d_j r_j \quad (2.5)$$

Sustituyendo el valor del desplazamiento d_j en las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) se obtiene respectivamente


$$\begin{aligned} F_{xj} &= K_j (D_x \cos^2 \beta_j + D_y \operatorname{sen} \beta_j \cos \beta_j + \theta r_j \cos \beta_j) \\ F_{yj} &= K_j (D_x \cos \beta_j \operatorname{sen} \beta_j + D_y \operatorname{sen}^2 \beta_j + \theta r_j \operatorname{sen} \beta_j) \\ M_j &= K_j (D_x r_j \cos \beta_j + D_y r_j \operatorname{sen} \beta_j + \theta r_j^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

de manera que por equilibrio del entrepiso respecto al origen del sistema coordenado X , Y (ver figura 2.3), se pueden escribir estas ecuaciones en términos de los desplazamientos D_x , D_y y el giro θ .

$$\begin{aligned}
 V_x &= \left[\sum K_j \cos^2 \beta_j \right] D_x + \left[\sum K_j \sin \beta_j \cos \beta_j \right] D_y + \left[\sum K_j r_j \cos \beta_j \right] \theta \\
 V_y &= \left[\sum K_j \cos \beta_j \sin \beta_j \right] D_x + \left[\sum K_j \sin^2 \beta_j \right] D_y + \left[\sum K_j r_j \sin \beta_j \right] \theta \\
 M &= \left[\sum K_j r_j \cos \beta_j \right] D_x + \left[\sum K_j r_j \sin \beta_j \right] D_y + \left[\sum K_j r_j^2 \right] \theta
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde

Llamando



$$\begin{aligned}
 M &= V \cdot e \\
 K_{xx} &= \sum K_j \cos^2 \beta_j \\
 K_{xy} &= \sum K_j \sin \beta_j \cos \beta_j \\
 K_{x\theta} &= \sum K_j r_j \cos \beta_j \\
 K_{yx} &= \sum K_j \cos \beta_j \sin \beta_j \\
 K_{yy} &= \sum K_j \sin^2 \beta_j \\
 K_{y\theta} &= \sum K_j r_j \sin \beta_j \\
 K_{\theta x} &= \sum K_j r_j \cos \beta_j \\
 K_{\theta y} &= \sum K_j r_j \sin \beta_j \\
 K_{\theta\theta} &= \sum K_j r_j^2
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

las ecuaciones resultan simplificadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 V_x &= K_{xx} D_x + K_{xy} D_y + K_{x\theta} \theta \\
 V_y &= K_{yx} D_x + K_{yy} D_y + K_{y\theta} \theta \\
 M &= K_{\theta x} D_x + K_{\theta y} D_y + K_{\theta\theta} \theta
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

y que en forma matricial resulta

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\{V\} = [K] \{D\} \tag{2.11}$$

de donde se puede observar que la **matriz de rigideces [K] es simétrica** dado que

$$K_{xy} = K_{yx} = \sum K_j \cos \beta_j \sin \beta_j$$

$$K_{x\theta} = K_{\theta x} = \sum K_j r_j \cos \beta_j$$

$$K_{y\theta} = K_{\theta y} = \sum K_j r_j \sin \beta_j$$

Se hace la observación de que en las expresiones obtenidas de rigidez donde aparece el subíndice θ se presenta el término r_j que es la distancia del origen a la línea de acción del marco j , la cual se puede determinar conociendo la ecuación de la línea de acción del marco j (ver figura 2.3).

De la geometría analítica (Lehmann 1978) sabemos que la ecuación de una recta que pasa por un punto dado $P(x_j, Y_j)$ y tiene la pendiente $m = \tan \beta_j = \frac{\sin \beta_j}{\cos \beta_j}$, tiene por ecuación

$$y - y_j = \frac{\sin \beta_j}{\cos \beta_j} (x - x_j)$$

$$x \sin \beta_j - y \cos \beta_j - (x_j \sin \beta_j - y_j \cos \beta_j) = 0$$

que tiene la forma general $Ax + By + C = 0$

aplicando la ecuación de la distancia dirigida de la recta dada $Ax + By + C = 0$ al punto dado $P_1(x_1, y_1)$ (sea este punto el origen) obtenemos r_j

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r_j = \frac{0 + 0 - x_j \sin \beta_j + y_j \cos \beta_j}{\sqrt{(\sin \beta_j)^2 + (-\cos \beta_j)^2}}$$

$$r_j = \frac{-x_j \sin \beta_j + y_j \cos \beta_j}{1}$$

por lo que finalmente la distancia r_j vale

$$r_j = x_j \operatorname{sen} \beta_j - y_j \operatorname{cos} \beta_j \quad (2.12)$$

2.3 MATRIZ DE RIGIDECES DE EDIFICIOS DE MÁS DE UN ENTREPISO

Cuando se analizan edificios con más de un entrepiso, no es posible, en general, trabajar con las rigideces de entrepiso; así mismo cuando existen muros rigidizantes no es posible usar los procedimientos tradicionales, basados en el concepto de rigidez de entrepiso, que no se pueden definir con precisión en este caso. En ambos casos es necesario trabajar con la matriz de rigideces para desplazamientos $[K_y]$.

Sea el sistema de piso mostrado en la figura 2.4, correspondiente a una planta cualquiera del nivel i -ésimo de un edificio, referido a un sistema coordenado global único para la estructura en cuestión (X, Y, Z) .

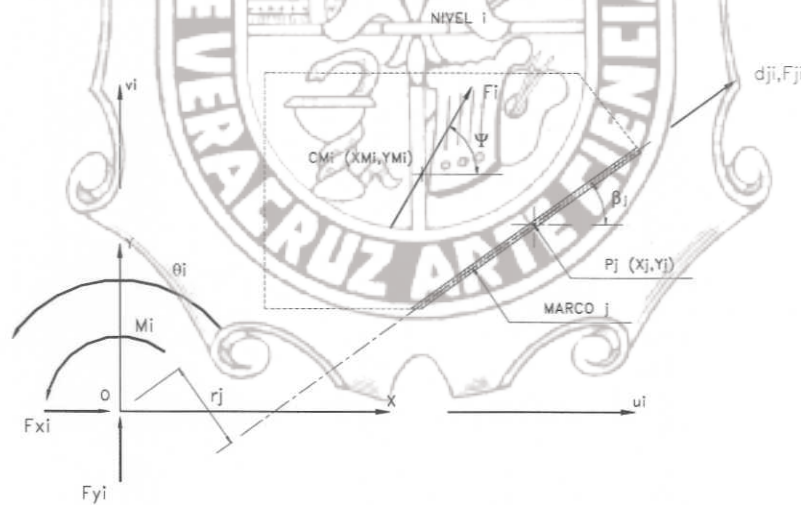


figura 2.4

El edificio se encuentra formado por sistemas planos (marcos y/o muros), como el j , cuyas posiciones se definen por los puntos $P_j (x_j, y_j)$ y los ángulos β_j .

En primer lugar calcularemos la matriz de rigideces lateral de cada sistema plano j . Para esto se asigna al sistema como grados de libertad un desplazamiento vertical y un giro en el plano

del sistema por cada nudo, y un desplazamiento horizontal por cada nivel. Con el procedimiento de condensación estática se expresa esta matriz en términos de solamente los grados de libertad laterales y se obtiene así la matriz de rigideces lateral del sistema plano j denominada aquí $[K_j]$.

Ahora bien, a cada nivel i del sistema j se le puede asociar un desplazamiento (en el plano del sistema) en función de los tres grados de libertad del nivel

$$d_{ji} = u_i \cos \beta_j + v_i \operatorname{sen} \beta_j + \theta_i r_j$$

donde, por geometría

$$r_j = x_j \operatorname{sen} \beta_j - y_j \cos \beta_j$$

(nótese que r_j posee signo).

Empleando notación vectorial podemos establecer que para cada sistema plano j

$$\{d_j\} = \{u\} \cos \beta_j + \{v\} \operatorname{sen} \beta_j + \{\theta\} r_j \quad (2.13)$$

ahora bien, de acuerdo al método de las rigideces

$$\{F_j\} = [K_j] \{d_j\} \quad (2.14)$$

de donde, sustituyendo 2.13 en 2.14 resulta

$$\{F_j\} = [K_j] [\{u\} \cos \beta_j + \{v\} \operatorname{sen} \beta_j + \{\theta\} r_j] \quad (2.15)$$

En las dos últimas igualdades el vector $\{F_j\}$ representa el conjunto de fuerzas laterales que es necesario aplicar al sistema plano j , para conseguir un vector desplazamiento $\{d_j\}$.

Por otro lado, sea F_i la fuerza sísmica (obtenida por algún método estático o dinámico que se supone conocido) correspondiente al nivel i -ésimo y que actúa en el centro de masa CM_i . Si la dirección del sismo esta definida por el ángulo Ψ , descomponiendo la fuerza sísmica en direcciones ortogonales tenemos

$$F_{xi} = F_i \cos\Psi \tag{2.16a}$$

$$F_{yi} = F_i \sen\Psi$$

o bien

$$\{ F_x \} = \{ F_i \} \cos\Psi \tag{2.16b}$$

$$\{ F_y \} = \{ F_i \} \sen\Psi$$

Si trasladamos el vector de fuerzas sísmicas al origen del sistema coordenado, se llega, de acuerdo a la figura 3.1, a la siguiente expresión

$$M_j = x_{Mi} F_{yi} + y_{Mi} F_{xi} \tag{2.17}$$

ahora bien, aplicando el principio de equilibrio

$$\{ F_x \} = \sum_j \{ F_j \} \cos\beta_j$$

$$\{ F_y \} = \sum_j \{ F_j \} \sen\beta_j \tag{2.18}$$

$$\{ M \} = \sum_j \{ F_j \} r_j$$

si sustituimos la ecuación 2.15 en las ecuaciones 2.18, resulta

$$\{ F_x \} = \left[\sum_j [K_j] \cos^2\beta_j \right] \{ u \} + \left[\sum_j [K_j] \cos\beta_j \sen\beta_j \right] \{ v \} + \left[\sum_j [K_j] r_j \cos\beta_j \right] \{ \theta \}$$

$$\{ F_y \} = \left[\sum_j [K_j] \cos\beta_j \sen\beta_j \right] \{ u \} + \left[\sum_j [K_j] \sen^2\beta_j \right] \{ v \} + \left[\sum_j [K_j] r_j \sen\beta_j \right] \{ \theta \} \tag{2.19}$$

$$\{ M \} = \left[\sum_j [K_j] r_j \cos\beta_j \right] \{ u \} + \left[\sum_j [K_j] r_j \sen\beta_j \right] \{ v \} + \left[\sum_j [K_j] r_j^2 \right] \{ \theta \}$$

llamando

$$[K_{xx}] = \left[\sum_j [K_j] \cos^2 \beta_j \right]$$

$$[K_{xy}] = \left[\sum_j [K_j] \operatorname{sen} \beta_j \cos \beta_j \right]$$

$$[K_{x\theta}] = \left[\sum_j [K_j] r_j \cos \beta_j \right]$$

$$[K_{yx}] = \left[\sum_j [K_j] \cos \beta_j \operatorname{sen} \beta_j \right]$$

$$[K_{yy}] = \left[\sum_j [K_j] \operatorname{sen}^2 \beta_j \right]$$

$$[K_{y\theta}] = \left[\sum_j [K_j] r_j \operatorname{sen} \beta_j \right]$$

$$[K_{\theta x}] = \left[\sum_j [K_j] r_j \cos \beta_j \right]$$

$$[K_{\theta y}] = \left[\sum_j [K_j] r_j \operatorname{sen} \beta_j \right]$$

$$[K_{\theta\theta}] = \left[\sum_j [K_j] r_j^2 \right]$$

(2.20)

resulta

$$\begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{x\theta}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{y\theta}] \\ [K_{\theta x}] & [K_{\theta y}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

(2.21)

o bien

$$\{F\} = [K] \{D\}$$

(2.22)

donde $[K]$ es la matriz de rigideces del edificio, simétrica y de tamaño $3n_N \times 3n_N$, donde n_N es el número de niveles. El planteamiento hasta aquí expuesto es de carácter general en el análisis tridimensional de estructuras.

Capítulo 3

Distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio

El movimiento sísmico del suelo se transmite a los edificios que se apoyan sobre éste. La base del edificio tiende a seguir el movimiento del suelo, mientras que, por inercia, la masa del edificio se opone a ser desplazada dinámicamente y a seguir el movimiento de su base. Se generan entonces las fuerzas de inercia que ponen en peligro la seguridad de la estructura. Se trata de un problema dinámico y que, por la irregularidad del movimiento del suelo y por la complejidad de los sistemas constituidos por las edificaciones, requiere de grandes simplificaciones para ser objeto de análisis como parte del diseño estructural de las construcciones.

En vista de la naturaleza dinámica de los temblores, el análisis sísmico de edificios debiera siempre llevarse a cabo con métodos dinámicos, esto es, resolviendo explícitamente las ecuaciones de movimiento. Los métodos estáticos suministran resultados basados en el modo fundamental de vibración del edificio, incluyendo de manera usualmente conservadora el efecto de modos superiores para edificios regulares. Su uso se limita a construcciones de altura moderada porque para estructuras de periodos largos, los modos superiores pueden tener mayor importancia que la proporcionada por el método estático.

Con apego a las NTDS, cuando en el análisis dinámico se opta por la simplificación consistente en desprestigiar acoplamientos entre los desplazamientos horizontales en direcciones ortogonales y entre estos y las rotaciones con respecto a un eje vertical, se tiene que seguir el procedimiento de análisis modal espectral especificado en la sección 9.1 independiente para cada dirección del sismo, desde el cálculo de periodos y modos de vibración, hasta la determinación de las fuerzas cortantes de entrepiso. La siguiente etapa consistirá en distribuir tales cortantes entre los elementos resistentes del edificio de la misma manera que en el análisis estático, siguiendo el procedimiento presentado en la sección 8 en lo referente a torsiones de entrepiso u con otro similar.

En rigor, este enfoque es híbrido: las cortantes sísmicas se determinan dinámicamente, pero los efectos de torsión se incorporan por métodos estáticos.

Independientemente de la forma de determinar las cortantes sísmicas presentamos a continuación dos métodos para efectuar la distribución de estas siguiendo las pautas anteriores. El primero hace uso del concepto de rigidez de entrepiso; tiene la ventaja de que se puede incorporar fácilmente en una hoja de cálculo electrónica y hasta puede aplicarse manualmente con una calculadora de escritorio. En el segundo método, que emplea operaciones matriciales, es innecesaria la definición de rigideces de entrepiso, pero requiere el empleo de computadoras. En ambos métodos los elementos resistentes pueden estar orientados en cualquier dirección.

3.1 MÉTODO BASADO EN RIGIDECES DE ENTREPISO

3.1.1 Edificios de un entrepiso

Con fines de introducción se considerarán edificios de un entrepiso, estos casos, presentan la ventaja de que se puede trabajar en forma exacta con la rigidez de entrepiso de los marcos, definida como el cociente del cortante de entrepiso entre el desplazamiento producido en el marco al aplicar ese cortante.

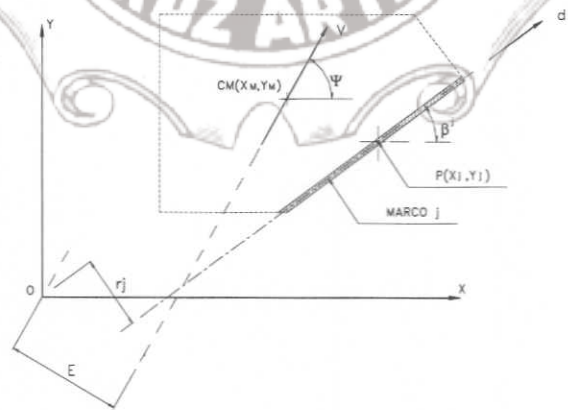


figura 3.1 Planta de un edificio.

Considérese el edificio de un entrepiso mostrado en la figura 3.1. El punto CM es el centro de masa del nivel; en él se considera aplicada la fuerza sísmica del nivel, que en este caso es también la fuerza cortante V del entrepiso; se supone que el sismo tiene una dirección definida por

el ángulo Ψ , el edificio se encuentra formado por marcos, como el j , que soportan la losa del edificio.

Como se vio en la sección 2.2, al aplicar las ecuaciones de equilibrio al edificio, se tienen las ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\{V\} = [K]\{D\} \quad (3.2)$$

Para la solución matemática de la distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio, se procederá a la diagonalización de la matriz de rigideces $[K]$, haciéndolo en dos etapas; primero se efectuará una rotación de ejes coordenados; a los nuevos ejes se les llamará ejes principales de rigidez; y segundo, se efectuará una traslación de los ejes principales de rigidez a un punto CT que será el centro de torsión; diagonalizada la matriz se determinará la expresión que define la magnitud de la fuerza cortante que le corresponde a cada elemento resistente del entrepiso.

3.1.2 Rotación de Ejes Coordenados

El interés de esta primera etapa es el de hallar la inclinación de los ejes coordenados X , Y para los cuales las rigideces son principales (máximas y mínimas) en el entrepiso, este problema es similar al de obtener eigenvalores (valores característicos) y eigenvectores (vectores característicos) de matrices simétricas, de manera que para diagonalizar a la matriz $[K]$ se hace la siguiente aclaración: si se busca un giro de los ejes de referencia X , Y del entrepiso, las rigideces angulares $K_{x\theta}$, $K_{y\theta}$ serán las mismas antes y después del giro por mantenerse el mismo punto de referencia. Por lo tanto la matriz por resolver $[K]$, la podemos considerar simplificada en la forma siguiente

$$[k] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix}$$

Introduciéndonos al problema de obtener eigenvalores y eigenvectores de matrices tenemos que la ecuación

$$[k]\{D\}=\{V\} \quad (3.3)$$

puede imaginarse como una transformación lineal que transforma un vector dado $\{D\}$ en un vector nuevo $\{V\}$. Los vectores que se transforman en múltiplos de si mismos tienen un papel importante en muchas aplicaciones, por ejemplo, se encuentra este problema al hallar los ejes principales de los esfuerzos en un cuerpo elástico y al encontrar los modos de vibración libre en un sistema conservativo con un numero finito de grados de libertad. Para encontrar tales vectores, hacemos que

$$\{V\}=k'\{D\} \quad (3.4)$$

donde k' es un escalar por determinar, el cual podemos determinarlo al encontrar las soluciones de la ecuación que resulta de sustituir la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3), y que es

$$[k]\{D\}=k'\{D\} \quad (3.5)$$

o bien

$$\{[k]-k'[I]\}\{D\}=0 \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) tiene soluciones si y solo si se elige k' de modo que

$$DET \{[k]-k'[I]\}=0 \quad (3.7)$$

A los valores de k' que satisfacen la ecuación (3.7) se conocen como eigenvalores (o rigideces principales) de la matriz $[K]$ y a las soluciones de la ecuación (3.6) que se obtienen usando el valor de k' se llaman eigenvectores correspondientes a ese eigenvalor.

Para nuestro caso particular, se trata de encontrar los ejes principales, por lo que procedemos a determinar los eigenvalores k' .

Sustituyendo a $[k]$ en la ecuación (3.6)

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} - k' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

obteniendo

$$\begin{bmatrix} (K_{xx}-k') & K_{xy} \\ K_{yx} & (K_{yy}-k') \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6a)$$

Aplicando la ecuación (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} \text{DET} \begin{bmatrix} (K_{xx}-k') & K_{xy} \\ K_{yx} & (K_{yy}-k') \end{bmatrix} &= 0 \\ (K_{xx}-k')(K_{yy}-k') - K_{xy}K_{yx} &= 0 \\ K_{xx}K_{yy} - K_{xx}k' - K_{yy}k' + k'^2 - K_{xy}K_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

ordenando términos y tomando en cuenta que $K_{xy} = K_{yx}$ se llega a

$$k'^2 - (K_{xx} + K_{yy})k' + (K_{xx}K_{yy} - K_{xy}^2) = 0$$

que es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado y simplificando términos obtenemos los valores siguientes

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{K_{xx} + K_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{yy}}{2}\right)^2 + K_{xy}^2} \\ k'_2 &= \frac{K_{xx} + K_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{yy}}{2}\right)^2 + K_{xy}^2} \end{aligned}$$

como podemos observar el radicando es siempre positivo por lo que las raíces serán reales y distintas obteniendo

$$K_{xx'} = \frac{K_{xx} + K_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{yy}}{2}\right)^2 + K_{xy}^2} \quad (3.8)$$

$$K_{yy'} = \frac{K_{xx} + K_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K_{xx} - K_{yy}}{2}\right)^2 + K_{xy}^2}$$

Para hallar el ángulo en el cual se encuentran las rigideces principales se tiene el equivalente a determinar los eigenvectores de cada eigenvalor ($K_{xx'}$ y $K_{yy'}$) y esto se logra sustituyendo cada uno de los eigenvalores en la ecuación (3.6a), sustituyendo en primer lugar a $K_{xx'}$ se tiene

$$\begin{bmatrix} (K_{xx} - K_{xx'}) & K_{xy} \\ K_{yx} & (K_{yy} - K_{xx'}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ecuaciones de las cuales resulta conveniente normalizar el eigenvector $\{D\}$ (es decir, especificar una constante multiplicativa), requiriendo en forma alternada de hacer que una de las dos componentes sea igual a uno.

Es claro que al realizar lo anterior, es decir hacer unitario por ejemplo a D_x y hallar el valor de D_y o viceversa, estaremos determinando una relación de desplazamientos lo cual significa encontrar un ángulo en el cual se encontrara $K_{xx'}$.

Haciendo $D_x = 1$ se llega a los siguientes eigenvectores

$$\{D\}_1 = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{xx'} - K_{xx}}{K_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\{D\}_2 = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{xx'} - K_{yy}} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

los cuales arrojan los mismos valores.

Sustituyendo el valor de $K_{yy'}$ en la ecuación (2.10) se llega a las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} (K_{xx} - K_{yy'}) & K_{xy} \\ K_{yx} & (K_{yy} - K_{yy'}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

normalizando el eigenvector $\{D\}$ análogamente al valor de $K_{xx'}$ se llega a los eigenvectores

$$\{D\}_1 = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yy'} - K_{xx}}{K_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\{D\}_2 = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{yy'} - K_{yy}} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

que también arrojan los mismos valores.

De lo anterior surge la interrogante de saber si los planos en los que se encuentran las rigideces principales máximas y mínimas ($K_{xx'}$ y $K_{yy'}$) son perpendiculares o no, lo anterior se puede conocer haciendo el producto punto de dos vectores, que en este caso serían el producto punto del vector (3.8) o (3.9) por el vector (3.10) o (3.11).

Tomando las expresiones (3.9) y (3.10) procederemos a tal demostración debiéndose cumplir que

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{xx'} - K_{yy}} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yy'} - K_{xx}}{K_{xy}} \end{Bmatrix} = 0$$

haciendo el producto se tiene

$$(1)(1) + \left(\frac{K_{yx}}{K_{xx'} - K_{yy}} \right) \left(\frac{K_{yy'} - K_{xx}}{K_{xy}} \right) = 0$$

$$(K_{xx'} - K_{yy'})K_{xy} + K_{yx}(K_{yy'} - K_{xx}) = 0$$

$$(K_{xx'} + K_{yy'} - K_{xx} - K_{yy})K_{xy} = 0$$

pero $K_{xx'} + K_{yy'} = K_{xx} + K_{yy}$

$$\therefore 0 = 0$$

Comprobándose así que los vectores (expresiones 3.9 y 3.10) son perpendiculares, obteniéndose la siguiente conclusión: **Para hallar la inclinación de los ejes principales de rigidez X', Y' será suficiente localizar la inclinación de uno de ellos, respecto al eje X.**

Definiendo entonces el ángulo γ como el ángulo en el que se encuentra el eje X' de la relación de desplazamientos se tiene que

$$\tan \gamma = \frac{K_{yx} / (K_{xx'} - K_{yy'})}{1} = \frac{K_{yx}}{K_{xx'} - K_{yy'}}$$

de donde

$$\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{K_{yx}}{K_{xx'} - K_{yy'}} \right]$$

además si se tiene que $K_{yx} = K_{xy}$ por convención resulta la expresión final

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{K_{xy}}{K_{xx'} - K_{yy'}} \right) \quad (3.13)$$

En la figura 3.2, se ilustra gráficamente la localización de los ejes principales de rigidez.



figura 3.2 Ejes principales de rigidez X', Y'.

Definida la localización de los ejes principales de esfuerzo en un cuerpo o estructura elástica, es bien conocido (de cualquier bibliografía de mecánica de materiales) que en dichos planos los esfuerzos cortantes ($\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$) se anulan, por lo que para nuestro caso en que se han localizado los ejes principales de rigidez para el edificio en estudio la matriz de rigideces $[k]$ queda de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}$$

Recordando que las rigideces angulares $K_{x\theta}$, $K_{\theta x}$, $K_{y\theta}$ y $K_{\theta y}$, se mantienen iguales antes y después del giro γ de la planta por mantenerse el mismo punto de referencia, esto indica que a la matriz anterior falta agregarle las rigideces angulares mencionadas, resultando finalmente de esta primera etapa

$$\begin{bmatrix} K_{xx}' & 0 & K_{x\theta} \\ 0 & K_{yy}' & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

3.1.3. Traslación de ejes principales de rigidez

El objetivo de esta segunda etapa es la de trasladar el origen de coordenadas X', Y' al centro de torsión de la planta en estudio, figura 3.3.

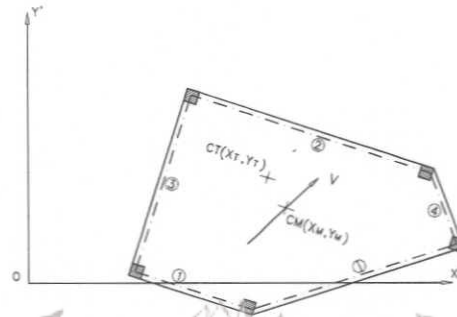


figura 3.3

El centro de torsión tiene propiedades interesantes, como que es el punto en que no se producen rotaciones al aplicársele una fuerza horizontal; si esta es paralela a una de las direcciones principales de rigidez, el desplazamiento será paralelo a la fuerza, por lo tanto para determinar el centro de torsión analizaremos al entrepiso en estudio (en forma separada) sometido a las fuerzas componentes V_x y V_y del cortante sísmico V .

Aplicando la fuerza V_x , figura 3.4, se genera un desplazamiento D_x' , el cual se proyecta al marco j , cuyo valor es

$$D'_x \cos \beta'_j$$

desplazamiento que multiplicado por la rigidez del marco j nos da la fuerza que absorbe dicho marco producida únicamente por el efecto de la componente V_x , si esta fuerza la descomponemos en sus componentes obtenemos

$$F_{xj} = K_j (\cos \beta'_j)^2 D_x$$

$$F_{yj} = K_j \cos \beta'_j \sin \beta'_j D_x$$

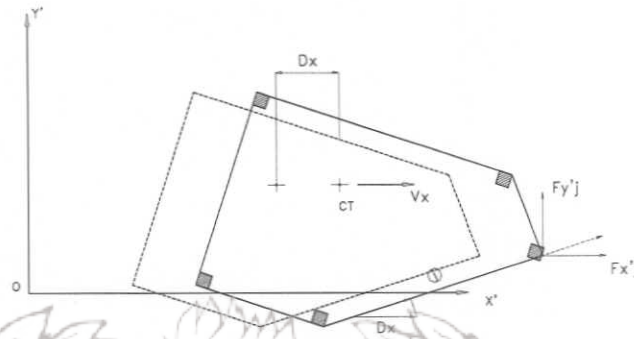


figura 3.4

de las expresiones anteriores notamos que

$$K_{jx'} = K_j (\cos \beta'_j)^2$$

$$K_{jy'} = K_j \cos \beta'_j \sin \beta'_j$$

son las rigideces proyectadas en los ejes X' , Y' . Utilizando estas rigideces podemos plantear el cálculo del centro de torsión, de la fig. 3.5 podemos determinar las ecuaciones de equilibrio para hallar la resultante de rigideces (en este caso la rigidez principal $K_{xx'}$) en la dirección X' , haciendo suma de momentos respecto al origen de coordenadas, se obtiene

$$K_{xx'} y'_T = \sum K_{jx'} y'_j - \sum K_{jy'} x'_j$$

despejando y'_T ;

$$y'_T = \frac{\sum K_{jx'} y'_j - \sum K_{jy'} x'_j}{K_{xx'}}$$

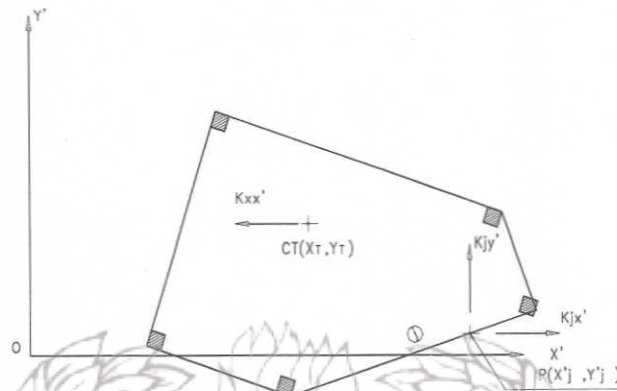


figura 3.5

Análogamente al procedimiento para el cálculo de y'_T , se llega a la ecuación

$$x'_T = \frac{\sum K_{jy'} x'_j - \sum K_{jx'} y'_j}{K_{yy'}}$$

Sustituyendo los valores de las rigideces proyectadas, se obtienen finalmente las ecuaciones que determinan al centro de torsión

$$x'_T = \frac{\sum x'_j K_j (\text{sen } \beta'_j)^2 - \sum y'_j K_j \text{cos } \beta'_j \text{sen } \beta'_j}{\sum K_j (\text{sen } \beta'_j)^2} \quad (3.14)$$

$$y'_T = \frac{\sum y'_j K_j (\text{cos } \beta'_j)^2 - \sum x'_j K_j \text{cos } \beta'_j \text{sen } \beta'_j}{\sum K_j (\text{cos } \beta'_j)^2} \quad (3.15)$$

Si los marcos son paralelos a dos direcciones ortogonales las fórmulas presentadas coinciden con las que se han usado desde hace casi 40 años por los ingenieros estructuristas.

Localizado el centro de torsión de la planta en estudio, en la figura 3.6 se muestra esquemáticamente a los ejes principales de rigidez trasladados al mismo, obteniéndose así el sistema general en el que al actuar el sismo ya sea en X' o Y' el desplazamiento será paralelo a la dirección que actúe, anulándose así el giro de la planta y por consecuencia, las rigideces $K_{x\theta}$, $K_{\theta x}$, $K_{y\theta}$, $K_{\theta y}$, son nulas concluyendo así la diagonalización de la matriz de rigidez del entrespaño, resultando finalmente de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

las ecuaciones 3.1 se transforman de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{bmatrix}$$

es decir

$$V_x = K_{xx} \cdot D_x$$

$$V_y = K_{yy} \cdot D_y$$

$$M = K_{\theta\theta} \cdot \theta$$

o bien

$$D_x = V_x / K_{xx}$$

$$D_y = V_y / K_{yy}$$

$$\theta = M / K_{\theta\theta}$$

(3.16)

3.1.4. Distribución de fuerzas sísmicas

Nuevamente considérese el edificio de un entrepiso mostrado en la figura 3.6, y además considérese que los ejes principales de rigidez son utilizados como ejes coordenados.

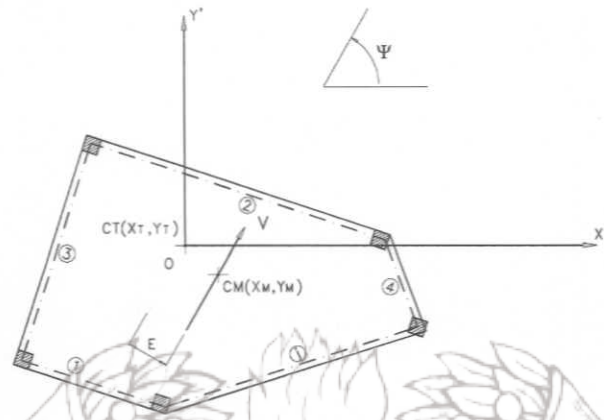


figura 3.6

Bajo la acción de la fuerza sísmica, la losa del edificio tendrá un desplazamiento de cuerpo rígido cuyas componentes serán D_x , D_y y θ . Análogamente al planteamiento de la matriz de rigideces del entrepiso, se observa que, proyectando las componentes del desplazamiento general del entrepiso en cada marco, podemos conocer su desplazamiento que afectado de su rigidez nos da su cortante sísmico, generalizando las proyecciones sobre el marco j , sabemos que el desplazamiento lateral del mismo es la suma de las proyecciones de D_x , D_y y θ , de manera que

$$d_j = D_x \cos \beta_j + D_y \operatorname{sen} \beta_j + \theta \cdot r_j$$

donde

$$r_j = \operatorname{sen} \beta_j x_j - \cos \beta_j y_j$$

Pero ahora los desplazamientos D_x , D_y y el giro θ se pueden conocer y tienen los siguientes valores respectivamente (ecuación 3.15)

$$D_x = \frac{V_x}{K_{xx}} = \frac{V \cos \Psi}{K_{xx}}$$

$$D_y = \frac{V_y}{K_{yy}} = \frac{V \operatorname{sen} \Psi}{K_{yy}}$$

$$\theta = \frac{M}{K_{\theta\theta}} = \frac{V \cdot e}{K_{\theta\theta}}$$

Sustituyendo estos valores en el desplazamiento general del marco j resulta

$$d_j = \frac{V \cos \Psi}{K_{xx}} \cos \beta_j + \frac{V \sin \Psi}{K_{yy}} \sin \beta_j + \frac{V \cdot e}{K_{\theta\theta}} (\sin \beta_j x_j - \cos \beta_j y_j)$$

Desplazamiento que multiplicado por la rigidez del marco nos da el cortante sísmico

$$V_j = K_j d_j$$

Sustituyendo el valor de d_j , factorizando y agrupando términos semejantes, tenemos que la fuerza cortante del marco j estará dada por la expresión

$$V_j = K_j V \left[\left(\frac{\cos \Psi}{K_{xx}} - \frac{y_j e}{K_{\theta\theta}} \right) \cos \beta_j + \left(\frac{\sin \Psi}{K_{yy}} + \frac{x_j e}{K_{\theta\theta}} \right) \sin \beta_j \right] \quad (3.17)$$

donde e es la distancia del centro de torsión a la línea de acción de la fuerza cortante y se puede conocer análogamente al término r_j ; (ver figura 3.1). Por lo tanto la excentricidad estática será

$$e = x_M \sin \Psi - y_M \cos \Psi$$

donde x_M , y_M representan las coordenadas del centro de masas. Esta excentricidad se puede incrementar para fines de diseño de acuerdo con lo que se indica en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1993 (RCDF 1993).

$$e_1 = 1.5 e + 0.1 b$$

$$e_2 = e - 0.1 b$$

3.1.5 Edificios de más de un entrepiso

Cuando se analizan edificios con más de un entrepiso, no es posible, en general, trabajar con las rigideces de entrepiso; es necesario trabajar con la matriz de rigidez para desplazamientos.

El análisis empleado para edificios de un entrepiso puede ser aplicado a edificios de más de un entrepiso, a menos que los marcos que lo forman tengan la siguiente característica; el cociente de las rigideces de dos entrepisos para dos marcos cualesquiera, sean los mismos para

todos sus entrepisos; sea α el valor de dicho cociente, se considera a esta relación de rigideces como Hipótesis de las Alfas (Damy 1977).

$$\frac{{}_i R_j}{{}_i R_k} = \alpha$$

Lo anterior se cumple si los marcos del edificio son similares, o sea que tienen estructuraciones muy parecidas. Si un edificio sin muros de cortante ha sido estructurado en forma convencional, lo más seguro es que cumpla aproximadamente con la Hipótesis de las Alfas; también, si un edificio está estructurado exclusivamente a base de muros de cortante, cumplirá aproximadamente con la hipótesis citada (Bazan 1977).

Las ecuaciones de equilibrio de un edificio con más de un entrepiso, de acuerdo con la sección 2.3 son las siguientes

$$\begin{Bmatrix} \{V\} \cos \Psi \\ \{V\} \sin \Psi \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{x\theta}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{y\theta}] \\ [K_{\theta x}] & [K_{\theta y}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Si se cumple con el cociente igual en todos los entrepisos para dos marcos cualesquiera del edificio, entonces se pueden obtener ejes principales y centros de torsión en forma análoga a como se obtienen en edificios de un entrepiso, con la particularidad de que los ejes principales y los centros de torsión son los mismos para todos los entrepisos; lo anterior no se cumple en la práctica ya que cualquier edificio solo cumplirá en forma aproximada con la Hipótesis de las Alfas, de ahí que se obtengan ejes principales y centros de torsión diferentes para cada entrepiso, con la salvedad de que la posición del cortante total en cada entrepiso se determinará obteniendo la resultante de las fuerzas sísmicas que obran arriba del entrepiso considerado; por esta razón los llamados centros de cortante de entrepiso sustituyen al centro de masas que se utilizó en edificios de un entrepiso.

Si el sistema coordinado es principal y tiene por origen el centro de torsión (único, si el edificio cumple exactamente con la Hipótesis de las Alfas), la ecuación 3.18 se simplifica y se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \{V\} \cos \Psi \\ \{V\} \sin \Psi \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

De donde finalmente se obtienen las ecuaciones

$${}_i V \cos \Psi = {}_i D_x \sum {}_i R_j (\cos \beta_j)^2$$

$${}_i V \sin \Psi = {}_i D_y \sum {}_i R_j (\sin \beta_j)^2$$

$${}_i V e = \theta \sum {}_i R_j r_j^2$$

o bien

$${}_i D_x = \frac{{}_i V \cos \Psi}{\sum {}_i R_j (\cos \beta_j)^2}$$

$${}_i D_y = \frac{{}_i V \sin \Psi}{\sum {}_i R_j (\sin \beta_j)^2}$$

$$\theta = \frac{{}_i V \cdot e}{\sum {}_i R_j r_j^2}$$

que son las mismas expresiones (ecuaciones 3.16) que se utilizan en los edificios de un entrepiso.

Por la demostración anterior, entonces se puede trabajar con las rigideces de entrepiso de cada marco obtenidas como el cociente del cortante total entre el desplazamiento relativo producido por dicho cortante; se puede analizar cada entrepiso en forma independiente, utilizando las fórmulas y los conceptos que se desarrollaron para edificios de un entrepiso, con la salvedad de que la posición del cortante total en cada entrepiso se determinará obteniendo la resultante de las fuerzas sísmicas que obran arriba del entrepiso considerado; por esta razón los centros de cortante de entrepiso sustituyen al centro de masa que se utilizó en edificios de un entrepiso. Es evidente que este procedimiento evita calcular las matrices $[K_j]$ para cada marco.

3.1.6 Ejemplo 1

Se trata de un edificio de 3 niveles para oficinas mostrado en la figura 3.7, compuesto de marcos de concreto reforzado como elementos sismorresistentes.

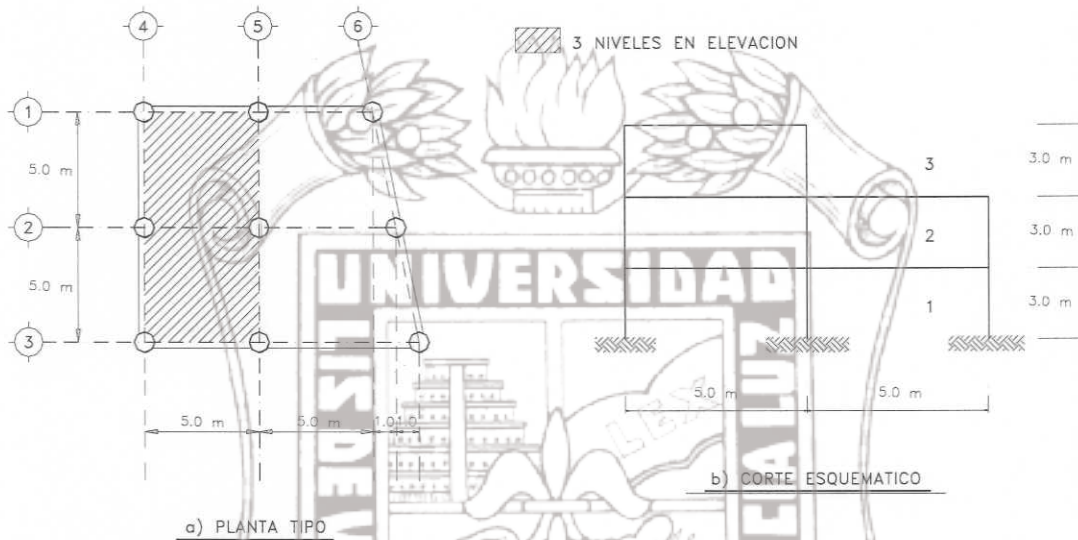


figura 3.7

Las rigideces de entrepiso se consignan en la tabla 3.1.

MARCO	RIGIDEZ DE ENTREPISO en ton/m		
	1	2	3
1	3370.05	2079.24	1222.29
2	3260.89	1978.10	1185.37
3	3174.57	1899.29	1154.61
4	3380.02	2114.59	1573.44
5	3380.02	2114.59	1573.44
6	3382.61	2184.15	0.00

Tabla 3.1

A continuación checaremos el cumplimiento de la hipótesis de las Alfas, la cual establece que la relación de rigideces de dos entrepisos para dos marcos cualesquiera es la relación α y deberá ser igual para todos sus entrepisos. Tomando arbitrariamente los marcos ejes 1 y 3, las relaciones son las siguientes

$$\frac{{}_1R_1}{{}_1R_3} = \frac{3370}{3175} = 1.06$$

$$\frac{{}_2R_1}{{}_2R_3} = \frac{2079}{1899} = 1.09$$

$$\frac{{}_3R_1}{{}_3R_3} = \frac{1222}{1155} = 1.06$$

Se puede apreciar que el valor de los cocientes no es precisamente igual en todos los entresijos, aunque si se aprecia tendencia a serlo, debido a esto la hipótesis de las Alfas se cumple en forma aproximada, de ahí que se tengan que determinar ejes principales de rigidez y centros de torsión para cada entresijo, hecho que procede en la solución del ejemplo en estudio.

En la figura 3.8 se muestra la planta del primer nivel en la cual se indica el sentido de orientación de los ángulos de inclinación, así como la ubicación de cada marco por coordenadas (Xj , Yj) y su respectiva rigidez, datos que se consignan en la tabla 3.2.

MARCO	RIGIDEZ kj (ton/m)	ANGULO Bj (grados)	PUNTOS Pj	COORDENADAS	
				xj (m)	yj (m)
1	3,370	0	1	0.0	10.0
2	3,261	0	2	0.0	5.0
3	3,175	0	3	0.0	0.0
4	3,380	90	4	0.0	0.0
5	3,380	90	5	5.0	0.0
6	3,383	101.31	6	12.0	0.0
CENTRO DE CORTANTE CV (4.58	,	4.90)

Tabla 3.2

Calculo de Cortantes Sísmicos

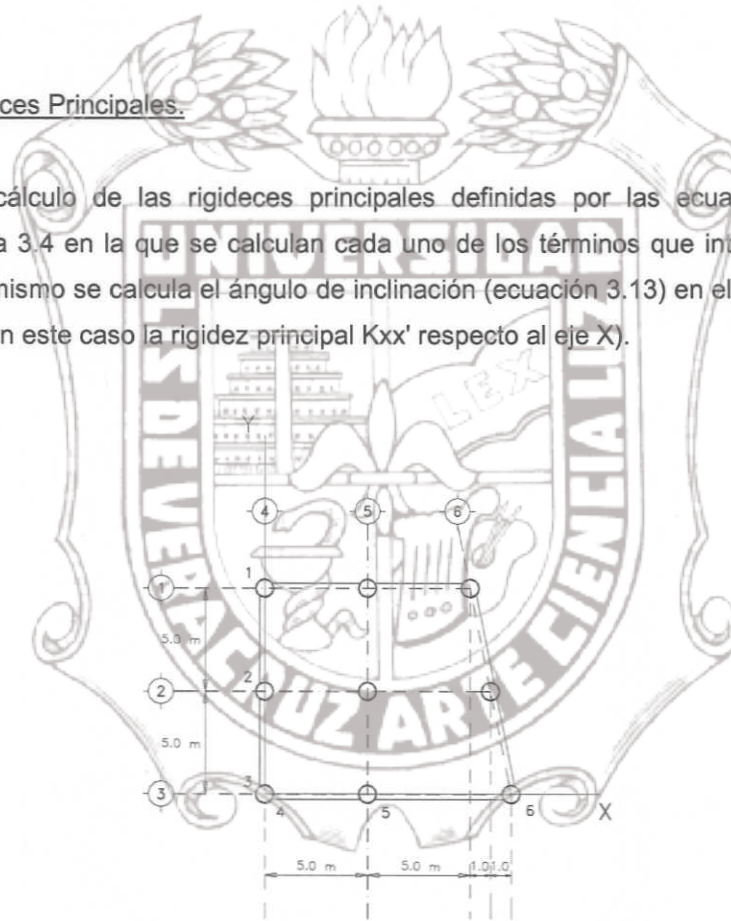
La estructura pertenece al grupo B según el artículo 174 del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y se encuentra desplantada en la zona III por lo que le corresponde un coeficiente sísmico $c = 0.40$. El calculo de dichas fuerzas se desarrolla en la tabla 3.3, misma que contiene la posición final de las fuerzas cortantes.

NIVEL	ENT	W _i (ton)	h _i (m)	W _i h _i (ton m)	F _i (ton)	V _i (ton)	x _M	F _i x _M	S F _i x _M	y _M	F _i y _M	S F _i y _M	POSICION DE V	
													X _v (m)	Y _v (m)
3		45.00	9.00	405.00	30.41		2.50	76.03	76.03	5.00	152.07	152.07		
	3					30.41							2.50	5.00
2		100.00	6.00	600.00	45.06		5.52	248.72	324.75	4.85	218.53	370.60		
	2					75.47							4.30	4.91
1		100.00	3.00	300.00	22.53		5.52	124.36	449.11	4.85	109.26	479.86		
	1					98.00							4.58	4.90
SUMA		245.00		1305.00										

Tabla 3.3

Cálculo de Rigideces Principales.

Para el cálculo de las rigideces principales definidas por las ecuaciones 3.8, se ha elaborado la tabla 3.4 en la que se calculan cada uno de los términos que intervienen en dichas ecuaciones. Así mismo se calcula el ángulo de inclinación (ecuación 3.13) en el que se encuentran estas rigideces (en este caso la rigidez principal K_{xx'} respecto al eje X).



PLANTA PRIMER NIVEL

figura 3.8

MARCO	RIGIDEZ k_j (ton/m)	ANGULO B_j (grados)	K_{xx} $k_j c_j^2$	K_{yy} $k_j s_j^2$	K_{xy} $k_j c_j s_j$	K_{00} $k_j d_j^2$
1	3,370	0.00	3,370.05	0.00	0.00	337,005.00
2	3,261	0.00	3,260.89	0.00	0.00	81,522.25
3	3,175	0.00	3,174.57	0.00	0.00	0.00
4	3,380	90.00	0.00	3,380.02	0.00	0.00
5	3,380	90.00	0.00	3,380.02	0.00	84,500.50
6	3,383	101.31	130.10	3,252.51	-650.51	468,361.17
SUMA			9,935.61	10,012.55	-650.51	971,388.92

$K_{xx} = 10,625.72$ ton/m
 $K_{yy} = 9,322.44$ ton/m
GAMMA = -46.69 grados

Tabla 3.4

Localizada la posición de los ejes principales de rigidez del entrepiso, este pasa a ser el sistema en el que se determina el centro de torsión, entre las observaciones que surgen para este cálculo es que los ángulos de inclinación (manteniendo el sentido de orientación inicial) han cambiado y lo mismo sucede con las coordenadas que ubican a cada marco, en la tabla 3.5 se encuentran estos nuevos datos

MARCO	RIGIDEZ k_j (ton/m)	PUNTO P_j	ANGULO B_j' (grados)	COORDENADAS	
				x_j' (m)	y_j' (m)
1	3,370	1	46.69	-7.277	6.859
2	3,261	2	46.69	-3.638	3.430
3	3,175	3	46.69	0.000	0.000
4	3,380	4	136.69	0.000	0.000
5	3,380	5	136.69	3.430	3.638
6	3,383	6	148.00	8.231	8.732
CENTRO DE CORTANTE X_V', Y_V'				-0.420	6.693

Tabla 3.5

Haciendo un paréntesis antes de determinar el centro de torsión, se calcularan de nueva cuenta cada uno de los términos que se tienen en la tabla 3.4 pero ahora respecto a los ejes principales de rigidez, los resultados de dichos cálculos se tienen en la tabla 3.6.

MARCO	RIGIDEZ k_j (ton/m)	ANGULO B_j' (grados)	K_{xx}' $k_j \cos^2 B_j'$	K_{yy}' $k_j \sin^2 B_j'$	K_{xy} $k_j c_j s_j$	K_{00} $k_j d_j^2$
1	3,370	46.69	1,585.55	1,784.50	1,682.09	337,005.00
2	3,261	46.69	1,534.20	1,726.69	1,627.60	81,522.25
3	3,175	46.69	1,493.58	1,680.99	1,584.52	0.00
4	3,380	136.69	1,789.78	1,590.24	-1,687.06	0.00
5	3,380	136.69	1,789.78	1,590.24	-1,687.06	84,500.50
6	3,383	148.00	2,432.84	949.77	-1,520.08	468,361.17
SUMA			10,625.72	9,322.44	0.00	971,388.92

Tabla 3.6

Comparando los resultados de las dos tablas mencionadas se tienen las siguientes observaciones:

Primero, los valores de las rigideces K_{xx}' y K_{yy}' de la tabla 3.6 corresponden a los mismos valores obtenidos con las ecuaciones 3.8.

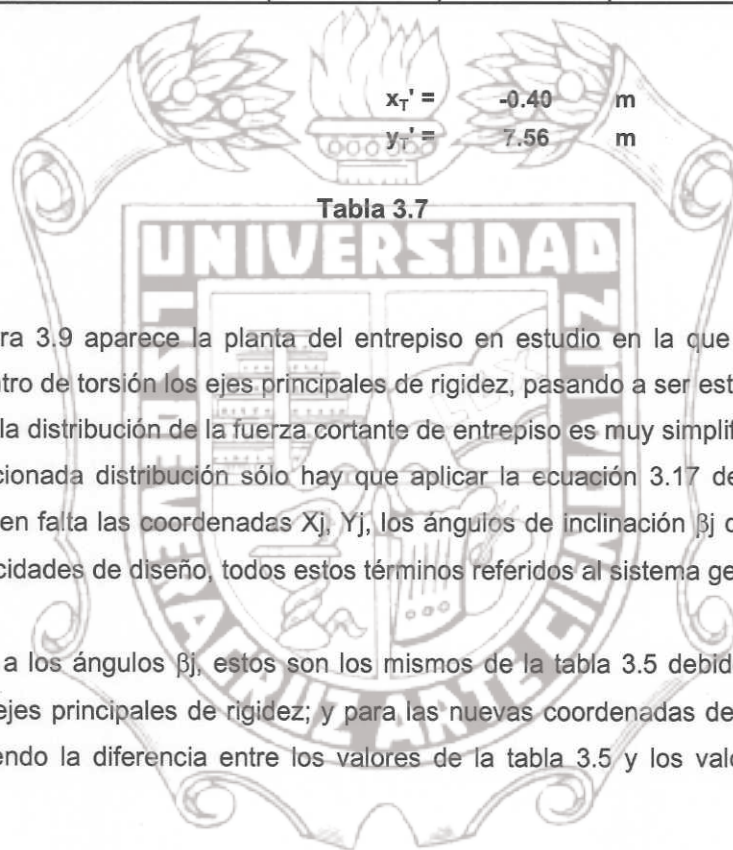
Segundo, el valor de la rigidez K_{xy} (tabla 3.6) tiene el valor de cero, con este resultado se viene a confirmar la primera etapa de la diagonalización de la matriz de rigidez de entrepiso y

Tercero, el valor de la rigidez K_{00} de la tabla 3.6 tiene el mismo valor que en la tabla 3.4 y con esto se comprueba el acierto de considerar a la matriz simplificada $[k']$ en la rotación de los ejes coordenados que se desarrolla en la sección 3.1.2 de este trabajo.

Cálculo del Centro de Torsión.

Continuando con el cálculo del centro de torsión, teniendo ya los datos necesarios, estos respecto a los ejes principales de rigidez, solo resta obtener cada uno de los términos de las ecuaciones 3.14 y 3.15, para lo cual se elabora la tabla 3.7.

MARCO	ANGULO B_j' (grados)	COORDENADAS		$x_j' k_j \text{sen}^2 B_j'$	$y_j' k_j \text{cos}^2 B_j'$	$y_j' k_j c_j s_j$	$x_j' k_j c_j s_j$
		x_j' (m)	y_j' (m)				
1	46.69	-7.277	6.859	-12,985.40	10,875.60	11,537.74	-12,240.18
2	46.69	-3.638	3.430	-6,282.39	5,261.66	5,582.01	-5,921.86
3	46.69	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
4	136.69	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
5	136.69	3.430	3.638	5,453.89	6,511.91	-6,138.20	-5,785.93
6	148.00	8.231	8.732	7,817.59	21,243.89	-13,273.55	-12,511.80
SUMA				-5,996.32	43,893.06	-2,292.01	-36,459.78



$$x_T' = -0.40 \text{ m}$$

$$y_T' = 7.56 \text{ m}$$

Tabla 3.7

En la figura 3.9 aparece la planta del entepiso en estudio en la que ya se encuentran trasladados al centro de torsión los ejes principales de rigidez, pasando a ser esta planta el sistema general en el que la distribución de la fuerza cortante de entepiso es muy simplificada, de tal forma que para la mencionada distribución sólo hay que aplicar la ecuación 3.17 de la que se puede observar solo hacen falta las coordenadas X_j , Y_j , los ángulos de inclinación β_j de cada marco, así como las excentricidades de diseño, todos estos términos referidos al sistema general.

Respecto a los ángulos β_j , estos son los mismos de la tabla 3.5 debido a que solo hubo traslación de los ejes principales de rigidez; y para las nuevas coordenadas de los marcos, estas se obtienen haciendo la diferencia entre los valores de la tabla 3.5 y los valores del centro de torsión.

$$x_j^T = x_j' - x_T$$

$$y_j^T = y_j' - y_T$$

En la tabla 3.8 se encuentran las nuevas coordenadas.

MARCO	RIGIDEZ k_j (ton/m)	COORDENADAS	
		x_j^T (m)	y_j^T (m)
1	3,370	-6.879	-0.703
2	3,261	-3.241	-4.133
3	3,175	0.397	-7.562
4	3,380	0.397	-7.562
5	3,380	3.827	-3.924
6	3,383	8.628	1.170
CENTRO CORTANTE X'_V, Y'_V		-0.022	-0.869

Tabla 3.8



PLANTA PRIMER NIVEL

figura 3.9

Haciendo un paréntesis antes de continuar con la distribución de fuerzas cortantes, se verificarán los valores de las rigideces angulares $K_x\theta$, $K_y\theta$ del entrepiso para cuando se tienen los ejes principales de rigidez trasladados al centro de torsión (figura 3.9), estos cálculos se desarrollan en la tabla 3.9.

MARCO	RIGIDEZ	ANGULO	COORDENADAS		$x_j^T \text{ sen } B_j'$	$y_j^T \text{ cos } B_j'$	d_j	k_{x_0}	k_{y_0}	k_{∞}
	k_j (ton/m)	B_j' (grados)	x_j^T (m)	y_j^T (m)				$k_j d_j \text{ cos } B_j'$	$k_j d_j \text{ sen } B_j'$	$k_j d_j^2$
1	3,370	46.69	-6.879	-0.703	-5.01	-0.48	-4.524	-10,457.28	-11,093.94	68,969.36
2	3,261	46.69	-3.241	-4.133	-2.36	-2.83	0.476	1,064.97	1,129.80	739.25
3	3,175	46.69	0.397	-7.562	0.29	-5.19	5.476	11,924.25	12,650.23	95,199.07
4	3,380	136.69	0.397	-7.562	0.27	5.50	-5.230	12,864.11	-12,125.86	92,461.53
5	3,380	136.69	3.827	-3.924	2.62	2.86	-0.230	566.27	-533.77	179.16
6	3,383	148.00	8.628	1.170	4.57	-0.99	5.564	-15,962.32	9,973.54	104,731.91
CENTRO CORT X'_V, Y'_V			-0.022	-0.869				0.00	0.00	362,280.29

Tabla 3.9

Se puede observar que los resultados finales de las rigideces mencionadas tienen los valores de cero respectivamente, de esta manera se confirma la nulificación de las rigideces $K_{x\theta}$ y $K_{y\theta}$ cuando los ejes principales se localizan en el centro de torsión, y la matriz de rigideces del entrepiso se diagonaliza simplificándose así la distribución de las fuerzas cortantes de entrepiso.

Distribución de Fuerza Cortante

Para obtener los cortantes correspondientes a cada marco solo basta aplicar la formula 3.17, de la cual ya se tienen todas sus variables (las coordenadas X_j, Y_j de la tabla 3.8, los ángulos de inclinación β_j de la tabla 3.5 y las rigideces principales K_{xx} y K_{yy} obtenidas con las ecuaciones 3.8) faltando concretar las variables Ψ , que es el ángulo de la dirección sísmica, y e que es la distancia del centro de torsión a la línea de acción del cortante sísmico definido por la dirección Ψ donde

$$e = \text{sen}\Psi x_c - \text{cos}\Psi y_c$$

en esta expresión x_c, y_c representan las coordenadas del centro de cortante. Esta excentricidad se puede incrementar para fines de diseño de acuerdo con lo que se indica en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.

$$e_1 = 1.5 e + 0.1 b$$

$$e_2 = e - 0.1 b$$

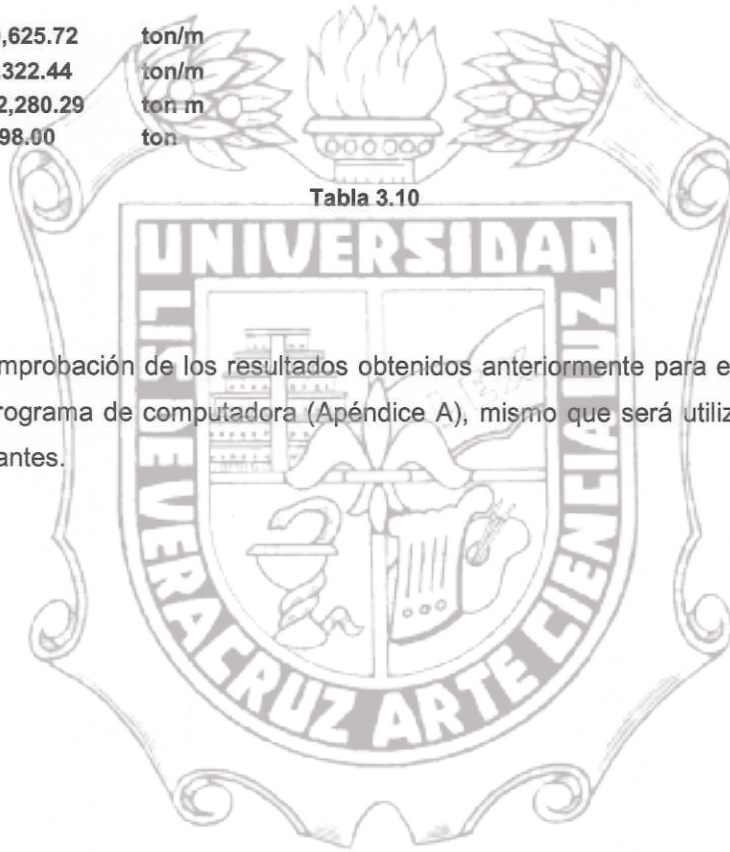
Finalmente la distribución del cortante sísmico de 98.00 toneladas del primer entrepiso se reduce a aplicar la ecuación 3.17, para lo cual se elabora la tabla 3.10 donde se consignan los cálculos

MARCO	RIGIDEZ k_j (ton/m)	ANGULO B_j' (grados)	SISMO EN X		SISMO EN Y			
			FI =	46.69	grados	FI =	136.69	grados
			e =	0.58	m	e =	-0.65	m
			$e_1 =$	1.87	$e_2 =$	-0.42	$e_1 =$	-2.17
1	3,370	46.69	25.67	35.12	11.12	-0.11		
2	3,261	46.69	33.09	32.12	1.19	2.33		
3	3,175	46.69	40.24	29.47	-8.17	4.64		
4	3,380	136.69	-6.76	4.19	43.61	30.58		
5	3,380	136.69	1.78	2.26	33.68	33.11		
6	3,383	148.00	5.08	-6.58	21.12	34.99		

$K_{xx} = 10,625.72$ ton/m
 $K_{yy} = 9,322.44$ ton/m
 $K_{00} = 362,280.29$ ton m
 $V = 98.00$ ton

Tabla 3.10

Para la comprobación de los resultados obtenidos anteriormente para el primer entrepiso, emplearemos el programa de computadora (Apéndice A), mismo que será utilizado también para los entrepisos restantes.



Tesis de Maestría

EJEMPLO 1 DE TESIS DE MAESTRIA

NIVEL	CORTANTE DE ENT V		CENTRO MASAS		CENTRO CORTANTE	
	(ton)		XM (m)	YM (m)	XC (m)	YC (m)
1	98.00		5.52	4.85	4.58	4.90
2	75.47		5.52	4.85	4.30	4.91
3	30.41		2.50	5.00	2.50	5.00

MARCO	NIVEL 3			
	X (m)	Y (m)	BETA (grados)	RIGIDEZ (ton/m)
1	.00	10.00	.00	1222.29
2	.00	5.00	.00	1185.37
3	.00	.00	.00	1154.61
4	.00	.00	90.00	1573.44
5	5.00	.00	90.00	1573.44

LONG MAYOR EN PLANTA bX = 5.00 m
LONG MAYOR EN PLANTA bY = 10.00 m

KXX =	3562.27	ton/m
KYY =	3146.88	ton/m
KXY =	.00	ton/m
KXXP =	3562.27	ton/m
KYYP =	3146.88	ton/m
GAMMA =	.00	grados

CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES
 X TORSION = 2.50 m
 Y TORSION = 5.09 m

SISMO EN X ANGULO= .00 grados
 EXC ESTATICA = .09 m
 EXC DISENO 1 = 1.14 m EXC DISENO 2 = -.91 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
	1	7.80
2	10.17	10.08
3	12.44	7.81
4	-1.73	1.37
5	1.73	-1.37

SISMO EN Y ANGULO= 90.00 grados
 EXC ESTATICA = .00 m
 EXC DISENO 1 = -.50 m EXC DISENO 2 = .50 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
	1	1.15
2	-.02	.02
3	-1.13	1.13
4	15.96	14.45
5	14.45	15.96

Tesis de Maestría

MARCO	NIVEL 2		BETA (grados)	RIGIDEZ (ton/m)
	X (m)	Y (m)		
1	.00	10.00	.00	2079.24
2	.00	5.00	.00	1978.10
3	.00	.00	.00	1899.29
4	.00	.00	90.00	2114.59
5	5.00	.00	90.00	2114.59
6	12.00	.00	101.31	2184.15
LONG MAYOR EN PLANTA bX = 12.00 m				
LONG MAYOR EN PLANTA bY = 10.00 m				

KXX =	6040.64	ton/m
KYY =	6329.32	ton/m
KXY =	-420.03	ton/m
KXXP =	6629.12	ton/m
KYYP =	5740.84	ton/m
GAMMA =	-54.48	grados

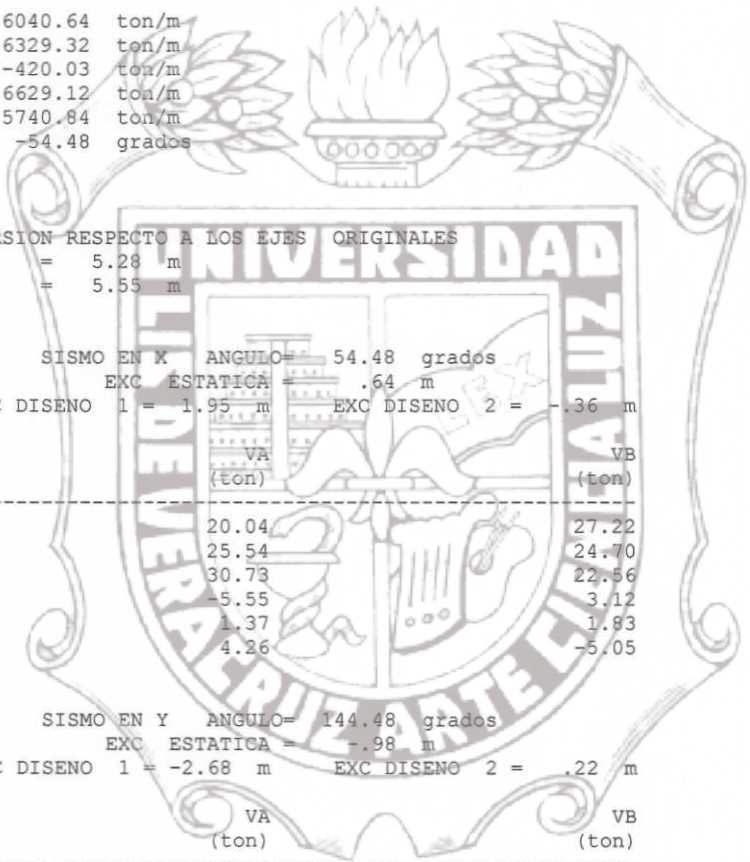
CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES
 X TORSION = 5.28 m
 Y TORSION = 5.55 m

SISMO EN X ANGULO = 54.48 grados
 EXC ESTATICA = .64 m
 EXC DISENO 1 = 1.95 m EXC DISENO 2 = -.36 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	20.04	27.22
2	25.54	24.70
3	30.73	22.56
4	-5.55	3.12
5	1.37	1.83
6	4.26	-5.05

SISMO EN Y ANGULO = 144.48 grados
 EXC ESTATICA = -.98 m
 EXC DISENO 1 = -2.68 m EXC DISENO 2 = .22 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	10.03	1.06
2	.68	1.73
3	-7.85	2.34
4	35.34	24.52
5	25.87	25.29
6	14.54	26.17



Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

Tesis de Maestría

MARCO	NIVEL 1			RIGIDEZ (ton/m)
	X (m)	Y (m)	BETA (grados)	
1	.00	10.00	.00	3370.05
2	.00	5.00	.00	3260.89
3	.00	.00	.00	3174.57
4	.00	.00	90.00	3380.02
5	5.00	.00	90.00	3380.02
6	12.00	.00	101.31	3382.61

LONG MAYOR EN PLANTA bX = 12.00 m
LONG MAYOR EN PLANTA bY = 10.00 m

KXX =	9935.61	ton/m
KYY =	10012.55	ton/m
KXY =	-650.51	ton/m
KXXP =	10625.72	ton/m
KYYP =	9322.44	ton/m
GAMMA =	-46.69	grados

CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES
X TORSION = 5.23 m
Y TORSION = 5.48 m

SISMO EN X ANGULO= 46.69 grados
EXC ESTATICA = .58 m
EXC DISEÑO 1 = 1.86 m EXC DISEÑO 2 = -.42 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	25.69	35.13
2	33.08	32.12
3	40.21	29.45
4	-6.74	4.20
5	1.78	2.26
6	5.05	-6.59

SISMO EN Y ANGULO= 136.69 grados
EXC ESTATICA = -.65 m
EXC DISEÑO 1 = -2.18 m EXC DISEÑO 2 = .55 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	11.14	-.10
2	1.18	2.33
3	-8.19	4.63
4	43.63	30.59
5	33.68	33.11
6	21.10	34.98

3.1.7 Ejemplo 2

Se trata de un edificio de 4 niveles para oficinas mostrado en la figura 3.10, compuesto de marcos de concreto reforzado como elementos sismorresistentes. En la tabla 3.11 se consignan los pesos, centros de masa, y longitudes mayores en planta de cada nivel. Para fines prácticos las rigideces de cada marco se indican en la tabla 3.12.



figura 3.10

NIVEL	PESO (ton)	CENTRO DE MASAS		LONG MAYOR PLANTA	
		X_M (m)	Y_M (m)	BX (m)	BY (m)
4	185.00	10.72	13.45	22.00	16.00
3	215.00	10.72	13.45	22.00	16.00
2	215.00	10.72	13.45	22.00	16.00
1	300.00	10.72	13.45	22.00	16.00

Tabla 3.11

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

MARCO	RIGIDEZ DE ENTREPISO en ton/m			
	1	2	3	4
1	80.40	82.42	75.45	71.45
2	120.47	143.98	140.30	129.52
3	59.90	61.05	55.74	52.83
4	78.44	100.39	100.03	91.04
5	86.57	120.71	123.03	109.70
6	87.98	124.47	127.29	113.06
7	87.98	124.47	127.29	113.06
8	58.89	83.63	85.59	75.95
9	52.56	67.55	67.40	61.28

Tabla 3.12

Calculo de Cortantes Sísmicos

La estructura pertenece al grupo B según el artículo 174 del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y se encuentra desplantada en la zona I por lo que le corresponde un coeficiente sísmico $c = 0.16$, con un factor de comportamiento sísmico de $Q = 4$. El calculo de dichas fuerzas se desarrolla en la tabla 3.13, misma que contiene la posición final de las fuerzas cortantes.

NIVEL	ENT	W _i (ton)	h _i (m)	W _i h _i (ton m)	F _i (ton)	V _i (ton)	x _M	F _i x _M	S F _i x _M	y _M	F _i y _M	S F _i y _M	POSICION DE V	
													X _v (m)	Y _v (m)
4		185.00	14.30	2645.50	11.67		10.72	125.13	125.13	13.45	157.00	157.00		
	4					11.67							10.72	13.45
3		215.00	11.20	2408.00	10.62		10.72	113.90	239.03	13.45	142.90	299.90		
	3					22.30							10.72	13.45
2		215.00	8.10	1741.50	7.68		10.72	82.37	321.40	13.45	103.35	403.25		
	2					29.98							10.72	13.45
1		300.00	5.00	1500.00	6.62		10.72	70.95	392.35	13.45	89.02	492.27		
	1					36.60							10.72	13.45
SUMA		915.00		8295.00										

Tabla 3.13

EJEMPLO 2 DE TESIS DE MAESTRIA

NIVEL	CORTANTE DE		CENTRO MASAS		CENTRO CORTANTE	
	ENT	V	XM	YM	XC	YC
	(ton)		(m)	(m)	(m)	(m)
1	36.60		10.72	13.45	10.72	13.45
2	29.98		10.72	13.45	10.72	13.45
3	22.30		10.72	13.45	10.72	13.45
4	11.67		10.72	13.45	10.72	13.45

MARCO	X (m)	NIVEL 4		RIGIDEZ (ton/m)
		Y (m)	BETA (grados)	
1	.00	16.00	.00	71.45
2	.00	8.00	.00	129.52
3	.00	.00	.00	52.83
4	.00	16.00	107.35	91.04
5	5.00	16.00	90.00	109.70
6	11.00	8.00	90.00	113.06
7	15.00	.00	82.87	113.06
8	22.00	8.00	48.81	75.95
9	22.00	8.00	57.99	61.28

LONG MAYOR EN PLANTA bX = 22.00 m
 LONG MAYOR EN PLANTA bY = 16.00 m

KXX =	313.80	ton/m
KYY =	504.09	ton/m
KXY =	53.19	ton/m
KXXP =	517.95	ton/m
KYYP =	299.94	ton/m
GAMMA =	75.40	grados

CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES

X TORSION	= 11.01	m
Y TORSION	= 5.27	m

SISMO EN X ANGULO= -75.40 grados
 EXC ESTATICA = -8.18 m
 EXC DISEÑO 1 = -13.87 m EXC DISEÑO 2 = -6.58 m

MARCO	VA		VB
	(ton)		
1	7.01		4.75
2	6.89		5.85
3	.44		1.26
4	2.36		.40
5	3.26		1.32
6	-.44		-.45
7	-2.84		-1.30
8	-1.09		.36
9	-1.68		-.26

Tesis de Maestría

SISMO EN Y ANGULO= 14.60 grados
 EXC ESTATICA = -.29 m
 EXC DISENO 1 = -2.64 m EXC DISENO 2 = 1.91 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	.53	-.88
2	-.14	-.79
3	-.51	.00
4	2.87	1.64
5	3.29	2.08
6	2.67	2.66
7	2.03	2.99
8	-.62	1.53
9	.58	1.47

MARCO	X (m)	Y (m)	BETA (grados)	RIGIDEZ (ton/m)
1	.00	16.00	.00	75.45
2	.00	8.00	.00	140.30
3	.00	.00	.00	55.74
4	.00	16.00	107.35	100.03
5	5.00	16.00	90.00	123.03
6	11.00	8.00	90.00	127.29
7	15.00	.00	82.87	127.29
8	22.00	8.00	48.81	85.59
9	22.00	8.00	57.99	67.40

LONG MAYOR EN PLANTA bX = 22.00 m
 LONG MAYOR EN PLANTA bY = 16.00 m

KXX =	338.40	ton/m
KYY =	563.72	ton/m
KXY =	59.92	ton/m
KXXP =	578.66	ton/m
KYYP =	323.46	ton/m
GAMMA =	76.00	grados

CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES
 X TORSION = 11.02 m
 Y TORSION = 5.16 m

SISMO EN X ANGULO= -76.00 grados
 EXC ESTATICA = -8.29 m
 EXC DISENO 1 = -14.04 m EXC DISENO 2 = -6.69 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	13.19	8.94
2	13.38	11.31
3	.89	2.38
4	4.55	.76
5	6.47	2.62
6	-.89	-.90
7	-5.64	-2.61
8	-2.11	.74
9	-3.23	-.50

Tesis de Maestría

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

SISMO EN Y ANGULO= 14.00 grados
 EXC ESTATICA = -.30 m
 EXC DISEÑO 1 = -2.65 m EXC DISEÑO 2 = 1.90 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	.99	-1.64
2	-.26	-1.54
3	-.94	-.01
4	5.43	3.08
5	6.35	3.96
6	5.14	5.13
7	3.89	5.77
8	4.17	2.93
9	1.06	2.76

MARCO	X (m)	Y (m)	BETA (grados)	RIGIDEZ (ton/m)
1	.00	16.00	.00	82.42
2	.00	8.00	.00	143.98
3	.00	.00	.00	61.05
4	.00	16.00	107.85	100.39
5	5.00	16.00	90.00	120.71
6	11.00	8.00	90.00	124.47
7	15.00	.00	82.87	124.47
8	22.00	8.00	48.81	83.63
9	22.00	8.00	57.99	67.55

LONG MAYOR EN PLANTA bx = 22.00 m
 LONG MAYOR EN PLANTA by = 16.00 m

KXX = 353.54 ton/m
 KYY = 555.13 ton/m
 KXY = 58.56 ton/m
 KXXP = 570.90 ton/m
 KYYP = 337.77 ton/m
 GAMMA = 74.92 grados

CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES

X TORSION = 11.02 m
 Y TORSION = 5.35 m

SISMO EN X ANGULO= -74.92 grados
 EXC ESTATICA = -8.10 m
 EXC DISEÑO 1 = -13.75 m EXC DISEÑO 2 = -6.50 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	18.31	12.41
2	17.30	14.73
3	1.10	3.30
4	5.95	.99
5	8.17	3.28
6	-1.10	-1.12
7	-7.12	-3.25
8	-2.77	.89
9	-4.24	-.65

Tesis de Maestría

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

SISMO EN Y ANGULO= 15.08 grados
 EXC ESTATICA = -.30 m
 EXC DISEÑO 1 = -2.65 m EXC DISEÑO 2 = 1.90 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	1.41	-2.30
2	-.37	-1.98
3	-1.36	.02
4	7.35	4.24
5	8.42	5.35
6	6.85	6.84
7	5.24	7.66
8	1.62	3.92
9	1.51	3.76

MARCO	X (m)	Y (m)	BETA (grados)	RIGIDEZ (ton/m)
1	.00	16.00	.00	80.40
2	.00	8.00	.00	120.47
3	.00	.00	.00	59.90
4	.00	16.00	107.35	78.44
5	5.00	16.00	90.00	86.57
6	11.00	8.00	90.00	87.98
7	15.00	.00	82.87	87.98
8	22.00	8.00	48.81	58.89
9	22.00	8.00	57.99	52.56

LONG MAYOR EN PLANTA bx = 22.00 m
 LONG MAYOR EN PLANTA by = 16.00 m

KXX =	309.41	ton/m
KYY =	403.78	ton/m
KXY =	41.32	ton/m
KXXP =	419.31	ton/m
KYYP =	293.88	ton/m
GAMMA =	69.40	grados

CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES

X TORSION	= 11.00 m
Y TORSION	= 5.86 m

SISMO EN X ANGULO= -69.40 grados
 EXC ESTATICA = -7.59 m
 EXC DISEÑO 1 = -12.98 m EXC DISEÑO 2 = -5.99 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	24.18	16.35
2	19.04	16.57
3	.92	4.29
4	6.74	1.10
5	8.21	3.21
6	-1.08	-1.08
7	-7.13	-3.16
8	-3.11	.78
9	-4.89	-.75

Tesis de Maestría

SISMO EN Y ANGULO= 20.60 grados
EXC ESTATICA = -.28 m
EXC DISENO 1 = -2.62 m EXC DISENO 2 = 1.92 m

MARCO	VA (ton)	VB (ton)
1	1.95	-3.14
2	-.55	-2.16
3	-2.00	.19
4	9.28	5.62
5	9.83	6.59
6	8.09	8.08
7	6.40	8.98
8	2.14	4.66
9	2.20	4.89



Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

3.2 MÉTODO MATRICIAL

En general los elementos resistentes no son perpendiculares entre sí, y además, para sistemas a base de muros o con diagonales no se puede definir de manera siempre aceptable rigideces de entrepiso. Por tanto, es imprescindible emplear un procedimiento más general como el que se expone en esta sección, basado en los métodos de análisis tridimensional.

3.2.1 Cálculo matricial de momentos torsionantes

Como se vio en la sección 2.3, al aplicar las ecuaciones de equilibrio al edificio, se tienen las ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{x\theta}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{y\theta}] \\ [K_{\theta x}] & [K_{\theta y}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

o bien

$$\{F\} = [K] \{D\} \quad (3.20)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigideces del edificio, simétrica y de tamaño $3n_N \times 3n_N$, donde n_N es el número de niveles.

El tratamiento de la torsión proviene de la obtención del vector de momentos $\{M\}$, que es necesario aplicar en el edificio para impedir giros relativos de los niveles, y del cociente de este entre las fuerzas cortantes lo que permite definir la posición del centro de torsión. Se debe, entonces, considerar dos direcciones del sismo:

- a. Sismo en X
- b. Sismo en Y

a. Sismo en X

El sismo actúa en dirección paralela al eje global X, en sentido positivo; por tanto

$$\begin{aligned} \{F_x\} &= \{V\} \\ \{F_y\} &= \{0\} \end{aligned}$$

donde el vector $\{V\}$ es el vector de fuerzas cortantes sísmicas de entrepiso.

Si se define como vector de desplazamiento directo, es decir, sin torsión al vector $\{\delta_o\}$, se tiene que

$$\{\delta_o\} = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

y por ende $\{\theta\} = \{0\}$.

Podemos entonces establecer, de acuerdo al método de las rigideces, que

$$\begin{Bmatrix} \{V\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_o\} \\ \{v_o\} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Con la solución del sistema de ecuaciones anterior podemos obtener los momentos de entrepiso que, aplicados junto con el sismo en X, impiden la torsión mediante la siguiente expresión

$$\{M_o\} = \begin{bmatrix} [K_{\theta x}] & [K_{\theta y}] \end{bmatrix} \{\delta_o\} \quad (3.23)$$

Ya que el vector de momentos $\{M_o\}$ esta referido al origen del sistema coordenado, podemos dividir sus elementos entre la cortante del entrepiso correspondiente, definiendo así la ordenada del centro de torsión del entrepiso i . Así, de acuerdo a la figura 3.11, se puede establecer que

$$(y_T)_i = -\frac{(M_o)_i}{V_i} \quad (3.24)$$

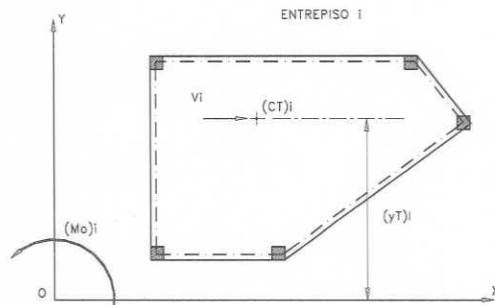


figura 3.11

b. Sismo en Y

El desarrollo es análogo al sismo en X, tal que

$$\begin{aligned} \{F_x\} &= \{0\} \\ \{F_y\} &= \{V\} \end{aligned}$$

por tanto, según la figura 3.12, la abscisa del centro de torsión del entrespiso i es

$$(x_T)_i = -\frac{(M_o)_i}{V_i} \tag{3.25}$$

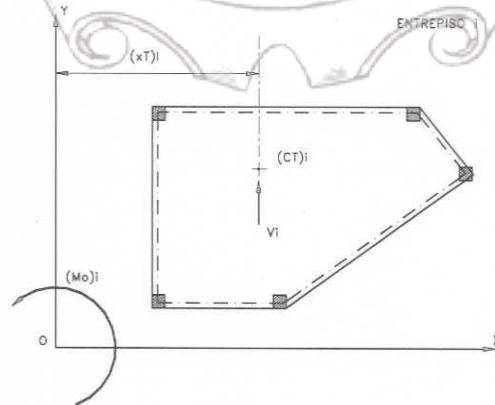
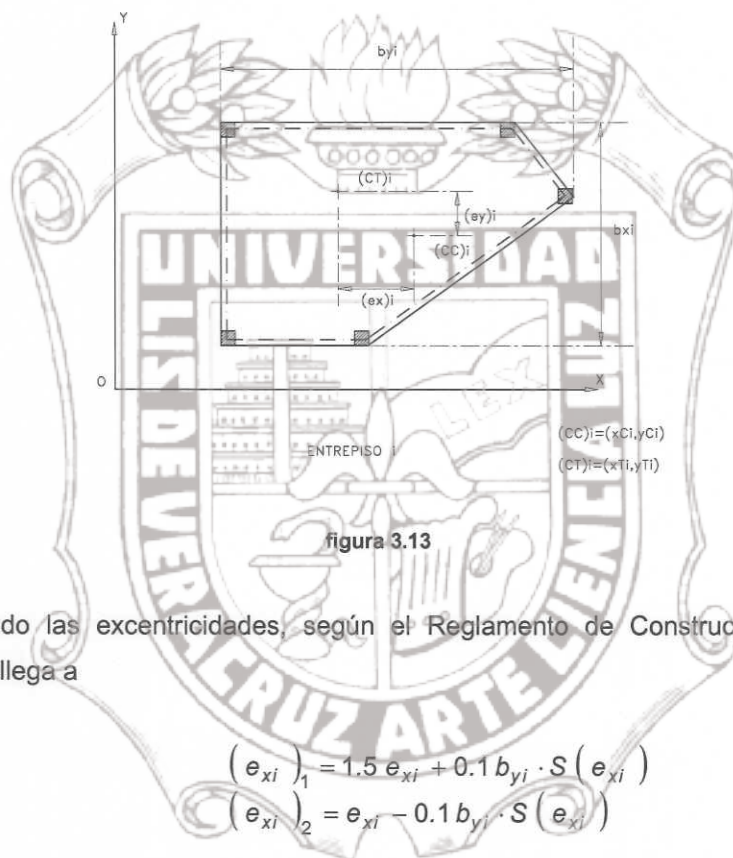


figura 3.12

Una vez definidas las coordenadas del centro de torsión y conocida la posición del punto de aplicación de las fuerzas cortantes (centro de cortante) podemos aplicar la siguiente expresión para los ejes coordenados (figura 3.13)

$$\begin{aligned} (e_x)_i &= (x_C)_i - (x_T)_i \\ (e_y)_i &= (y_C)_i - (y_T)_i \end{aligned} \quad (3.26)$$



Modificando las excentricidades, según el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1993, se llega a

$$\begin{aligned} (e_{xi})_1 &= 1.5 e_{xi} + 0.1 b_{yi} \cdot S(e_{xi}) \\ (e_{xi})_2 &= e_{xi} - 0.1 b_{yi} \cdot S(e_{xi}) \end{aligned} \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} (e_{yi})_1 &= 1.5 e_{yi} + 0.1 b_{xi} \cdot S(e_{yi}) \\ (e_{yi})_2 &= e_{yi} - 0.1 b_{xi} \cdot S(e_{yi}) \end{aligned} \quad (3.27b)$$

donde $S(e_x)$ y $S(e_y)$ se refieren a los signos de las excentricidades e_x y e_y respectivamente, de cada entrespacio. Si $e \geq 0$, $S(e) = +1$; Si $e < 0$, $S(e) = -1$.

3.2.2 Distribución matricial de fuerzas sísmicas

Dejando fijo el centro de torsión, se moverá el centro de cortante con objeto de incrementar la excentricidad. Se distinguen entonces dos direcciones de análisis.

a. Sismo en X

La condición de carga para esta dirección queda determinada de la forma siguiente

1. $\{F_x\} = \{V\}$
2. $\{F_y\} = \{0\}$
3. $\{M\}$

Para obtener $\{M\}$, de las expresiones 3.26 y 3.27b, para el entrepiso i-ésimo

$$\begin{aligned} (\bar{y}_{Ci})_1 &= y_{Ti} + (e_{yi})_1 \\ (\bar{y}_{Ci})_2 &= y_{Ti} + (e_{yi})_2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

por tanto

$$\begin{aligned} (M_{0i})_1 &= -V_i \cdot (\bar{y}_{Ci})_1 \\ (M_{0i})_2 &= -V_i \cdot (\bar{y}_{Ci})_2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

En suma, se resolverá el sistema

$$\{F\} = [K]\{D\}$$

dos veces:

I. $\begin{cases} \{F_x\} = \{V\} \\ \{F_y\} = \{0\} \\ \{M\} = \{M_{01}\} \end{cases}$

II. $\begin{cases} \{F_x\} = \{V\} \\ \{F_y\} = \{0\} \\ \{M\} = \{M_{02}\} \end{cases}$

b. Sismo en Y

La condición de carga es

1. $\{F_x\} = \{0\}$
2. $\{F_y\} = \{V\}$
3. $\{M\}$

En forma análoga al sismo en x, de 3.26 y 3.27a

$$\begin{aligned} (\bar{x}_{Ci})_1 &= x_{Ti} + (e_{xi})_1 \\ (\bar{x}_{Ci})_2 &= x_{Ti} + (e_{xi})_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} (\bar{M}_{0i})_1 &= V_i \cdot (\bar{x}_{Ci})_1 \\ (\bar{M}_{0i})_2 &= V_i \cdot (\bar{x}_{Ci})_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

También se resolverá entonces el sistema

$$\{F\} = [K] \{D\}$$

dos veces:

III. $\{F_x\} = \{0\}$
 $\{F_y\} = \{V\}$
 $\{M\} = \{M_{01}\}$

IV. $\{F_x\} = \{0\}$
 $\{F_y\} = \{V\}$
 $\{M\} = \{M_{02}\}$

El diseño de cada marco se hará con la condición más desfavorable de los cuatro casos de análisis.

3.2.3 Ejemplo 1

En este ejemplo analizaremos el edificio de un piso cuya planta se muestra en la figura 3.14. Consideremos que la construcción pertenece al grupo B, que se encuentra desplantada en la zona II, pesa 125 ton, y que los factores de comportamiento sísmico aplicables son 4 en la dirección X y 2 en la dirección Y. En consecuencia debemos usar $c = 0.32$.

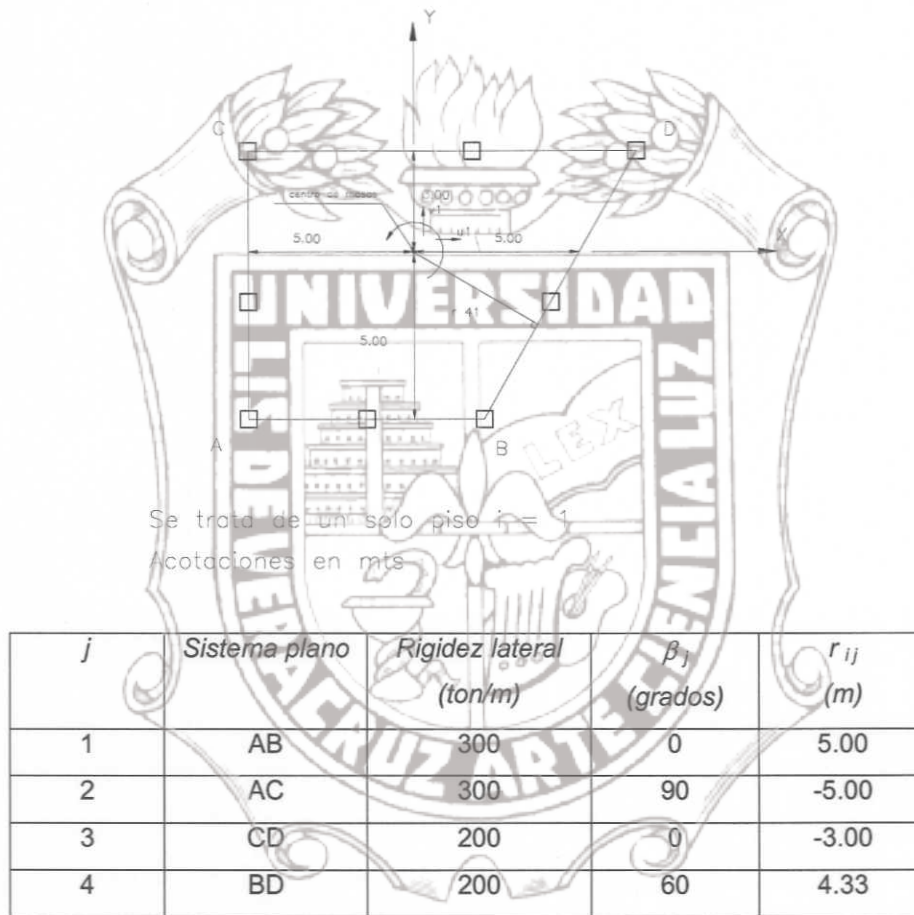


figura 3.14

Calculo de Cortantes Sísmicos

Obviando la estimación del periodo natural y en vista de que se trata de una estructura de un solo piso, las cortantes (en este caso iguales a las fuerzas aplicadas en el piso) en las dos direcciones de análisis quedan:

$$V_x = c W/Q_x = 0.32 \times 125/4 = 10 \text{ ton}$$

$$V_y = c W/Q_y = 0.32 \times 125/2 = 20 \text{ ton}$$

Matrices $[K_i]$ de cada marco

Las matrices de rigideces laterales de los sistemas planos son de 1×1 , y coinciden con las correspondientes rigideces de entrepiso, es decir:

$$[K_1] = [300]$$

$$[K_2] = [300]$$

$$[K_3] = [200]$$

$$[K_4] = [200]$$

Matriz de rigidez lateral total del edificio

Ensamblando las matrices $[K_i]$ de acuerdo a la ecuación 2.19 se obtiene

$$[K] = \begin{bmatrix} 550 & 86.60 & 1333 \\ 86.60 & 450 & -750 \\ 1333 & -750 & 20550 \end{bmatrix} \text{ ton/m}$$

Coordenadas de los centros de torsión

Ordenada de CT: Sismo en X

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.22 se llega a

$$\begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01875 \\ -0.00361 \end{Bmatrix}$$

Obtenemos $\{M_o\}$ aplicando la ecuación 3.23

$$\{M_o\} = \{27.70\} \text{ ton m}$$

y $\{y_T\}$ con la ecuación 3.24, por ende

$$\{y_T\} = \{-2.77\} m$$

Abscisa de CT: Sismo en Y

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.22 se llega a

$$\begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00722 \\ 0.04583 \end{Bmatrix}$$

Obtenemos $\{M_o\}$ aplicando la ecuación 3.23

$$\{M_o\} = \{-44.0\} \text{ ton } m$$

y $\{x_T\}$ con la ecuación 3.25, por ende

$$\{x_T\} = \{2.20\} m$$

Excentricidades calculadas y modificadas

En dirección X

De acuerdo con la ecuación 3.26 las excentricidades calculadas valen

$$\{e_x\} = \{-2.20\} m$$

El vector de longitudes mayores en planta del edificio sobre el eje X es

$$\{b_x\} = \{11.73\} m$$

Por lo tanto, las excentricidades modificadas valen, según 3.27a

$$\{e_{x1}\} = \{-4.473\} m \quad y \quad \{e_{x2}\} = \{-1.027\} m$$

En dirección Y

De forma análoga a la dirección X

$$\{e_y\} = \{2.77\} m$$

El vector de longitudes mayores en planta del edificio sobre el eje Y es

$$\{b_y\} = \{8.00\} m$$

Por lo tanto, las excentricidades modificadas valen, según 3.27b

$$\{e_{y1}\} = \{4.955\} m \quad y \quad \{e_{y2}\} = \{1.97\} m$$

Centro de cortante desplazado

Ordenadas: Sismo en X

De acuerdo a las ecuaciones 3.28 se tiene

$$\{\bar{y}_{c1}\} = \{2.185\} m \quad ; \quad \{\bar{y}_{c2}\} = \{-0.80\} m$$

Abcisas: Sismo en Y

De acuerdo a las ecuaciones 3.30 se tiene

$$\{\bar{x}_{c1}\} = \{-2.273\} m \quad ; \quad \{\bar{x}_{c2}\} = \{1.173\} m$$

Momentos amplificados para análisis

Sismo en X

$$\{M_{o1}\} = \{-21.85\} \text{ ton m} \quad y \quad \{M_{o2}\} = \{8.00\} \text{ ton m}$$

Sismo en Y

$$\{\bar{M}_{o1}\} = \{-45.46\} \text{ ton m} \quad y \quad \{\bar{M}_{o2}\} = \{23.46\} \text{ ton m}$$

Análisis tridimensional

Sismo en X

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{V_x\} ; \quad \{F_y\} = \{0\} ; \quad \{M\} = \{M_{o1}\}$$

Resolviendo el sistema 3.20 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02778 \\ -0.01078 \\ -0.00326 \end{Bmatrix}$$

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{V_x\} ; \quad \{F_y\} = \{0\} ; \quad \{M\} = \{M_{o2}\}$$

En forma análoga:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02234 \\ -0.00646 \\ -0.00130 \end{Bmatrix}$$

Sismo en Y

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{0\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{V_y\} \quad ; \quad \{M\} = \{M_{01}\}$$

Resolviendo el sistema 3.20 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00695 \\ 0.04562 \\ -0.00010 \end{Bmatrix}$$

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{0\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{V_y\} \quad ; \quad \{M\} = \{M_{02}\}$$

En forma análoga:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.01950 \\ 0.05559 \\ 0.00444 \end{Bmatrix}$$

Finalmente las fuerzas en los marcos resultan:

$$\{F_1\} = \{4.752\} \text{ ton}$$

$$\{F_2\} = \{13.836\} \text{ ton}$$

$$\{F_3\} = \{7.512\} \text{ ton}$$

$$\{F_4\} = \{11.520\} \text{ ton}$$

3.2.4 Ejemplo 2

Se trata de un edificio de 3 niveles para oficinas mostrado en la figura 3.15, compuesto de marcos de concreto reforzado como elementos sismorresistentes.



figura 3.15

Las columnas son de sección circular y las vigas de sección rectangular. Las dimensiones de columnas y vigas son tales que los momentos principales de inercia de la sección no agrietada sean iguales ($I = \text{constante}$); así

Columnas	$D = 50 \text{ cm}$
Vigas	$b = 25 \text{ cm} \times h = 55 \text{ cm}$

El módulo de elasticidad, E , para concreto con resistencia a compresión $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$; se considera $E = 10,000 \sqrt{f'_c} = 158,000 \text{ kg/cm}^2 = 1,580,000 \text{ ton/m}^2$, por lo tanto, la rigidez a la flexión vale

$$EI = 4,851 \text{ ton m}^2 = \text{constante}$$

Para el análisis solo se consideran deformaciones por flexión.

Matrices $[K_i]$ de cada marco

Como se señaló, la matriz $[K_i]$ de un marco es el resultado de la condensación estática de la matriz de rigidez total del marco. De acuerdo a lo anterior las matrices $[K_i]$ de cada marco son

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1.0019 & -0.2619 & 0.0232 \\ -0.2619 & 0.7272 & -0.1297 \\ 0.0232 & -0.1297 & 0.4142 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0.9909 & -0.2670 & 0.0239 \\ -0.2670 & 0.7067 & -0.1320 \\ 0.0239 & -0.1320 & 0.4128 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 0.9821 & -0.2707 & 0.0245 \\ -0.2707 & 0.6905 & -0.1340 \\ 0.0245 & -0.1340 & 0.4116 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_4] = [K_5] = \begin{bmatrix} 1.0043 & -0.2723 & 0.0417 \\ -0.2723 & 0.7737 & -0.2156 \\ 0.0417 & -0.2156 & 0.6602 \end{bmatrix} EI$$

$$[K_6] = \begin{bmatrix} 0.9969 & -0.2511 & 0 \\ -0.2511 & 0.6607 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI$$

Matriz de rigidez lateral total del edificio

Ensamblando las matrices $[K_i]$ de acuerdo a la ecuación 2.19 se obtiene

$$[K] = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \begin{matrix} F_{X1} \\ F_{X2} \\ F_{X3} \\ F_{Y1} \\ F_{Y2} \\ F_{Y3} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccc} 3.013 & -0.809 & 0.072 & -0.192 & 0.048 & 0 & -17.274 & 4.534 & -0.352 \\ S & 2.150 & -0.396 & 0.048 & -0.127 & 0 & 4.534 & -12.330 & 1.957 \\ I & & 1.239 & 0 & 0 & 0 & -0.352 & 1.957 & -6.206 \\ M & & & 2.967 & -0.786 & 0.083 & 16.524 & -4.258 & 0.209 \\ E & & & & 2.183 & -0.431 & -4.258 & 11.492 & -1.078 \\ T & & & & & 1.320 & 0.209 & -1.078 & 3.301 \\ R & & & & & & 288.102 & -74.440 & 3.960 \\ I & & & & & & & 201.212 & -21.660 \\ C A & & & & & & & & 68.245 \end{array} \right] \end{matrix} EI$$

Calculo de Cortantes Sísmicos

La estructura pertenece al grupo B según el artículo 174 del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y se encuentra desplantada en la zona III por lo que le corresponde un coeficiente sísmico $c = 0.40$. El calculo de dichas fuerzas se desarrolla en la tabla 3.14, misma que contiene la posición final de las fuerzas cortantes.

NIVEL	ENT	W _i (ton)	h _i (m)	W _i h _i (ton m)	F _i (ton)	V _i (ton)	x _M	F _i x _M	S F _i x _M	y _M	F _i y _M	S F _i y _M	POSICION DE V	
													X _V (m)	Y _V (m)
3		45.00	9.00	405.00	30.41		2.50	76.03	76.03	5.00	152.07	152.07		
	3					30.41							2.50	5.00
2		100.00	6.00	600.00	45.06		5.52	248.72	324.75	4.85	218.53	370.60		
	2					75.47							4.30	4.91
1		100.00	3.00	300.00	22.53		5.52	124.36	449.11	4.85	109.26	479.86		
	1					98.00							4.58	4.90
SUMA		245.00		1305.00										

Tabla 3.14

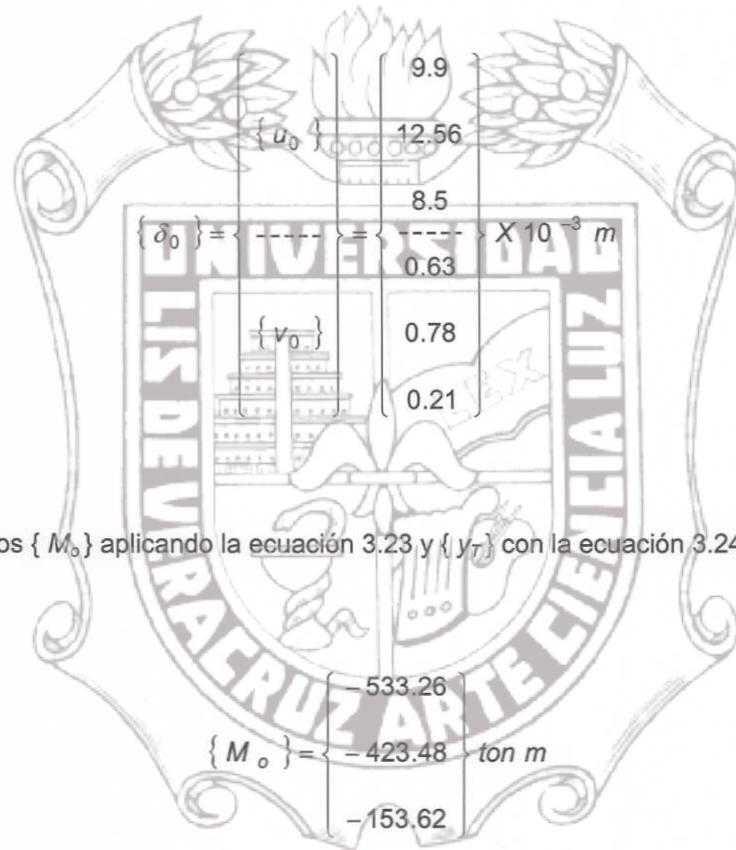
$$\{V\} = \begin{Bmatrix} 98.0 \\ 75.5 \\ 30.4 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

Coordenadas de los centros de torsión

Ordenada de CT: Sismo en X

$$\{F_x\} = \{V\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{0\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.22 se llega a



Obtenemos $\{M_o\}$ aplicando la ecuación 3.23 y $\{y_T\}$ con la ecuación 3.24, por ende

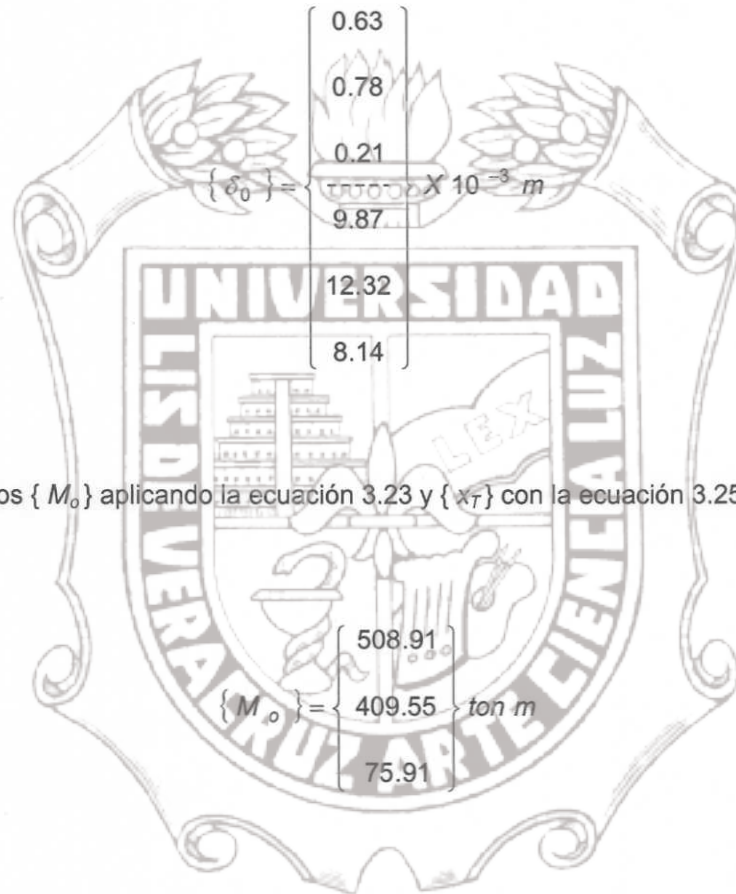
$$\{y_T\} = \begin{Bmatrix} 5.44 \\ 5.61 \\ 5.05 \end{Bmatrix} m$$

Tesis de Maestría

Abscisa de CT: Sismo en Y

$$\{F_x\} = \{0\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{V\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.22 se llega a


$$\{\delta_0\} = \begin{Bmatrix} 0.63 \\ 0.78 \\ 0.21 \\ 9.87 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} m$$
$$\begin{Bmatrix} 12.32 \\ 8.14 \end{Bmatrix}$$
$$\{M_0\} = \begin{Bmatrix} 508.91 \\ 409.55 \\ 75.91 \end{Bmatrix} \text{ ton m}$$

Obtenemos $\{M_0\}$ aplicando la ecuación 3.23 y $\{x_T\}$ con la ecuación 3.25, por ende

$$\{x_T\} = \begin{Bmatrix} 5.19 \\ 5.43 \\ 2.50 \end{Bmatrix} m$$

Excentricidades calculadas y modificadas

En dirección X

De acuerdo con la ecuación 3.26 las excentricidades calculadas valen

$$\{e_x\} = \begin{Bmatrix} -0.61 \\ -1.13 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

El vector de longitudes mayores en planta del edificio sobre el eje X es

$$\{b_x\} = \begin{Bmatrix} 12.0 \\ 12.0 \\ 5.0 \end{Bmatrix} m$$

Por lo tanto, las excentricidades modificadas valen, según 3.27a

$$\{e_{x1}\} = \begin{Bmatrix} -2.12 \\ -2.89 \\ -0.50^* \end{Bmatrix} m \quad y \quad \{e_{x2}\} = \begin{Bmatrix} 0.59 \\ 0.08 \\ 0.50^* \end{Bmatrix} m$$

* NOTA: Es importante señalar que cuando la excentricidad calculada tiende a cero, la excentricidad modificada adopta valores parecidos aunque de signo contrario. Con objeto de que el análisis sea consistente, se deben colocar estas excentricidades modificadas en los vectores { Ex }, { Ey } (según la dirección de análisis) tal que los componentes de ellos tengan mismo signo

En dirección Y

De forma análoga a la dirección X

$$\{e_y\} = \begin{Bmatrix} -0.54 \\ -0.70 \\ -0.05 \end{Bmatrix} m$$

El vector de longitudes mayores en planta del edificio sobre el eje Y es

$$\{b_y\} = \begin{Bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \end{Bmatrix} m$$

Por lo tanto, las excentricidades modificadas valen, según 3.27b

$$\{e_{y1}\} = \begin{Bmatrix} -1.81 \\ -2.05 \\ -1.08 \end{Bmatrix} m \quad y \quad \{e_{y2}\} = \begin{Bmatrix} 0.46 \\ 0.30 \\ 0.95 \end{Bmatrix} m$$

Centro de cortante desplazado

Ordenadas: Sismo en X

De acuerdo a las ecuaciones 3.28 se tiene

$$\{\bar{y}_{c1}\} = \begin{Bmatrix} 3.63 \\ 3.56 \\ 3.97 \end{Bmatrix} m ; \quad \{\bar{y}_{c2}\} = \begin{Bmatrix} 5.90 \\ 5.91 \\ 6.00 \end{Bmatrix} m$$

Abscisas: Sismo en Y

De acuerdo a las ecuaciones 3.30 se tiene

$$\{\bar{x}_{c1}\} = \begin{Bmatrix} 3.07 \\ 2.54 \\ 2.00 \end{Bmatrix} m ; \quad \{\bar{x}_{c2}\} = \begin{Bmatrix} 5.78 \\ 5.50 \\ 3.00 \end{Bmatrix} m$$

Momentos amplificados para análisis

Sismo en X

$$\{M_{o1}\} = \begin{Bmatrix} -355.69 \\ -268.82 \\ -120.79 \end{Bmatrix} \text{ ton m} \quad y \quad \{M_{o2}\} = \begin{Bmatrix} -578.20 \\ -446.21 \\ -182.40 \end{Bmatrix} \text{ ton m}$$

Sismo en Y

$$\{\bar{M}_{o1}\} = \begin{Bmatrix} 301.20 \\ 191.58 \\ 60.71 \end{Bmatrix} \text{ ton m} \quad y \quad \{\bar{M}_{o2}\} = \begin{Bmatrix} 566.44 \\ 415.25 \\ 91.11 \end{Bmatrix} \text{ ton m}$$

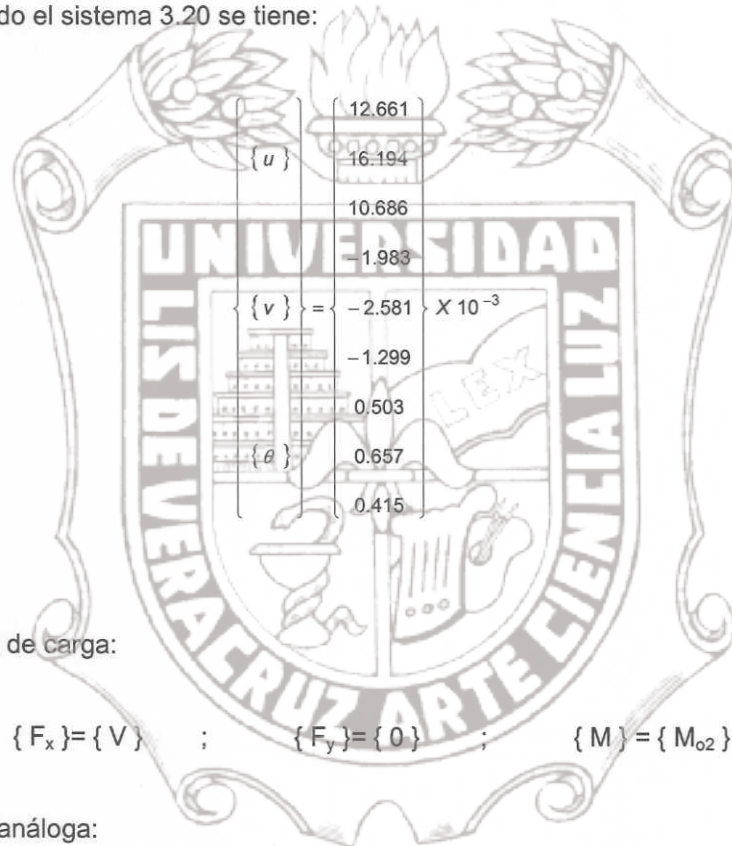
Análisis tridimensional

Sismo en X

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{V\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{0\} \quad ; \quad \{M\} = \{M_{o1}\}$$

Resolviendo el sistema 3.20 se tiene:



$$\begin{matrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta\} \end{matrix} = \begin{matrix} 12.661 \\ 16.194 \\ 10.686 \\ -1.983 \\ -2.581 \times 10^{-3} \\ -1.299 \\ 0.503 \\ 0.657 \\ 0.415 \end{matrix}$$

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{V\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{0\} \quad ; \quad \{M\} = \{M_{o2}\}$$

En forma análoga:

$$\begin{matrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta\} \end{matrix} = \begin{matrix} 9.264 \\ 11.819 \\ 7.265 \\ 1.247 \\ 1.473 \times 10^{-3} \\ 0.916 \\ -0.118 \\ -0.135 \\ -0.243 \end{matrix}$$

	MARCO					
	1	2	3	4	5	6
	Si { M } = { M_{o1} }					
d ₁	7.63	10.15	12.66	-1.98	0.53	1.49
d ₂	9.62	12.91	16.19	-2.58	0.70	2.02
d ₃	6.54	8.61	10.69	-1.30	0.78	0.00
	Si { M } = { M_{o2} }					
d ₁	10.44	9.85	9.26	1.25	0.66	-1.98
d ₂	13.17	12.49	11.82	1.47	0.80	-2.46
d ₃	9.70	8.48	7.27	0.92	-0.30	0.00

x 10⁻³ m

x 10⁻³ m

Desplazamientos de los marcos. Sismo en X

Tabla 3.15

	MARCO					
	1	2	3	4	5	6
	Si { M } = { M_{o1} }					
V ₁	25.60	33.00	40.30	-6.50	1.80	4.70
V ₂	20.10	25.60	30.70	-5.70	1.10	4.70
V ₃	7.90	10.20	12.30	-1.90	1.90	0.00
	Si { M } = { M_{o2} }					
V ₁	35.10	32.20	29.50	4.30	2.10	-6.60
V ₂	27.10	24.60	22.70	2.90	2.40	-5.50
V ₃	12.40	10.10	7.90	1.60	-1.70	0.00

ton

ton

Fuerzas cortantes en los marcos. Sismo en X

Tabla 3.16

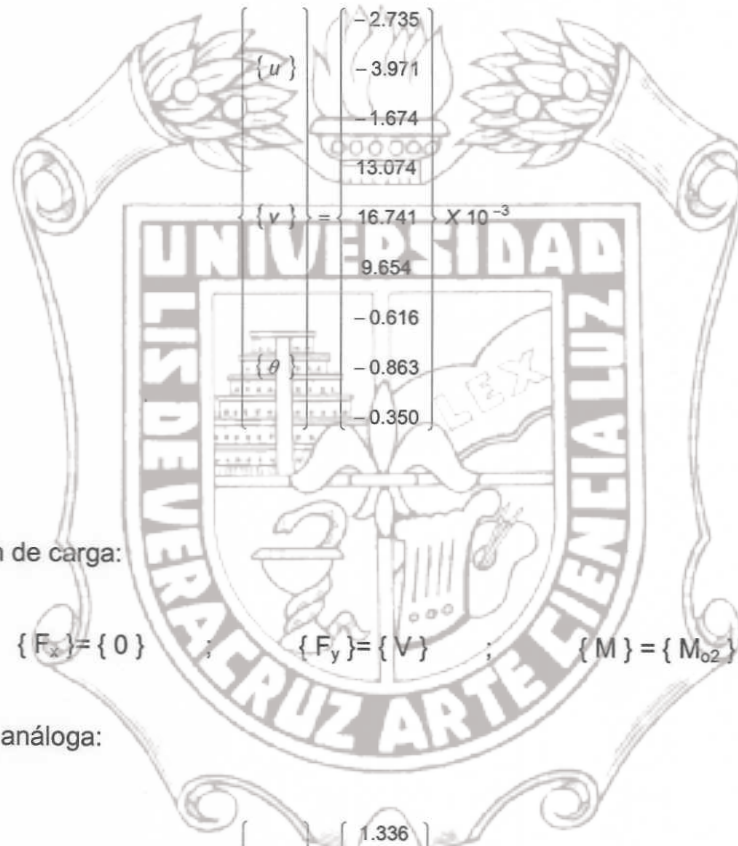
Tesis de Maestría

Sismo en Y

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{0\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{V\} \quad ; \quad \{M\} = \{M_{o1}\}$$

Resolviendo el sistema 3.20 se tiene:


$$\begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.735 \\ -3.971 \\ -1.674 \\ 13.074 \\ 16.741 \\ 9.654 \\ -0.616 \\ -0.863 \\ -0.350 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Condición de carga:

$$\{F_x\} = \{0\} \quad ; \quad \{F_y\} = \{V\} \quad ; \quad \{M\} = \{M_{o2}\}$$

En forma análoga:

$$\begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.336 \\ 1.223 \\ 0.857 \\ 9.202 \\ 11.924 \\ 7.787 \\ 0.128 \\ 0.078 \\ 0.125 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Instituto de Ingeniería
Universidad Veracruzana

	MARCO					
	1	2	3	4	5	6
	Si { M } = { M_{o1} }					
d ₁	3.43	0.35	-2.74	13.07	9.99	6.11
d ₂	4.66	0.34	-3.97	16.74	12.43	7.04
d ₃	1.83	0.08	-1.67	9.65	7.90	0.00
	Si { M } = { M_{o2} }					
d ₁	0.06	0.70	1.34	9.20	9.84	10.27
d ₂	0.44	0.83	1.22	11.92	12.31	12.37
d ₃	-0.39	0.23	0.86	7.79	8.41	0.00

x 10⁻³ m

x 10⁻³ m

Desplazamientos de los marcos. Sismo en Y

Tabla 3.17

	MARCO					
	1	2	3	4	5	6
	Si { M } = { M_{o1} }					
V ₁	10.90	1.20	-8.00	43.50	33.90	21.00
V ₂	10.90	0.70	-8.60	35.50	25.20	15.10
V ₃	1.10	-0.03	-1.10	16.10	14.30	0.00
	Si { M } = { M_{o2} }					
V ₁	-0.30	2.30	4.90	30.70	33.40	34.60
V ₂	1.70	1.80	1.80	24.50	24.40	27.10
V ₃	-1.10	0.01	1.10	14.30	16.10	0.00

ton

ton

Fuerzas cortantes en los marcos. Sismo en Y

Tabla 3.18

Capítulo 4

Conclusiones

Las conclusiones se han dividido en dos secciones, la primera contempla algunas conclusiones de carácter general del problema de torsión, mientras que la segunda lo hace de los métodos para la distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio.

4.1 PROBLEMA DE TORSIÓN

1. En primer lugar, podemos decir que la torsión es un fenómeno imposible de evitar del todo, por lo que se deben estudiar con cuidado sus posibles efectos en la estructuras.

2. Podemos mencionar cinco causas para la aparición y aumento de la torsión, algunas de ellas relacionadas entre si:

a). *Asimetría en las distribuciones de masa y rigidez, existiendo excentricidades no nulas.*

Conforme las excentricidades crecen, mayor es la diferencia en las respuestas evaluadas con los métodos estático y dinámico.

b). *Frecuencias de vibración de modos, con componentes de rotación, próximas entre si.*

Es necesario evitar modos acoplados haciendo el momento polar de inercia mucho menor que la rigidez, pues de lo contrario, además de sumarse las componentes rotacionales de los modos, las amplificaciones dinámicas tienden a incrementarse.

c). *Componentes rotacionales del movimiento del terreno durante un sismo.*

La excentricidad inducida por este caso es función del periodo de la estructura y del tiempo que tarda la onda en atravesarla.

d). *Incursión de algunas partes de la estructura en el intervalo inelástico ante la presencia de un sismo.*

El acoplamiento traslación-torsión puede aparecer aun cuando la configuración sea simétrica; por otro lado, el movimiento en una dirección afecta el comportamiento inelástico en la otra.

e). *Carácter dinámico del fenómeno de la torsión que trae consigo diferencias entre las excentricidades estática y dinámica.*

La torsión induce excentricidades dinámicas aunque la excentricidad estática sea nula; aun más, debido a esta razón el problema debe recibir un tratamiento especial pues se aparta, considerablemente en ocasiones, de las hipótesis de los reglamentos.

3. A la luz de las premisas anteriores, una evaluación precisa de la respuesta torsional es bastante complicada, ya que es necesario efectuar esencialmente un cálculo tridimensional de la respuesta dinámica, tomando en cuenta los modos de vibración que incluyan deformaciones laterales y torsionales acopladas de la estructura completa, así como el comportamiento post-elástico.

Sin embargo, es adecuado aproximar la respuesta y evitar análisis muy detallados sobre todo si se considera la poca atención que se presta al modelo de la estructura, a las propiedades de los materiales y a las cargas.

4. Con objeto de disminuir los efectos de la torsión es conveniente seguir algunas recomendaciones de estructuración. En forma muy concisa estas pueden ser:

a). *Poco peso.*

b). *Sencillez, simetría y regularidad en planta, evitar formas muy alargadas en planta y plantas con entrantes o salientes (L, U, T, +, H).*

c). *Sencillez, simetría y regularidad en elevación.*

d). *Uniformidad en la distribución de resistencia, rigidez y ductilidad.*

e). *Líneas escalonadas de defensa estructural que permitan disipar la energía cuidando que no modifiquen radicalmente la posición de los centros de torsión.*

4.2 MÉTODO BASADO EN RIGIDECES DE ENTREPISO

Se ha presentado la justificación teórica de una simplificación muy usada en el análisis sísmico de edificios, consistente en considerar independientemente a cada entrepiso y trabajar con las llamadas rigideces de entrepiso.

Dicha justificación, está soportada en la formulación de la hipótesis de las Alfas, la cual es equivalente a que todos los marcos, cuando no hay torsión, reciban la misma porción del cortante total en todos sus entrepisos; es evidente que lo anterior no se cumple cuando hay muros y marcos, ya que aquellos reciben más cortante en sus primeros entrepisos y menos cortante en los pisos superiores.

De lo anterior se deduce que la hipótesis de las Alfas solo se cumple si los marcos del edificio son similares, o sea que tienen estructuraciones muy parecidas. Si un edificio sin muros de cortante ha sido estructurado en forma convencional, lo más seguro es que cumpla aproximadamente con la hipótesis de las Alfas; también, si un edificio está estructurado exclusivamente a base de muros de cortante, cumplirá aproximadamente con la hipótesis de las Alfas. Es evidente que el procedimiento expuesto evita calcular las matrices de rigidez $[K_j]$ para cada marco.

Además de obtener el centro de torsión y la excentricidad estática, la metodología expuesta considera las modificaciones a esta última de acuerdo con las previsiones del RDF-93, analizando las cuatro condiciones del sismo.

El método tiene tres limitaciones particulares:

- a). La relación $V_j = K_j d_j$, supone que la matriz $[K_j]$ del marco es diagonal. Es claro que, en general, esto no sucede rigurosamente; es decir, aunque la diagonal es pesada frente al resto de la matriz, los valores fuera de la diagonal no son nulos.
- b). La rigidez de entrepiso se aplica a edificios formados por marcos que se pueden desacoplar de la estructura; como ya se mencionó esto no es siempre posible o, cuando menos, si se separan no se emplea un criterio racional.
- c). El procedimiento no es matricial, lo que obliga a realizarlo independientemente de los programas de análisis matricial sísmico tridimensional de edificios.

4.3 MÉTODO MATRICIAL

Es una herramienta para la estimación de la torsión en edificios; su objetivo de aplicación es en el análisis matricial sísmico tridimensional de edificios.

Es un procedimiento más general para determinar la posición del centro de torsión de edificios, pues no está limitado por las condiciones del método basado en rigideces de entrepiso.

Si los marcos se pueden desacoplar, el método basado en rigideces de entrepiso y el método matricial son equivalentes; pero, en caso contrario el método matricial permite calcular el centro de torsión partiendo de la matriz de rigideces del edificio, ensamblando las matrices de rigideces acopladas de columnas, vigas, diagonales y muros mediante el esquema de nivel por nivel. Posteriormente, se condensa la matriz total obteniendo así la matriz de rigideces lateral del edificio, que corresponde a la matriz $[K]$ del sistema $\{F\} = [K]\{D\}$.

Del análisis de las expresiones para calcular las coordenadas del centro de torsión, se desprende que este no es un invariante de la estructura ya que su posición depende de la distribución de las fuerzas sísmicas. Podemos concluir que a cada conjunto de fuerzas le corresponden centros de torsión de entrepiso diferentes.

También este método además de obtener el centro de torsión y la excentricidad estática, la metodología expuesta considera las modificaciones a esta última de acuerdo con las previsiones del RDF-93, analizando las cuatro condiciones del sismo.

El método tiene dos limitaciones particulares:

a). La hipótesis de diafragma rígido, lo que conduce a cálculos erróneos de la posición del centro de torsión si el sistema de piso es flexible. Aun más, la obtención de sus coordenadas se podría convertir en un problema iterativo pues el centro de torsión depende de la flexibilidad del sistema de piso, esta lo hace de los desplazamientos y fuerzas a las que está sujeto el diafragma y aquellas son función de la excentricidad representada por el vector $\{M\}$.

b). El método es estático. La metodología desarrollada se aplica, como se dijo, en el análisis tridimensional; sin embargo, este se usa, en la mayoría de las veces quizá, en edificios con estructuraciones raras o complejas, cuyas respuestas se apartan de las hipótesis de los reglamentos.

Tesis de Maestría

Es necesario, entonces, aplicar el análisis sísmico dinámico modal tridimensional de estos casos en los cuales se contemple la inercia de rotación de las masas. Sin embargo, las ecuaciones del movimiento de un sistema con tres grados de libertad por nivel (dos traslaciones y una rotación), están en función de la excentricidad, misma que depende de las fuerzas sísmicas que aún no se conocen.

Así pues, debido a que el centro de torsión no es un invariante, no tiene sentido hablar de análisis sísmico dinámico aplicado al método expuesto.



Bibliografía

- Aranda, R. y Rascón, O.** (1986), "An improved method for seismic analysis of buildings irregular in elevation", Procs VIII European Conference on Earthquake Engineering, Vol 3, 6.6/9-6.6/16, Lisboa, Portugal.
- Bazan, E.** (1977), "Análisis sísmico de edificios con muros rigidizantes", Primer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, México, D.F.
- Bazan, E. y Meli, R.** (1985), "Manual de diseño sísmico de edificios", Editorial Limusa, México, D.F.
- Bazan, E. y Meli, R.** (1998), "Diseño sísmico de edificios", Editorial Limusa, México, D.F.
- Cruz, E. y Chopra, A.** (1986), "Simplified procedures for earthquake analysis of buildings", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol 112, No 3, 461-480, EUA.
- Damy, J.** (1977), "Diagonalización de matrices de rigidez de edificios", Primer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, México, D.F.
- Damy, J. y Alcocer, S.** (1987), "Obtención del centro de torsión de edificios", VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Querétaro, México.
- Damy, J.** (1988), "Comentarios al inciso 8.6 de las Normas Técnicas Complementarias Para Diseño por Sismo", Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, No. 33, México, D.F.
- Lehmann, Ch. H.** (1978), "Geometría Analítica", Editorial UTEHA, México, D.F.
- Lermo, J., Cruz, J., Hernández, J., Vargas, A., Almanza, J., y Torres, G.** (1995), "Efectos de sitio en el Puerto de Veracruz, México. Microzonificación sísmica preliminar", XX Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, Veracruz, Ver.
- NTDS** (1995), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo", Gaceta Oficial del Distrito Federal, México, D.F.
- Newmark, N. M. y Rosenblueth, E.** (1976), "Fundamentos de ingeniería sísmica", Editorial Diana, México, D.F.
- Peña, Pardo B.** (1995), "Apuntes de la Clase Ingeniería Sísmica", Facultad de Ingeniería, U. V., Veracruz, Ver.
- Peña, Pardo B.** (1995), "Apuntes de la Clase Dinámica Estructural", Instituto de Ingeniería, U. V., Veracruz, Ver.

Tesis de Maestría

Peña, Pardo B. (1996), "Apuntes de la Clase Elemento Finito", Instituto de Ingeniería, U. V., Veracruz, Ver.

RCDF (1987), "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Gaceta Oficial del Distrito Federal, México, D.F.

RCDF (1993), "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Gaceta Oficial del Distrito Federal, México, D.F.



Apéndice A

Programa de computadora

Se presenta el programa de computadora BIDIMPC. El programa fuente fue codificado en Lenguaje Fortran 77, dicho programa puede ser ejecutable usando el compilador Fortran 4, Fortran 90 o Fortran 95. En esta sección se presentan sus aspectos esenciales.

A.1 DESCRIPCIÓN GLOBAL

El programa **BIDIMPC** tiene como objetivo principal, servir de herramienta de cálculo al ingeniero en estructuras, facilitándole el diseño sísmico de edificios, siguiendo las recomendaciones del *Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1993 (RCDF 1993)*.

A.2 CARACTERÍSTICAS

El programa se desarrolló siguiendo fundamentalmente el método basado en rigideces de entepiso descrito en la sección 3.1. Las características principales para la ejecución del programa son:

- ✧ El manejo de datos de entrada y salida se realiza mediante archivos tipo texto, en el que se lee un archivo de datos y se crean archivos específicos de resultados.
- ✧ El programa cubre el análisis sísmico de edificios aun cuando los elementos resistentes no estén ubicados en dos direcciones ortogonales.

A.3 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

El programa esta estructurado mediante subrutinas de la siguiente forma:

- DATOS** : Subrutina donde se capturan los datos de entrada.
ROTAC : Subrutina que efectúa las rotación de los ejes coordenados.
TRASL : Subrutina que efectúa la traslación al centro de torsión de los ejes rotados.
DISTR : Subrutina que efectúa la distribución del cortante sísmico de entrepiso entre los ejes resistentes del edificio tomando en cuenta las amplificaciones en la excentricidad estática estipuladas en el RCDF 1993.

A.4 PROGRAMA FUENTE BIDIMPC

```

C      BIDIMPC.FOR
C      *****
C      ANALISIS SISMICO ESTATICO
C      DE EDIFICIOS
C      Ing. Angel Ponce Cordova
C      *****
C      Metodo Desarrollado por el Ing. Julio Dany Rios
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION V(20),XM(20),YM(20),XC(20),YC(20),X(20),Y(20),BETA(20),
*      XP(20),YP(20),BETAP(20),XCP(20),YCP(20),XTP(20),YTP(20),
*      XTR(20),YTR(20),XCTR(20),YCTR(20),D(20)
C      REAL K(20),KXXP,KYYP,KTT
C      CHARACTER*50 INDEX
C
C      OPEN(5,FILE=' ')
C      OPEN(6,FILE=' ')
C
C      READ(5,'(A)') INDEX
C      READ(5,*) NN
C      READ(5,*) (V(I),XM(I),YM(I),XC(I),YC(I),I=1,NN)
C      WRITE(6,10) INDEX
C      WRITE(6,20) (I,V(I),XM(I),YM(I),XC(I),YC(I),I=1,NN)
C
C      DO 15 I=NN,1,-1
C
C      CALL DATOS (I,NM,X,Y,BETA,K,BX,BY)
C      CALL ROTAC (I,NM,BETA,K,X,Y,XC,YC,XP,YP,BETAP,GAMMA,XCP,YCP,KXXP,
*      KYYP)
C      CALL TRASL (I,NM,BETAP,K,XP,YP,KTT,D,GAMMA,XCP,YCP,XCTR,YCTR,XTR,
*      YTR)
C      FI=-GAMMA
C      WRITE(6,30) FI*57.29577951
C      CALL DISTR (I,NM,BETAP,XCTR,YCTR,FI,BY,K,KXXP,KYYP,KTT,V,XTR,YTR)
C      FI=1.5707963-GAMMA
C      WRITE(6,40) FI*57.29577951
C      CALL DISTR (I,NM,BETAP,XCTR,YCTR,FI,BX,K,KXXP,KYYP,KTT,V,XTR,YTR)
15  CONTINUE
C
10  FORMAT(/,20X,A,/,4X,'NIVEL',4X,'CORTANTE DE',9X,'CENTRO MASAS',
*      5X,'CENTRO CORTANTE',/,18X,'ENT V',9X,'XM',8X,'YM',8X,
*      'XC',8X,'YC',/,20X,'(ton)',8X,'(m)',7X,'(m)',7X,'(m)',7X,
*      '(m)',/,4X,62('-'))
    
```



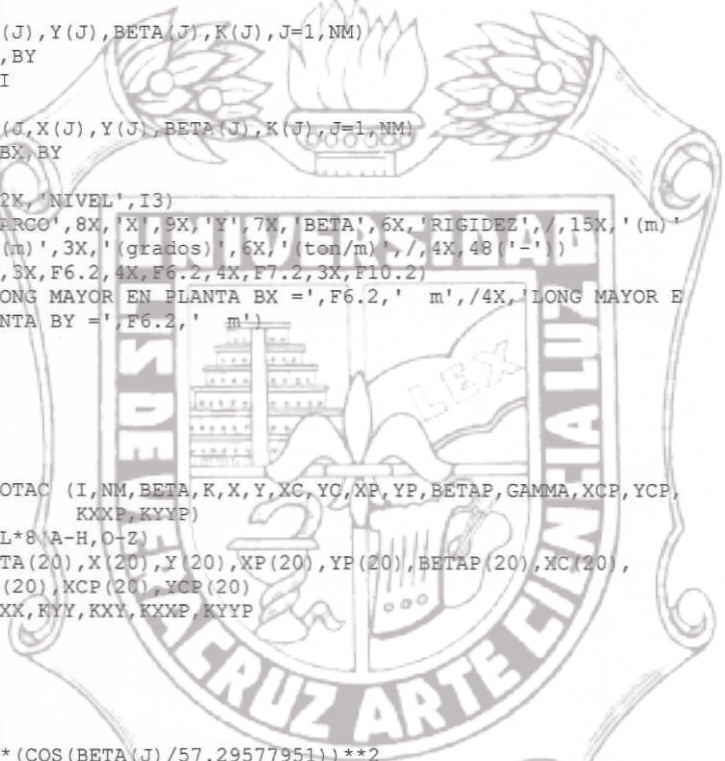
```

20 FORMAT(7X,I2,8X,F8.2,5X,F6.2,4X,F6.2,4X,F6.2,4X,F6.2)
30 FORMAT(///,20X,'SISMO EN X  ANGULO= ',F7.2,' grados')
40 FORMAT(///,20X,'SISMO EN Y  ANGULO= ',F7.2,' grados')
C
STOP
END

SUBROUTINE DATOS (I,NM,X,Y,BETA,K,BX,BY)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION VX(20),VY(20),XM(20),YM(20),XC(20),YC(20),X(20),Y(20),
* BETA(20)
REAL K(20)
C
READ(5,*) NM
READ(5,*) (X(J),Y(J),BETA(J),K(J),J=1,NM)
READ(5,*) BX,BY
WRITE(6,10) I
WRITE(6,20)
WRITE(6,30) (J,X(J),Y(J),BETA(J),K(J),J=1,NM)
WRITE(6,40) BX,BY
C
10 FORMAT(///,22X,'NIVEL',I3)
20 FORMAT(4X,'MERC',8X,'X',9X,'Y',7X,'BETA',6X,'RIGIDEZ',/,15X,'(m)'
* ,7X,'(m)',3X,'(grados)',6X,'(ton/m)',/,4X,48(' '-))
30 FORMAT(7X,I2,5X,F6.2,4X,F6.2,4X,F7.2,3X,F10.2)
40 FORMAT(4X,'LONG MAYOR EN PLANTA BX =',F6.2,' m',/4X,'LONG MAYOR E
* N PLANTA BY =',F6.2,' m')
C
RETURN
END

SUBROUTINE ROTAC (I,NM,BETA,K,X,Y,XC,YC,XP,YP,BETAP,GAMMA,XCP,YCP,
* KXXP,KYYP)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION BETA(20),X(20),Y(20),XP(20),YP(20),BETAP(20),XC(20),
* YC(20),XCP(20),YCP(20)
REAL K(20),KXX,KYY,KXY,KXXP,KYYP
C
KXX=0.
KYY=0.
KXY=0.
DO 15 J=1,NM
KXX=KXX+K(J)*(COS(BETA(J)/57.29577951))**2
KYY=KYY+K(J)*(SIN(BETA(J)/57.29577951))**2
15 KXY=KXY+K(J)*COS(BETA(J)/57.29577951)*SIN(BETA(J)/57.29577951)
KXXP=(KXX+KYY)/2.+(((KXX-KYY)/2.)**2.+KXY**2.)**0.5
KYYP=(KXX+KYY)/2.-(((KXX-KYY)/2.)**2.+KXY**2.)**0.5
C
GAMMA=ATAN(-KXY/(KYY-KXXP))
C
DO 25 J=1,NM
XP(J)=X(J)*COS(GAMMA)+Y(J)*SIN(GAMMA)
YP(J)=Y(J)*COS(GAMMA)-X(J)*SIN(GAMMA)
25 BETAP(J)=BETA(J)-(GAMMA*57.29577951)
C
XCP(I)=XC(I)*COS(GAMMA)+YC(I)*SIN(GAMMA)
YCP(I)=YC(I)*COS(GAMMA)-XC(I)*SIN(GAMMA)
C
WRITE(6,10) KXX,KYY,KXY,KXXP,KYYP,GAMMA*57.29577951
WRITE(6,20)
WRITE(6,30) (J,XP(J),YP(J),BETAP(J),J=1,NM)
WRITE(6,40) XCP(I),YCP(I)
C
10 FORMAT(///,4X,'KXX  =',F12.2,' ton/m',/,4X,'KYY  =',F12.2,' t
* on/m',/,4X,'KXY  =',F12.2,' ton/m',/,4X,'KXXP =',F12.2,
* ' ton/m',/,4X,'KYYP =',F12.2,' ton/m',/,4X,'GAMMA =',5X,
* F7.2,' grados')

```



**Instituto de Ingeniería
 Universidad Veracruzana**

Tesis de Maestría

```
20 FORMAT (//, 4X, 'MARCO', 7X, 'XP', 8X, 'YP', 6X, 'BETAP', /, 15X, ' (m) ', 7X, ' (m) '
*      ', 3X, ' (grados) ', /, 4X, 35 ('-'))
30 FORMAT (7X, I2, 3X, F6.2, 4X, F6.2, 4X, F7.2)
40 FORMAT (/, 4X, 'X CORT ROTADO = ', F6.2, ' m', /, 4X, 'Y CORT ROTADO
*      = ', F6.2, ' m')
```

C

```
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE TRASL (I, NM, BETAP, K, XP, YP, KTT, D, GAMMA, XCP, YCP, XCTR,
*      YCTR, XTR, YTR)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION XP (20), YP (20), BETAP (20), XTR (20), YTR (20), XCP (20), YCP (20),
*      XCTR (20), YCTR (20), D (20)
REAL K (20), KTT
```

C

```
S1=0.
S2=0.
S3=0.
S4=0.
S5=0.
S6=0.
DO 15 J=1, NM
```

C

```
S1=S1+XP (J) *K (J) *SIN (BETAP (J) /57.29577951)**2.
S2=S2+YP (J) *K (J) *COS (BETAP (J) /57.29577951) *SIN (BETAP (J) /57.2957795
*1)
S3=S3+K (J) *SIN (BETAP (J) /57.29577951)**2.
S4=S4+YP (J) *K (J) *COS (BETAP (J) /57.29577951)**2.
S5=S5+XP (J) *K (J) *COS (BETAP (J) /57.29577951) *SIN (BETAP (J) /57.2957795
*1)
15 S6=S6+K (J) *COS (BETAP (J) /57.29577951)**2.
```

C

```
XTP=(S1-S2)/S3
YTP=(S4-S5)/S6
XT=XTP*COS (-GAMMA) +YTP*SIN (-GAMMA)
YT=YTP*COS (-GAMMA) -XTP*SIN (-GAMMA)
```

C

```
XCTR (I) =XCP (I) -XTP
YCTR (I) =YCP (I) -YTP
```

C

```
KTT=0.
DO 25 J=1, NM
XTR (J) =XP (J) -XTP
YTR (J) =YP (J) -YTP
D (J) =XTR (J) *SIN (BETAP (J) /57.29577951) -YTR (J) *COS (BETAP (J) /57.29577
*951)
KTT=KTT+K (J) *D (J) **2.
25 CONTINUE
```

C

```
WRITE (6, 10)
WRITE (6, 20) (J, XTR (J), YTR (J), D (J), J=1, NM)
WRITE (6, 30) XCTR (I), YCTR (I)
WRITE (6, 40) XTP, YTP
WRITE (6, 50) XT, YT
```

C

```
10 FORMAT (//, 4X, 'MARCO', 7X, 'XTRAS', 8X, 'YTRAS', 10X, 'D', /, 18X, ' (m) ', 10X
*      ', (m) ', 8X, ' (m) ', /, 4X, 41 ('-'))
20 FORMAT (7X, I2, 6X, F6.2, 7X, F6.2, 4X, F7.2)
30 FORMAT (/, 4X, 'X CORT TRASLADA = ', F6.2, ' m', /, 4X, 'Y CORT TRASLADA
*      = ', F6.2, ' m')
40 FORMAT (/, 4X, 'CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES PRINCIPALES',
*      /, 4X, 'X TORSION = ', F6.2, ' m', /, 4X, 'Y TORSION
*      = ', F6.2, ' m')
50 FORMAT (/, 4X, 'CENTRO DE TORSION RESPECTO A LOS EJES ORIGINALES',
*      /, 4X, 'X TORSION = ', F6.2, ' m', /, 4X, 'Y TORSION
*      = ', F6.2, ' m')
```

C

```
RETURN
```

END

SUBROUTINE DISTR (I, NM, BETAP, XCTR, YCTR, FI, B, K, KXXP, KYYP, KTT, V,
* XTR, YTR)

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)

DIMENSION BETAP (20), XTR (20), YTR (20), XCTR (20), YCTR (20), V (20)

REAL K (20), KXXP, KYYP, KTT

C

E=XCTR(I)*SIN(FI)-YCTR(I)*COS(FI)

SGN=SIGN(1.,E)

E1=(1.5*ABS(E)+0.1*B)*SGN

E2=(ABS(E)-0.1*B)*SGN

C

WRITE(6,10) E

WRITE(6,20) E1,E2

C

DO 15 J=1,NM

VA=K(J)*V(I)*(((COS(FI)/KXXP-YTR(J)*E1/KTT)*COS(BETAP(J)/57.295

*77951))+((SIN(FI)/KYYP+XTR(J)*E1/KTT)*SIN(BETAP(J)/57.29577951)))

VB=K(J)*V(I)*(((COS(FI)/KXXP-YTR(J)*E2/KTT)*COS(BETAP(J)/57.295

*77951))+((SIN(FI)/KYYP+XTR(J)*E2/KTT)*SIN(BETAP(J)/57.29577951)))

WRITE(6,30) J,VA,VB

15

CONTINUE

C

10 FORMAT(25X,'EXC ESTATICA =',F6.2,' m')

20 FORMAT(14X,'EXC DISEÑO 1 =',F6.2,' m',5X,'EXC DISEÑO 2 =',F6.2,

* ' m',//,4X,'MARCO',27X,'VA',27X,'VB',/,33X,'(ton)',24X,

* '(ton)',/,4X,63(' '))

30

FORMAT(7X,I2,23X,F6.2,23X,F6.2)

C

RETURN

END



Apéndice B

Comentarios al inciso 3.1

Se presenta la deducción de las expresiones para las coordenadas del centro de torsión así como de la expresión que define la magnitud de la fuerza cortante que le corresponde a cada elemento resistente del entrepiso para el caso en el que no se desean determinar los ejes principales de rigidez. Es decir, a partir de los ejes coordenados originales.

Como se vio en la sección 2.2, aplicando las ecuaciones de equilibrio al edificio, se tienen las ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\{V\} = [K] \{D\} \quad (\text{B.2})$$

Para la solución matemática de la distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio, se procedió anteriormente en el inciso 3.1 a la diagonalización de la matriz de rigideces $[K]$, haciéndolo en dos etapas; primero se efectuó una rotación de ejes coordenados (a los nuevos ejes se les llamo ejes principales de rigidez); y segundo, se efectuó una traslación de los ejes principales de rigidez a un punto CT llamado centro de torsión; diagonalizada la matriz se determinó la expresión que define la magnitud de la fuerza cortante que le corresponde a cada elemento resistente del entrepiso. A diferencia de este proceder, aquí trabajaremos con la matriz de rigideces original sin diagonalizar (expresión B.1)

B.1 Coordenadas del centro de torsión

El cálculo de las coordenadas del centro de torsión consiste en la obtención del vector de momentos $\{M\}$, que es necesario aplicar en el edificio para impedir giros relativos de los niveles, y

del cociente de este entre las fuerzas cortantes lo que permite definir la posición del centro de torsión. Se debe, entonces, considerar dos direcciones del sismo:

- Sismo en X
- Sismo en Y

a. Sismo en X

El sismo actúa en dirección paralela al eje global X, en sentido positivo; por tanto

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{x0} \\ D_{y0} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos el vector de desplazamientos directos, es decir sin torsión ($\theta = 0$)

$$\begin{Bmatrix} D_{x0} \\ D_{y0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_{xx}K_{yy} - K_{xy}^2} \begin{Bmatrix} K_{yy}V_x \\ -K_{xy}V_x \end{Bmatrix}$$

Con la solución del sistema de ecuaciones anterior podemos obtener los momentos de entepiso que, aplicados junto con el sismo en X, impiden la torsión mediante la siguiente expresión

$$\{M_0\} = \begin{bmatrix} K_{\theta x} & K_{\theta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{x0} \\ D_{y0} \end{Bmatrix}$$

$$\{M_0\} = \frac{1}{K_{xx}K_{yy} - K_{xy}^2} \{K_{\theta x}K_{yy}V_x - K_{\theta y}K_{xy}V_x\}$$

Ya que el vector de momentos $\{M_0\}$ esta referido al origen del sistema coordenado, podemos dividir sus elementos entre la cortante del entepiso correspondiente, definiendo así la ordenada del centro de torsión del entepiso. Así, se puede establecer que

$$(y_T) = -\frac{(M_0)}{V}$$

por lo tanto

$$(y_T) = \frac{-K_{yy} K_{\theta x} + K_{xy} K_{\theta y}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2}$$

Sustituyendo los valores de $K_{\theta x}$, $K_{\theta y}$ así como el valor de r_j ($r_j = \text{sen} \beta_j x_j - \text{cos} \beta_j y_j$)

implícito en dichos términos, obtenemos finalmente

$$(y_T) = \frac{K_{yy} (\sum K_j y_j \cos^2 \beta_j - \sum K_j x_j \text{sen} \beta_j \cos \beta_j) + K_{xy} (\sum K_j x_j \text{sen}^2 \beta_j - \sum K_j y_j \text{sen} \beta_j \cos \beta_j)}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} \quad (\text{B.3})$$

b. Sismo en Y

El desarrollo es análogo al sismo en X, tal que

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{x0} \\ D_{y0} \end{Bmatrix}$$

por tanto, la abscisa del centro de torsión del entrepiso es

$$(x_T) = \frac{(M_0)}{V}$$

Sustituyendo y ordenando términos obtenemos finalmente

$$(x_T) = \frac{K_{xx} (\sum K_j x_j \text{sen}^2 \beta_j - \sum K_j y_j \text{sen} \beta_j \cos \beta_j) + K_{xy} (\sum K_j y_j \cos^2 \beta_j - \sum K_j x_j \text{sen} \beta_j \cos \beta_j)}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Distribución del cortante sísmico

Bajo la acción de la fuerza sísmica, la losa del edificio tendrá un desplazamiento de cuerpo rígido cuyas componentes serán D_x , D_y y θ . Análogamente al planteamiento de la matriz de rigideces del entrepiso, se observa que, proyectando las componentes del desplazamiento general del entrepiso en cada marco, podemos conocer su desplazamiento que afectado de su rigidez nos

da su cortante sísmico, generalizando las proyecciones sobre el marco j , sabemos que el desplazamiento lateral del mismo es la suma de las proyecciones de D_x , D_y y θ , de manera que

$$d_j = D_x \cos\beta_j + D_y \sin\beta_j + \theta \cdot r_j$$

Los desplazamientos D_x , D_y y el giro θ se pueden conocer resolviendo el sistema de ecuaciones B.1

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Considerando traslación pura ($D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, $\theta = 0$) obtenemos

$$D_x = \frac{V_x K_{yy} - V_y K_{xy}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2}$$

$$D_y = \frac{V_y K_{xx} - V_x K_{xy}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2}$$

Ahora considerando rotación pura ($D_x = 0$, $D_y = 0$, $\theta \neq 0$) obtenemos inmediatamente

$$\theta = \frac{M}{K_{\theta\theta}} = \frac{V \cdot e}{K_{\theta\theta}}$$

Sustituyendo estos valores en el desplazamiento general del marco j resulta

$$d_j = \left(\frac{V_x K_{yy} - V_y K_{xy}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} \right) \cos\beta_j + \left(\frac{V_y K_{xx} - V_x K_{xy}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} \right) \sin\beta_j + \frac{V \cdot e}{K_{\theta\theta}} (\sin\beta_j x_j - \cos\beta_j y_j)$$

Desplazamiento que multiplicado por la rigidez del marco nos da el cortante sísmico

$$V_j = K_j d_j$$

Sustituyendo el valor de d_j , recordando que $V_x = V \cos \Psi$, $V_y = V \sin \Psi$, factorizando y agrupando términos semejantes, tenemos que la fuerza cortante del marco j estará dada por la expresión

$$V_j = K_j V \left[\frac{(\cos \beta_j K_{yy} - \sin \beta_j K_{xy}) \cos \Psi + (\sin \beta_j K_{xx} - \cos \beta_j K_{xy}) \sin \Psi}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} + \frac{e}{K_{\theta\theta}} (\sin \beta_j x_j - \cos \beta_j y_j) \right] \quad (\text{B.5})$$

donde e es la distancia del centro de torsión a la línea de acción de la fuerza cortante y se puede incrementar para fines de diseño de acuerdo con lo que se indica en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1993 (RCDF 1993).

