



**UNIVERSIDAD VERACRUZANA**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**“SOLUCIÓN A PROBLEMAS DE TORSIÓN POR EL MÉTODO DE  
ELEMENTO FINITO”**



QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS**

P R E S E N T A :

**GILBERT FRANCISCO TORRES MORALES .**

H. VERACRUZ, VER.

JULIO DE 1999



UNIVERSIDAD VERACRUZANA  
INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., a 17 de Mayo de 1999  
DI300/99

Al candidato al Grado:  
ING. GILBERT FRANCISCO TORRES MORALES  
PRESENTE:

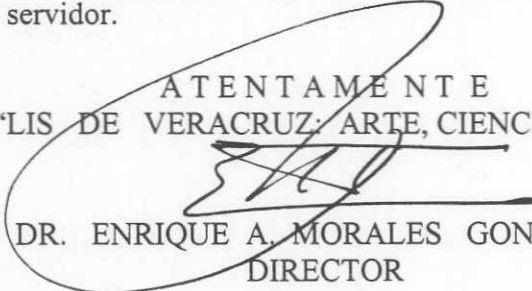
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Dr. Bonifacio C.A. Peña Pardo, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestro en Ingeniería de Estructuras:

TEMA:  
"SOLUCION A PROBLEMAS DE TORSION POR EL METODO DE  
ELEMENTO FINITO"

- Introducción
- I.- Fundamento de Elasticidad
  - II.- Teoría Clásica de Torsión
  - III.- Elemento Finito
  - IV.- Tratamiento del problema de torsión por el método de elemento finito
  - V.- Programa de Computo para resolver problemas de torsión
- Conclusiones  
Apéndices  
Bibliografía

Sin otro particular, me es grato quedar de Usted como su atento y seguro servidor.

ATENTAMENTE  
"LIS DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"

  
DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ  
DIRECTOR

EMG/mcm\*

*A mis padres Rubén Torres Lagunes y Evangelina Morales de Torres con agradecimiento y cariño, en especial a mi madre por sus consejos y apoyo incondicional a todos mis proyectos, con lo que ha hecho de muchos de mis sueños una realidad.*

*A mis hermanos Rubén A. Torres Morales y Ana Luisa Torres Morales con mucho cariño.*

*Al Dr. Bonifacio C. A. Peña Pardo por su amistad, paciencia y apoyo demostrados siempre, en especial durante la dirección de esta tesis.*



SOLUCIÓN A PROBLEMAS DE TORSIÓN POR EL MÉTODO  
DE ELEMENTO FINITO.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

I.- FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD.

- 1.1.- Estado general de esfuerzos.
- 1.2.- Tensor de esfuerzo.
- 1.3.- Fuerzas de cuerpo y de superficie.
- 1.4.- Equilibrio del elemento.
- 1.5.- Desplazamiento, deformación.
- 1.6.- Estado general de deformaciones.
- 1.7.- Ley de Hooke.

II.- TEORÍA CLÁSICA DE TORSIÓN.

- 2.1.- Introducción .
- 2.2.- Torsión en miembros de sección circular.
- 2.3.- Torsión de barras prismáticas.
- 2.4.- Barras de sección transversal elíptica.
- 2.5.- Barras de sección transversal triangular.
- 2.6.- Analogía de la membrana.
- 2.7.- Torsión de barras de sección rectangular estrecha .
- 2.8.- Torsión de barras de sección rectangular.
- 2.9.- Torsión de perfiles laminados .

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## III.- ELEMENTO FINITO.

- 3.1.- Introducción .
- 3.2.- Solución de problemas de valores de frontera.
  - 3.2.1.- Método de las diferencias finitas.
  - 3.2.2.- Método variacional.
  - 3.2.3.- Método de residuos ponderados.
    - Método de colocación.
    - Método de subdominio.
    - Método de Galerkin.
    - Método de mínimos cuadrados.
- 3.3.- Formulaciones por energía potencial.
- 3.4.- Método de elemento finito.
- 3.5.- Elementos bidimensionales.
  - 3.5.1.- Elemento triangular.
  - 3.5.2.- Elemento rectangular.
- 3.6.- Diferentes sistemas de coordenadas.
  - 3.6.1.- Sistemas de coordenadas locales.
  - 3.6.2.- Sistemas de coordenadas naturales.
    - Coordenadas de área.
  - 3.6.3.- Integración en diferentes sistemas de coordenadas.
- 3.7.- Ecuación continua de interpolación o aproximación.

## IV.- TRATAMIENTO DEL PROBLEMA DE TORSIÓN POR EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

- 4.1.- Ecuaciones de campo bidimensionales.
  - 4.1.1.- Ecuación diferencial para la torsión.
  - 4.1.2.- Ecuaciones integrales para las matrices de elemento.
  - 4.1.3.- Matrices de elemento.
    - Elementos triangulares.
    - Elementos rectangulares.
- 4.2.- Aplicación del método de elemento finito a un problema de torsión.
  - 4.2.1. Teoría general .
  - 4.2.2. Solución por elemento finito de la torsión de una barra rectangular.
    - Componentes de esfuerzo cortante.
    - Evaluación del momento torsionante.

## V.- PROGRAMA DE CÓMPUTO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE TORSIÓN.

- 5.1.- Programa de cómputo para problemas de campo bidimensionales.
- 5.2.- Descripción del programa ( TOR.EXE ).
  - 5.2.1.-Subrutinas.
    - Subrutinas de generación de malla.
    - Subrutinas que grafican la malla.
- 5.3.- Solución de problemas clásicos de torsión con ayuda de programa de computadora (TOR.EXE).
  - 5.3.1.-Sección rectangular.
  - 5.3.2.-Sección circular.
  - 5.3.3.-Sección elíptica.
  - 5.3.4.-Sección triangular equilátera.
  - 5.3.5.-Sección rectangular estrecha.
  - 5.3.6.-Sección "I" perfiles laminados.

CONCLUSIONES.

APÉNDICES :

- A.- Datos de entrada para programa "TOR.EXE".
- B.- Listado de programa "TOR".

BIBLIOGRAFÍA.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## INTRODUCCIÓN :

El estudio del problema de torsión por el método de elemento finito, resulta de gran interés ya que durante los sismos destructivos recientes, la torsión y sus efectos han sido evidentes en los elementos estructurales. El efecto de torsión en los elementos estructurales cuando es causado indirectamente por otros fenómenos es de gran complejidad, por lo que resulta de interés aislar y estudiar el problema desde sus fundamentos teóricos y formulaciones clásicas, así como implementar el método de elemento finito a este problema, con lo que se obtiene una solución numérica aproximada de precisión aceptable.

El objetivo del presente trabajo es implementar el método de elemento finito al problema de torsión. El método de elemento finito es un método numérico que permite modelar un proceso de la naturaleza con ayuda de una computadora, todos los fenómenos en la naturaleza pueden ser descritos en términos de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales, que relacionan valores de interés del fenómeno, a este proceso se le conoce como *formulación matemática del proceso físico*, esta formulación es presentada en los dos primeros capítulos; en el capítulo uno se discute el planteamiento de las ecuaciones de elasticidad, en las que se fundamentan las teorías clásicas de torsión y en el capítulo dos se hace un recuento de los planteamientos clásicos de torsión y las soluciones analíticas que para las secciones más comunes se tiene, con esto tendremos una ecuación diferencial que describe el problema de torsión matemáticamente. El siguiente paso será el análisis numérico del modelo matemático.

Ocuparemos el método de elemento finito para resolver la ecuación diferencial que describe la torsión, específicamente la formulación integral de residuos ponderados y el método de Galerkin. El método de elemento finito en general aproxima un dominio geométrico mediante una colección de subdominios simples, llamados elementos finitos. Para cada elemento finito se obtienen funciones de aproximación, usando la idea básica de que cualquier función continua puede ser representada por una combinación de polinomios algebraicos, las funciones de aproximación son obtenidas usando conceptos de la teoría de interpolación y son por lo tanto llamadas funciones de interpolación. En el método de residuos ponderados, el número de funciones de ponderación es igual al número de coeficientes desconocidos, lo que nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales para encontrar estos parámetros desconocidos, estos representan valores de un número finito de puntos preseleccionados llamados nodos, en la frontera y en el interior del elemento.

Los fundamentos de elemento finito y el tratamiento del problema de torsión por elemento finito, son tratados en los capítulos tres y cuatro de la siguiente forma; en el capítulo tres se presenta una introducción del método de elemento finito desde sus bases hasta los principios básicos que sirven para desarrollar el método hacia el problema de torsión; en el capítulo cuatro se trata el problema de torsión con el método de elemento finito, se plantean sus ecuaciones y se resuelve un ejemplo clásico sencillo paso a paso, ejemplificando la mecánica del método. A partir de lo anterior, en el capítulo cinco, se desarrolla un programa de cómputo fundamentado en los principios de elemento finito para resolver problemas de torsión, con el que podremos comparar la teoría clásica y el planteamiento por elemento finito, evaluando ejemplos clásicos de torsión; en este capítulo se resuelven dos o tres mallas de cada problema, se hace un resumen de los resultados y se grafican, con el objeto de observar la convergencia del método y aplicarlo para la solución de toda clase de elementos sometidos a torsión, posteriormente se presentan conclusiones y una sección de apéndice, donde en el apéndice A se indica la manera de hacer el archivo de datos para ocupar el programa "TOR.EXE" y en el apéndice B se presenta el listado del programa, posteriormente se hace referencia a la bibliografía consultada para éste trabajo.



## CAPÍTULO I.

### FUNDAMENTOS DE LA ELASTICIDAD.

#### 1.1.- ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS.

Las fuerzas que actúan sobre el contorno de un cuerpo, se transmiten por acción molecular al interior del cuerpo, debido a esto su influencia se manifiesta en todo éste. Considerando el cuerpo como un medio continuo y a las fuerzas externas como esfuerzos de superficie, su influencia se manifestará en esfuerzos locales en cada uno de los puntos internos del cuerpo. Las fuerzas internas responden a la aplicación de fuerzas externas tratando de mantener el equilibrio.



Figura. 1.1.1)

Aplicando el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo fig.1.1.2).

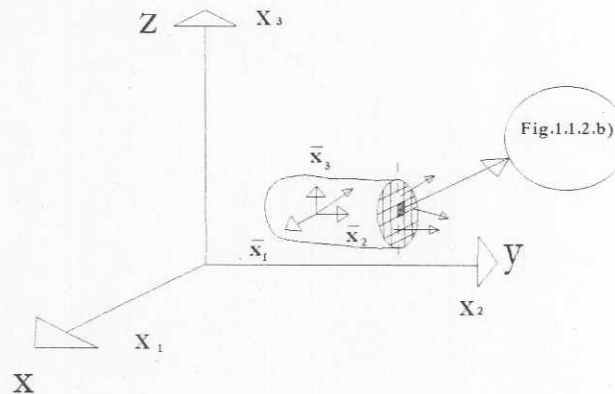


Figura. 1.1.2.a)

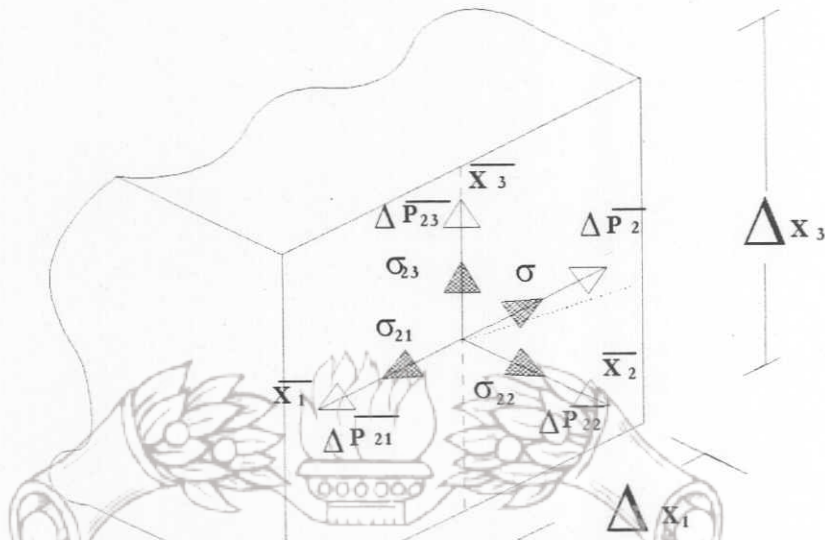


Figura. 1.1.2.b).

Las fuerzas que actúan sobre las áreas infinitesimales, son de magnitudes y direcciones variables, en general, se denomina *esfuerzo a la fuerza por unidad de área*, matemáticamente:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1.1.1)$$

En particular el corte de la fig.1.1.1) es perpendicular al eje  $X_2$  y  $\Delta \bar{P}_2$  es la fuerza resultante que actúa sobre  $\Delta A_2 = \Delta X_1 \Delta X_3$ , cuyas componentes son  $[\Delta \bar{P}_{21}, \Delta \bar{P}_{22}, \Delta \bar{P}_{23}]$ , el primer subíndice se refiere al plano en que actúa y el segundo al que es paralelo. Aplicando la definición de esfuerzo nos queda que :

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_{23}}{\Delta A_2} \quad (1.1.2)$$

### 1.2.- TENSOR DE ESFUERZO.

Si al elemento diferencial anterior fig.1.1.2) se le hacen pasar 3 pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, nos resultaría un cubo de dimensiones infinitesimales, aislándolo del cuerpo y colocando un sistemas de coordenadas locales en el punto de coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$ , tendríamos (fig.1.2.1).

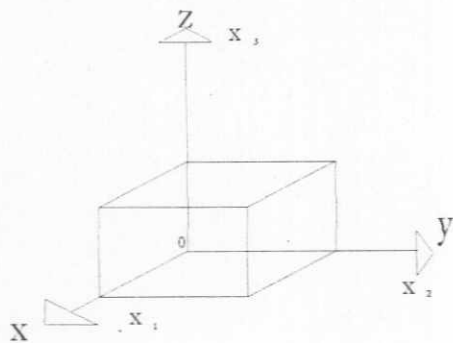
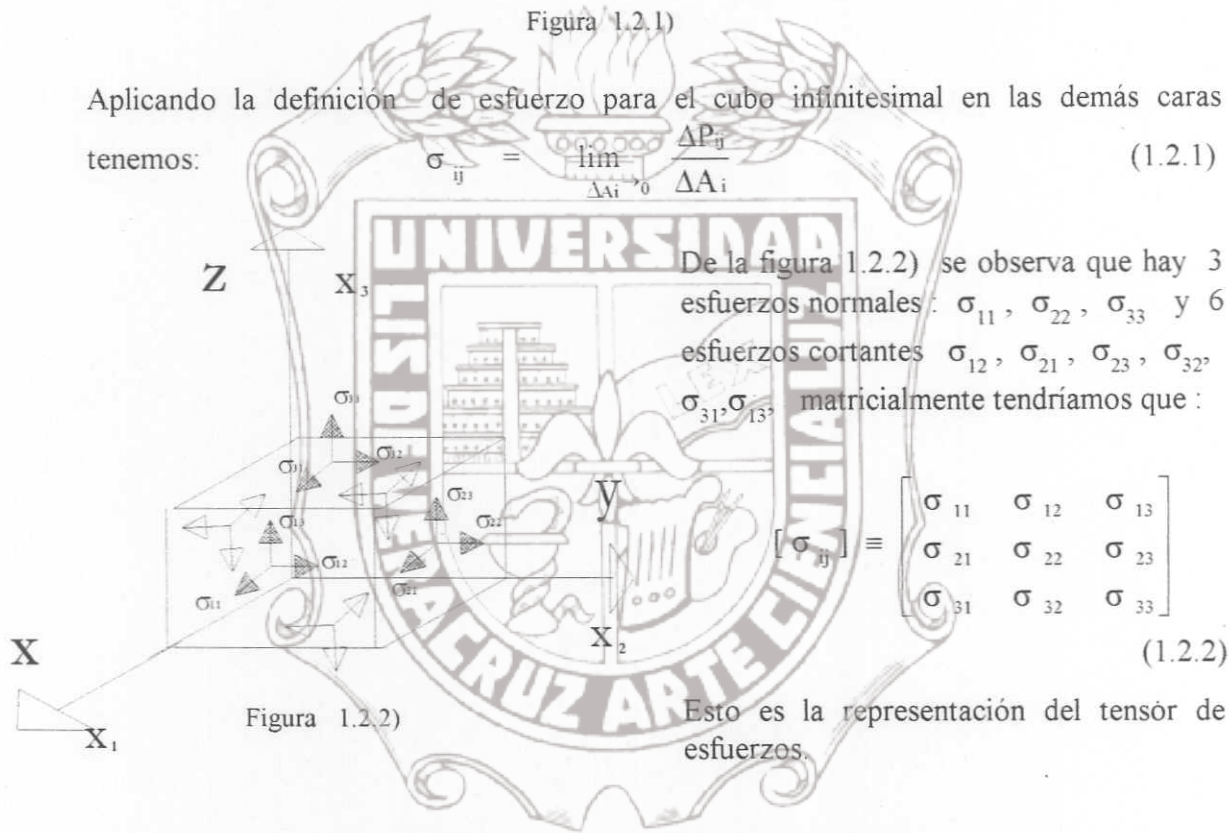


Figura 1.2.1)

Aplicando la definición de esfuerzo para el cubo infinitesimal en las demás caras tenemos:

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta P_{ij}}{\Delta A_i} \quad (1.2.1)$$



De la figura 1.2.2) se observa que hay 3 esfuerzos normales:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  y 6 esfuerzos cortantes  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{13}$ , matricialmente tendríamos que:

$$[\sigma_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

Esto es la representación del tensor de esfuerzos.

**1.3.- FUERZAS DE CUERPO Y DE SUPERFICIE .**

Los esfuerzos  $\sigma_{ij}$  varían a través del cuerpo y en su superficie deben estar en equilibrio con las fuerzas externas aplicadas en la superficie. En el mismo elemento diferencial, consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen  $\{x_i\}^T = [x_1, x_2, x_3]$ , y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{m_i\}^T = [m_1, m_2, m_3]$ , ambos actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la fig.1.3.1).

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

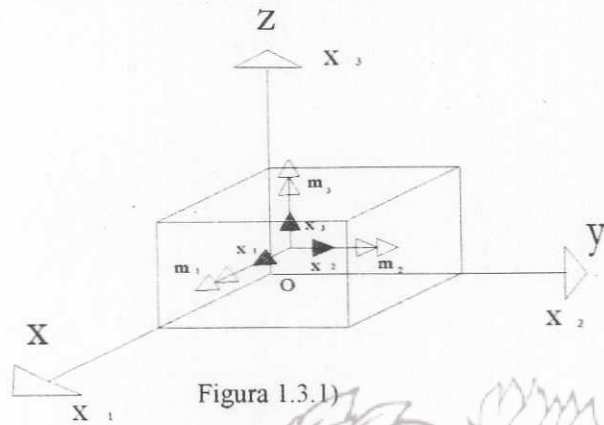


Figura 1.3.1)

Figura 1.3.1) Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen actuando en el centro de gravedad de la figura

$$x_i = \rho ( f_i - a_i ) \quad (1.3.1)$$

en donde :

$\rho$  = densidad o masa específica,  
 $f_i$  = la fuerza por unidad de masa en dirección  $x_i$ ,

$a_i$  = la aceleración del elemento en la dirección  $x_i$

Las fuerzas de superficie que actúan en la frontera del cuerpo las designaremos por  $\{ \bar{x}_i \}^T = [ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 ]$ , las fuerzas de superficie que deben satisfacer las condiciones de frontera para el punto  $i$  se observan en la fig. 1.3.2)



Figura 1.3.2) Equilibrio del punto " i " en la superficie.

Los esfuerzos varían de uno a otro punto del cuerpo y en su superficie deberán equilibrar a las fuerzas exteriores que actúan sobre la superficie del mismo. Las expresiones matemáticas de las condiciones de equilibrio relativas a la superficie, pueden obtenerse partiendo de lo siguiente. Los esfuerzos que actúan sobre las caras de un elemento cúbico vienen definidos por las componentes de esfuerzos, las tres componentes normales y las

seis tangenciales. Si en un punto cualquiera, se conoce estas componentes, podremos calcular mediante las ecuaciones de estática el esfuerzo que actúa sobre un plano de orientación arbitraria que pase por ese punto. Sea  $O$  un punto del cuerpo cargado y supongamos que se conocen los esfuerzos que actúan sobre los planos de coordenadas  $X_1X_2$ ,  $X_1X_3$ ,  $X_2X_3$ . Para determinar el esfuerzo que actúa en otro plano cualquiera que pase por  $O$ , tracemos a distancia muy pequeña de ese punto, el plano ABC paralelo al dado, el cual formará con los planos coordenados un tetraedro elemental, ABCO. Como según se ha supuesto, los esfuerzos varían de manera continua en todo el volumen del cuerpo, el esfuerzo que actúa sobre el plano ABC, al acercarse éste al origen, el elemento se hace infinitésimo, tenderá a un límite, que es el esfuerzo correspondiente al plano paralelo al mismo por el punto  $O$ .

Al establecer las condiciones de equilibrio del tetraedro elemental se podrán despreciar las fuerzas de cuerpo. Así mismo, podremos dejar de lado la variación del esfuerzo en las caras del elemento, por ser de orden infinitesimal y suponer una distribución uniforme de esfuerzos, de forma que las fuerzas que actúan sobre el tetraedro, se determinarán, multiplicando las áreas de sus caras por las respectivas componentes de los esfuerzos. Si con  $D$  denotamos el área de la cara ABC, las áreas de las otras caras se obtienen proyectando  $D$  sobre los tres planos coordenados. Si  $N$  es la normal al plano ABC tenemos :

$$\cos(Nx) = l = n_1, \quad \cos(Ny) = m = n_2, \quad \cos(Nz) = n = n_3 \quad (1.3.2)$$

las áreas de las otras tres caras del tetraedro serán :

$$Dl = Dn_1, \quad Dm = Dn_2, \quad Dn = Dn_3$$

Sean  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , las componentes de los esfuerzos que actúan en la cara ABC, paralelamente a los ejes respectivos. La componente según la dirección  $X_1$  de la fuerza que actúa sobre dicha cara será  $D \bar{x}_1$  y las componentes de las fuerzas que actúan en las tres caras del tetraedro, en la misma dirección será  $-Dn_1\sigma_{11}, -Dn_2\sigma_{21}, -Dn_3\sigma_{31}$ , y la fuerza de cuerpo será  $1/3Dh\bar{x}_1$ , donde  $h$  es la distancia normal del plano al origen, de manera que tendremos la siguiente ecuación de equilibrio del tetraedro

$$1/3 D h \bar{x}_1 + D \bar{x}_1 - Dn_1\sigma_{11} - Dn_2\sigma_{21} - Dn_3\sigma_{31} = 0$$

De manera análoga, proyectando las fuerzas sobre los ejes  $X_2$  y  $X_3$  se obtienen las otras dos ecuaciones de equilibrio y dividiendo luego ambos miembros de cada ecuación por el factor  $D$  y tomando límites cuando  $h \rightarrow 0$ ; podremos escribir :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ \bar{x}_2 &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ \bar{x}_3 &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Estas son las ecuaciones buscadas, ya que ellas nos permiten determinar las componentes que actúan en un plano cualquiera que pase por el punto  $O$ , de orientación definida por sus cosenos directores  $n_1, n_2, n_3$ , siempre que sean conocidas las componentes del tensor de esfuerzos, en dicho punto. Se considera que las ecuaciones (1.3.3) y el tetraedro ABCO (fig. 1.3.2) está dispuesto de manera que la cara ABC coincida con la superficie del cuerpo, estas ecuaciones son conocidas como *las ecuaciones de frontera*.

Del equilibrio de ABCO se obtiene en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (1.3.3')$$

o

$$[\sigma_{ij}]^T \{n_i\} = \{\bar{x}_j\} \quad (1.3.3'')$$

#### 1.4.- EQUILIBRIO DEL ELEMENTO ( $dx_i$ ) (ECUACIONES DE EQUILIBRIO).

Considerando el cubo representado en la figura 1.4.1), el cual además del estado general de esfuerzos que soporta, se encuentra sujeto a un sistema de fuerzas y momentos de cuerpo (fig. 1.3.1), las fuerzas y momentos de cuerpo pueden representarse como :

$$F_{x_1} = x_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad F_{x_2} = x_2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad F_{x_3} = x_3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$M_{x_1} = m_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad M_{x_2} = m_2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad M_{x_3} = m_3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

Las ecuaciones de equilibrio del elemento son :

$$\sum F_{x_j} = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_{x_j} = 0 \quad (1.4.1)$$

Consideremos además que los esfuerzos varían de una cara a otra ( opuesta ) de acuerdo

$$\text{con} \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + d\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dx_i \quad (1.4.2)$$

donde

$\sigma'_{ij}$  = esfuerzo en la cara positiva del cubo .

$\sigma_{ij}$  = esfuerzo correspondiente en la cara opuesta (-) del cubo .

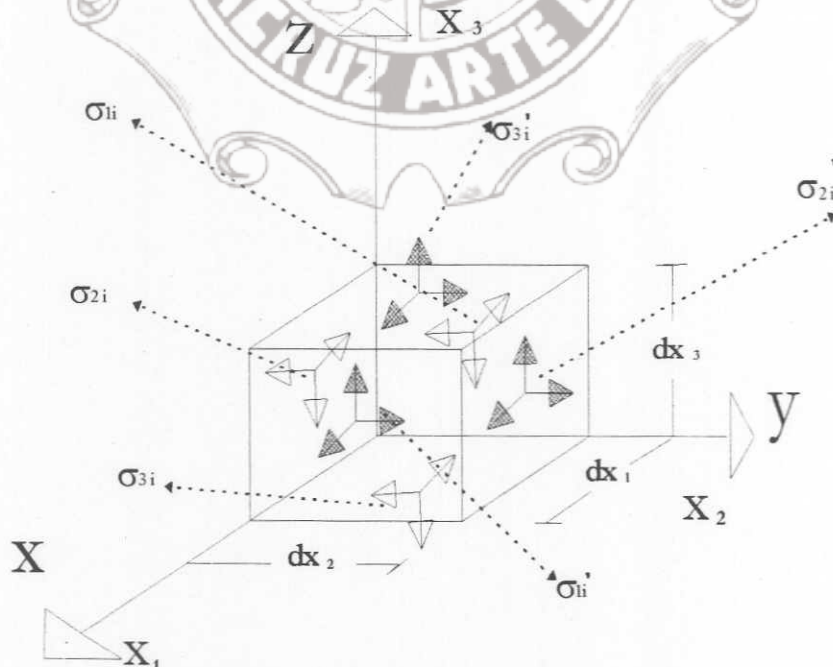


Figura. 1.4.1) Equilibrio de esfuerzos en el elemento  $dx_i$  (donde  $\sigma_{1i} = \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ , para  $i=1,2,3$ ).

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

como el cubo se encuentra en equilibrio puede establecerse que  $\Sigma Fx_j = 0$ .

$$\Sigma Fx_1 = 0$$

$$\sigma'_{11} dx_2 dx_3 + \sigma'_{21} dx_1 dx_3 + \sigma'_{31} dx_1 dx_2 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + x_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Sustituyendo en la ecuación el valor de  $\sigma'_{ij}$  y agrupando tendríamos:

$$(\sigma_{11} + d\sigma_{11} - \sigma_{11}) dx_2 dx_3 + (\sigma_{21} + d\sigma_{21} - \sigma_{21}) dx_1 dx_3 + (\sigma_{31} + d\sigma_{31} - \sigma_{31}) dx_1 dx_2 + x_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

nos quedaría:

$$d\sigma_{11} dx_2 dx_3 + d\sigma_{21} dx_1 dx_3 + d\sigma_{31} dx_1 dx_2 + x_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

de manera análoga, para las otras direcciones se tiene:

$$d\sigma_{12} dx_2 dx_3 + d\sigma_{22} dx_1 dx_3 + d\sigma_{32} dx_1 dx_2 + x_2 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$d\sigma_{13} dx_1 dx_3 + d\sigma_{23} dx_1 dx_2 + d\sigma_{33} dx_3 dx_2 + x_3 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Además recordando que:  $d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dx_i$  (1.4.3)

Lo cual, al sustituirse en las expresiones anteriores y dividiendo ambos miembros por  $dx_1 dx_2 dx_3 = \text{Vol}$ .

nos queda:  $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + x_1 = 0$  a) (1.4.4)

Análogamente para  $\Sigma Fx_2 = 0$ ,  $\Sigma Fx_3 = 0$ , tenemos respectivamente:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + x_2 = 0 \quad \text{b)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + x_3 = 0 \quad \text{c)}$$

Las 3 ecuaciones anteriores se conocen como *ecuaciones de equilibrio* para un punto del cuerpo. Por otra parte también se debe cumplir por equilibrio que  $\Sigma Mx_i = 0$ .

$$\Sigma Mx_1 = 0$$

$$(\sigma'_{23} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} - (\sigma'_{32} dx_1 dx_2) \frac{dx_3}{2} + (\sigma_{23} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} - (\sigma_{32} dx_1 dx_2) \frac{dx_3}{2} + m_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

se tiene de (1.4.2):  $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + d\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dx_i$

sustituyendo la expresión anterior para  $i=2, j=3$  y  $i=3, j=2$  tenemos:

$$\left[ \left( \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \right] \frac{dx_2}{2} - \left[ \left( \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \right] \frac{dx_3}{2} + \left( \sigma_{23} dx_1 dx_3 \right) \frac{dx_2}{2} - \left( \sigma_{32} dx_1 dx_2 \right) \frac{dx_3}{2} + m_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

dividiendo ambos miembros por  $dx_1 dx_2 dx_3 = vol$ , despreciando los diferenciales de segundo orden  $dx_i^2$  y efectuando operaciones algebraicas, se obtiene:

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} + m_1 = 0 \tag{1.4.5}$$

Análogamente para  $\Sigma M_{x_2}=0$  y  $\Sigma M_{x_3}=0$  tenemos respectivamente que:

$$\sigma_{31} - \sigma_{13} + m_2 = 0$$

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} + m_3 = 0$$

Las tres ecuaciones (1.4.5) junto con las otras tres (1.4.4) son las *ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares* y en su forma polar generalmente los momentos de cuerpo  $m_i=0$ , estos sistemas forman un conjunto de seis ecuaciones con nueve incógnitas, por lo que se concluye que no es posible resolverlo por consideraciones de estática únicamente. Cuando los momentos de cuerpo son nulos el sistema (1.4.5) queda:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{1.4.5'}$$

es decir el tensor de esfuerzos es simétrico  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Con lo que las nueve incógnitas se reducen a seis. Expresando (1.4.4) en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{1.4.4'}$$

o

$$[\sigma_{ij}] \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] + \{x_i\} = 0$$

Usando notación índice (1.4.4) se representa  $\sigma_{ij,i} + x_j = 0$  (1.4.4'')

en donde  $\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$

Si usamos notación índice en las ecuaciones (1.4.5) tenemos:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \tag{1.4.5'}$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



Si el problema consiste en determinar el estado de esfuerzo que se origina en un cuerpo sometido a la acción de fuerzas dadas, es necesario resolver las ecuaciones (1.4.4) de manera que la solución satisfaga las condiciones de límite o de borde (1.3.3). Es evidente que estas ecuaciones que contienen seis componentes de esfuerzo  $\sigma \dots \tau$ , no bastan para determinar estas cantidades, el problema es estáticamente indeterminado y para resolverlo se deberá proceder (como en el caso del estado plano de esfuerzo), haciendo intervenir a las deformaciones elásticas del cuerpo.

### 1.5.- DESPLAZAMIENTO, DEFORMACIÓN.

La deformación en un sólido se define como la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo se puede deformar por cambios de temperatura y/o cargas externas, por ejemplo si un espécimen es sujeto a una fuerza  $P$  como se muestra en la fig. 1.5.1), si  $l_0$  y  $l$  son la longitud inicial y final respectivamente bajo la carga  $P$ , el alargamiento será  $\Delta l = l - l_0$ .

El alargamiento por unidad de longitud  $\epsilon$  es:

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.5.1)$$

lo cual es llamado *deformación lineal*. Si consideramos un elemento plano de dimensiones elementales que pasa de un estado inicial (OABC) a un estado deformado (O'A'B'C') fig. 1.5.2), las deformaciones se clasificarán como longitudinales fig. 1.5.2.a), y angulares fig. 1.5.2.b).

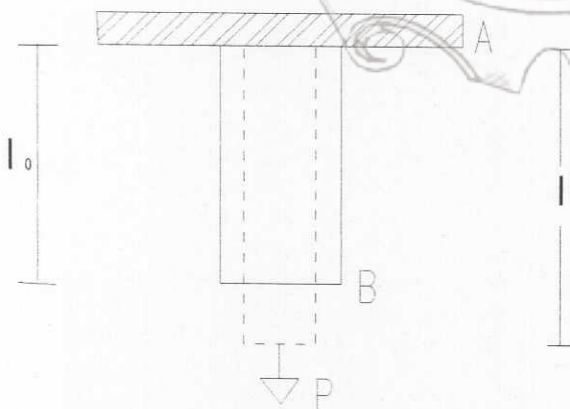


Figura 1.5.1. a)

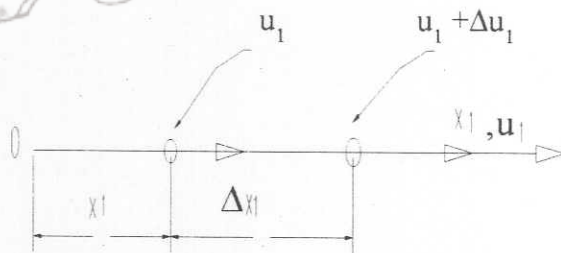
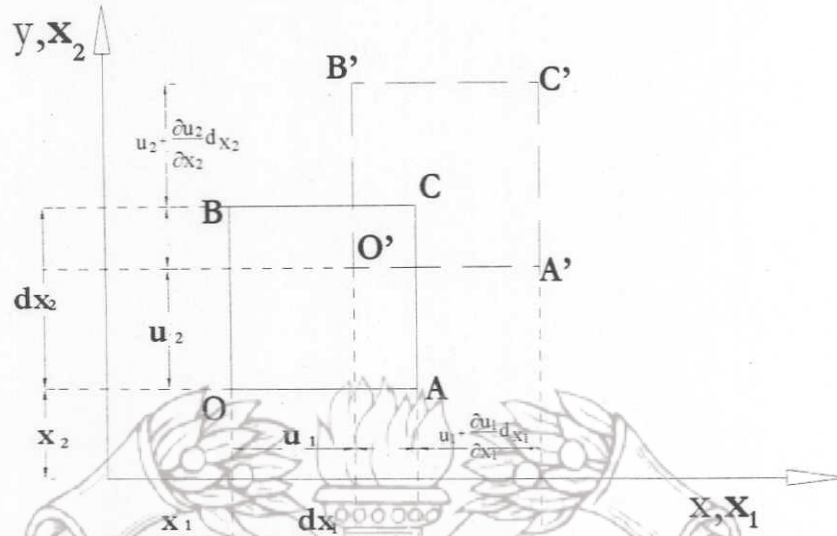


Figura 1.5.1. b)



Deformación lineal, Figura 1.5.2. a)

Si  $\{u_i\}^T = [u_1, u_2, u_3]$  es el vector de desplazamientos en las direcciones  $X_1, X_2, X_3$ , respectivamente, de acuerdo con la fig. 1.5.1 b) y fig. 1.5.2 a) y aplicando la definición de deformación lineal para desplazamientos muy pequeños tenemos matemáticamente que:

$$\epsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \left( \frac{OA' - OA}{OA} \right) \quad (1.5.1.a)$$

$$\epsilon_{22} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \left( \frac{OB' - OB}{OB} \right) \quad (1.5.1.b)$$

de (1.5.1.a) tenemos que:

$$\epsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{(u_1 + \Delta u_1) - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1} \quad (1.5.2)$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \quad a)$$

partiendo de (1.5.1.b):

$$\epsilon_{22} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{u_2 + \Delta u - u_2}{\Delta x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{2,2}$$

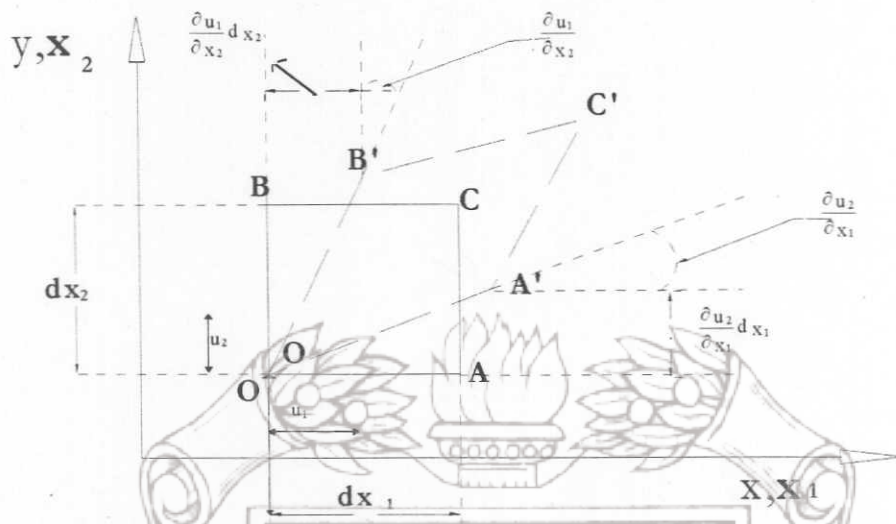
$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2} \quad b)$$

similarmente

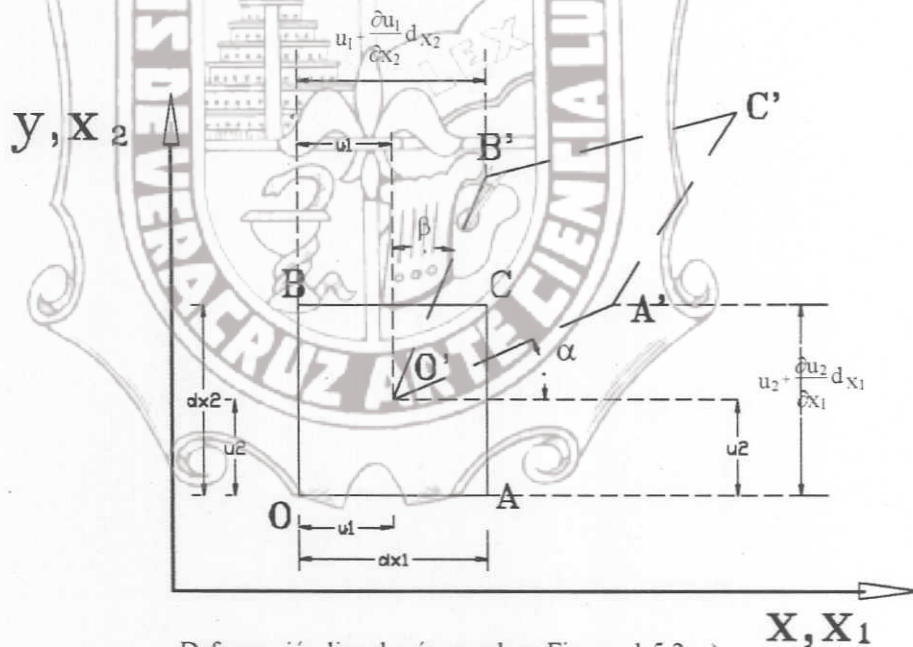
$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \quad c)$$

esto es en general para  $i=j$  
$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \forall i=j \quad (1.5.2')$$

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana



Deformación angular. Figura 1.5.2. b)



Deformación lineal más angular. Figura 1.5.2. c)

Las deformaciones en  $X_1$  y  $X_2$  ( $X, Y$ ) longitudinales respecto a las deformaciones angulares se definen por :

$$\gamma_{12} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [\angle BOA - \angle B'O'A'] = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [\pi/2 - \angle B'O'A'] \quad (1.5.3)$$

1.6.- ESTADO GENERAL DE DEFORMACIONES.

Considerando un cubo de dimensiones elementales, como en el estado general de esfuerzos fig.1.2.2), puede representarse en forma general el tensor deformación, esto es:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6.1)$$

El cual siempre es simétrico en el caso de pequeñas deformaciones. De las mismas figuras y similarmente como se obtuvieron (1.5.2) se puede ver que para pequeños cambios de ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano  $X_1, X_2$ , (figuras 1.5.2.) es:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 - u_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \text{a)} \quad (1.6.2)$$

$$\tan \beta \approx \beta = \frac{u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 - u_1}{dx_2} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \text{b)}$$

Además:  $\angle B'O'A' = [\Pi/2 - (\alpha + \beta)] = \Pi/2 - \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.6.3)$

sustituyendo (1.6.3) en (1.5.3):

$$\gamma_{12} = \left[ \Pi/2 - \left( \Pi/2 - \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right) \right] = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.6.4)$$

El miembro experimenta deformaciones de corte como se muestra en la fig.1.5.2.b), el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad  $\left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$ , por lo que, para pequeños cambios de ángulo, la definición de deformación cortante asociada con al plano  $X_1, X_2$

es:  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [\angle BOA - \angle B'O'A'] = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv u_{1,2} + u_{2,1} \quad \text{a)} \quad (1.6.5)$

análogamente con los otros planos:

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \equiv u_{2,3} + u_{3,2} \quad \text{b)}$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \equiv u_{3,1} + u_{1,3} \quad \text{c)}$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

Como  $\gamma_{12} = \gamma_{xy}$  es la deformación angular total, se define que la deformación tangencial sea la mitad de esta, esto es :

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{12} \quad \therefore$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad \text{y en general}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.6.6)$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix} = \epsilon_{ji} \quad (1.6.7)$$

SIMET.

Examinando las ecuaciones deformación-desplazamiento (1.5.2) y (1.6.5) se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos  $u_1, u_2, u_3$ , así las componentes de deformación no pueden expresarse de manera arbitraria en función de X, Y, Z, si no que habrá que satisfacer a determinadas relaciones que se deducen de (1.5.2) y (1.6.5). Por lo tanto seis ecuaciones independientes pueden desarrollarse relacionando a

$\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}$  y  $\gamma_{31}$ , ecuaciones conocidas como de compatibilidad. Se tiene que :

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} ; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} ; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Obteniendo segundas derivadas de  $\epsilon_{ii}$  con respecto a los otros índices y para  $\gamma_{ij}$  con respecto a ambos índices tenemos:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} ;$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

de donde podemos verificar la siguiente relación :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.6.8)$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Diferenciando  $\epsilon_{12}$  con respecto a  $X_1$ ,  $X_3$  y  $\epsilon_{13}$  con respecto a  $X_2$ ,  $X_1$  y sumándolos, tenemos:

$$\begin{aligned} 2 \left[ \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_3} + \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial X_2 \partial X_1} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_3} \left( \frac{\partial u_{11}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_{22}}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_1} \left( \frac{\partial u_{33}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{11}}{\partial X_3} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_3} \left( \frac{\partial u_{11}}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \left( \frac{\partial u_{22}}{\partial X_3} + \frac{\partial u_{33}}{\partial X_2} \right) \\ &= 2 \left[ \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_1^2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial X_1^2} \right] \end{aligned}$$

Despejando  $\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3}$ , resulta:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial X_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial X_3} \right)$$

o:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) \tag{1.6.9}$$

similarmente se obtendrán las otras relaciones análogas a (1.6.8) y (1.6.9), el juego completo de seis ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_2^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Siendo estas las ecuaciones de compatibilidad.

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

1.7.- LEY DE HOOKE .

La relación entre componentes de esfuerzo y deformación, ha sido establecida experimentalmente y se conoce bajo el nombre de la ley de Hooke .

Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos :

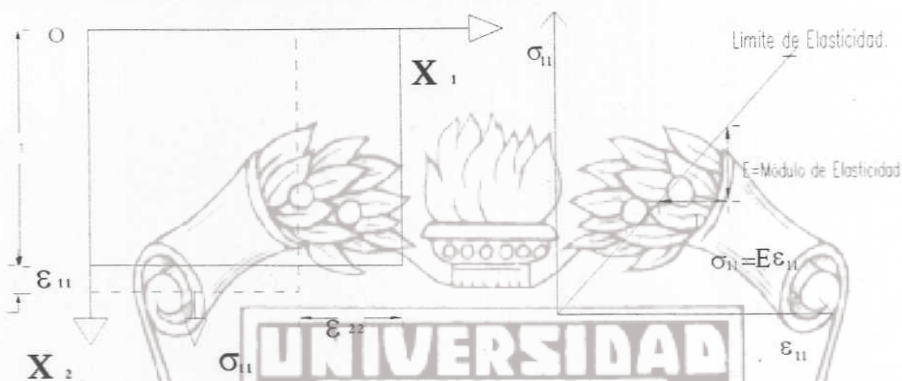


Fig.1.7.1).  $\nu = \frac{-\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \text{Deformación lateral(transversal) / Deformación axial(longitudinal)}$ .

Si imaginamos un paralelepípedo fig.1.7.1) rectangular infinitesimal, con sus aristas paralelas a los ejes coordenados, sometido a la acción de un esfuerzo normal  $\sigma_x = \sigma_{11}$  distribuido uniformemente sobre dos caras opuestas. La magnitud de la deformación longitudinal estaría dada por la ecuación :

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \quad \text{en donde } E = \text{Mod. de Elasticidad Longitudinal} . \quad (1.7.1)$$

La dilatación del elemento en la dirección X viene acompañada de contracciones

laterales. 
$$\epsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \quad ; \quad \epsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \quad (1.7.2)$$

en la cual  $\nu$  es conocido como el coeficiente de Poisson.

Si el elemento de la fig.1.7.1) es sometido a la acción de los esfuerzos normales  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ , distribuidas uniformemente sobre sus caras, las componentes de la deformación resultante pueden obtenerse usando las ecuaciones (1.7.1) y (1.7.2), superponiendo las deformaciones producidas por cada uno de los tres esfuerzos, fig.1.7.2), considerando un estado triaxial llegando a él en tres etapas de cargas .

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

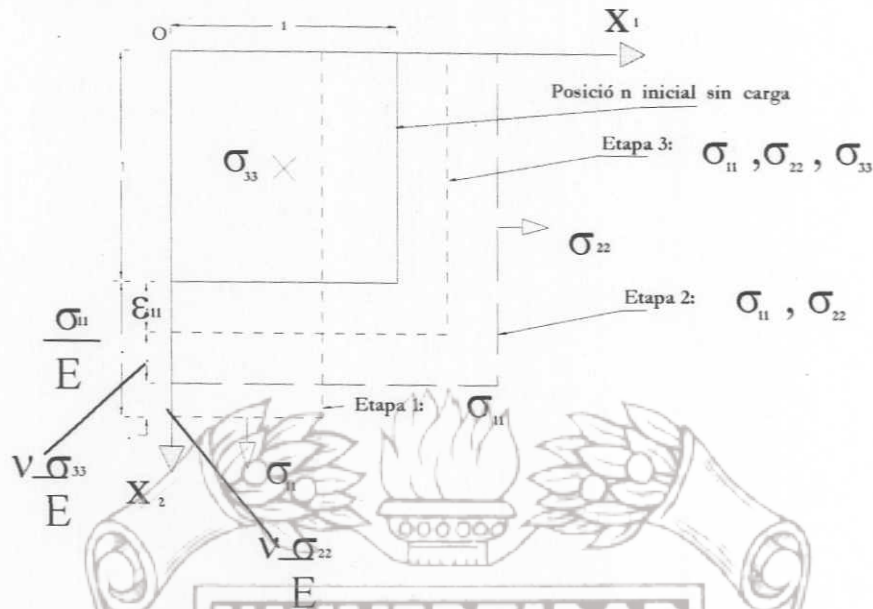


Fig.1.7.2) Ley de Hooke en condiciones triaxiales.

Etapa 1 : actuando  $\sigma_{11}$ , etapa 2: actuando  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$ , etapa 3: actuando  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ , se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}, & \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33} \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

factorizando  $1/E$  de (1.7.3) tenemos.

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) & \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) \end{aligned} \quad (1.7.3')$$

En las ecuaciones (1.7.3'), la relación entre deformaciones y esfuerzos está completamente definida mediante los parámetros  $E$  y  $\nu$ . Estas constantes pueden ser usadas para definir la relación entre deformaciones y esfuerzos tangenciales.

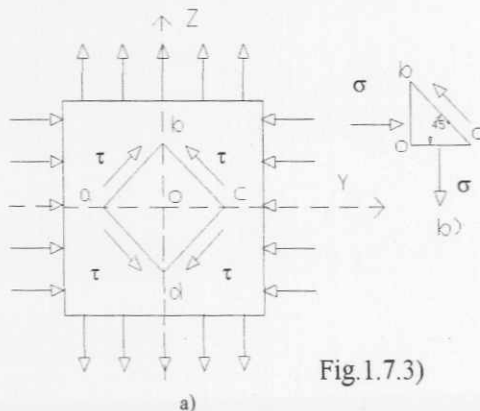


Fig.1.7.3)



Consideramos el caso particular de deformación del paralelepípedo rectangular, sobre el cual :

$$\sigma_{33} = \sigma, \quad \sigma_{22} = -\sigma, \quad \sigma_{11} = 0$$

aislando un elemento abcd mediante planos paralelos el eje X que forman 45° con los ejes Y y Z (fig.1.7.3) se puede ver, sumando las fuerzas paralelas y perpendiculares a bc, que la tensión normal sobre las caras de éste elemento es nula y que la tensión tangencial ( $\tau$ ) sobre la misma es :

$$\tau = 1/2 (\sigma_{33} - \sigma_{22}) = \sigma$$

Tal estado de tensión recibe el nombre de *Esfuerzo Cortante Simple*.

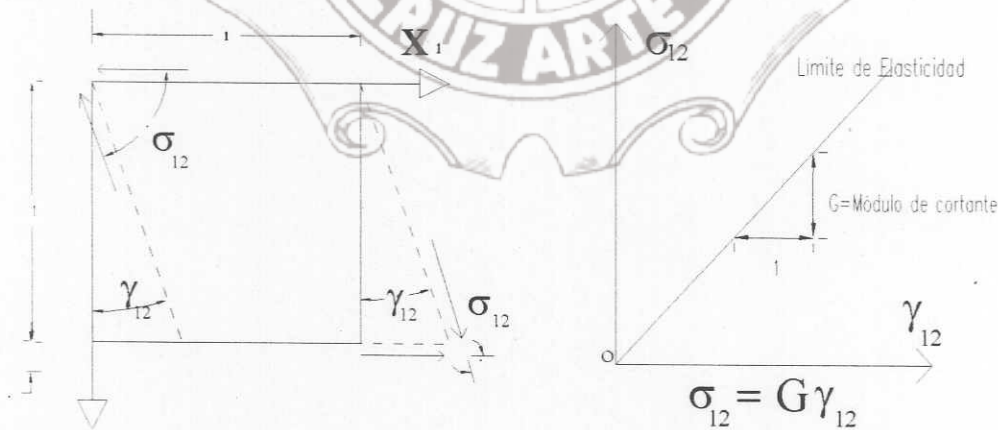
Sustituyendo el valor  $\sigma_{11} = 0, \sigma_{33} = \sigma, \sigma_{22} = -\sigma$  en  $\epsilon_{33}$  y  $\epsilon_{22}$  de (1.7.3') tenemos :

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \sigma_{22}) = \frac{(1+\nu)\sigma}{E}, \quad \epsilon_{22} = -\frac{(1+\nu)\sigma}{E}$$

de lo anterior, tenemos que :

$$\gamma = 2 \frac{(1+\nu)\sigma}{E} = 2 \frac{(1+\nu)\tau}{E} \quad (1.7.4)$$

De esta forma, la relación entre la deformación tangencial y el esfuerzo tangencial está definida conociendo E y  $\nu$ , existe una constante que relaciona la deformación angular y los esfuerzos de cortante, la podemos apreciar gráficamente en la figura siguiente.



X<sup>2</sup> Fig.1.7.4) Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos tangenciales (corte puro  $\sigma_{12}$ ).

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

La constante definida en la fig.1.7.4) se conoce como módulo de elasticidad tangencial o módulo de cortante G. Las constantes E, G y  $\nu$  son experimentales y están relacionadas por:

$$G = E / (2(1+\nu)) \quad (1.7.5)$$

sustituyendo G en la ecuación (1.7.4) resulta :

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Si sobre todas las caras de un elemento actúan esfuerzos cortantes, como en el caso de la fig.1.4.1), la deformación del ángulo formado por dos ejes coordenados cuales quiera, depende únicamente de las componentes de los esfuerzos paralelos a tales ejes y su valor es :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} & \gamma_{zy} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{G} \sigma_{12} & \gamma_{23} &= \frac{1}{G} \sigma_{23} & \gamma_{31} &= \frac{1}{G} \sigma_{31} \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Las deformaciones longitudinales (1.7.3') y las deformaciones angulares (1.7.6) son independientes unas de otras y representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido homogéneo e isotrópico. En consecuencia, el caso general de deformación producida por 3 esfuerzos normales y 3 tangenciales, se resuelven mediante la superposición de las deformaciones dadas por las ecuaciones (1.7.3') y (1.7.6), estas dan las componentes de las deformaciones en función de las componentes de los esfuerzos, esto lo podemos expresar matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.7.7)$$

$$\text{O} \quad \{\epsilon\} = [C] \{\sigma\} \quad (1.7.8)$$

despejando  $\{\sigma\}$  de (1.7.8), se obtiene en forma matricial :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.7.9)$$

$$\text{o sea} \quad \{\sigma\} = [C]^{-1} \{\epsilon\} \quad (1.7.10)$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que sólo intervienen E y  $\nu$ .

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

En un medio elástico lineal anisotrópico y aceptando el principio de superposición las ecuaciones (1.7.7), se expresan como :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.7.11)$$

Las ecuaciones constitutivas (1.7.11) tienen 36 constantes, sin embargo a través de consideraciones energéticas se demuestra que el número de constantes es 21 y que  $C_{ij} = C_{ji}$  para  $i \neq j$ , son simétricas respecto a la diagonal principal. Todas las constantes  $C_{ij}$  deben determinarse experimentalmente. Se supone un material homogéneo, ejemplos de estos materiales son : concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, fierro fundido, etc. Cuando se tiene tres direcciones ortogonales anisotrópicas, el material se dice que es ortotrópico y para estos materiales el número de constante se reduce sólo a nueve constantes independientes.

A veces es necesario tener las componentes de los esfuerzos expresados como función de las componentes de la deformación, esto se consigue de la siguiente manera, usando la notación

$$\begin{aligned} e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \\ \Theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

llegamos a la siguiente relación entre la dilatación cúbica "e" y la suma de los esfuerzos normales :

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \Theta \quad (1.7.13)$$

Empleando las notaciones (1.7.12) y despejando  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  de las ecuaciones (1.7.3'), obtenemos:

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x, \quad \sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y \quad (1.7.14)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

usando la notación : 
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.7.15)$$

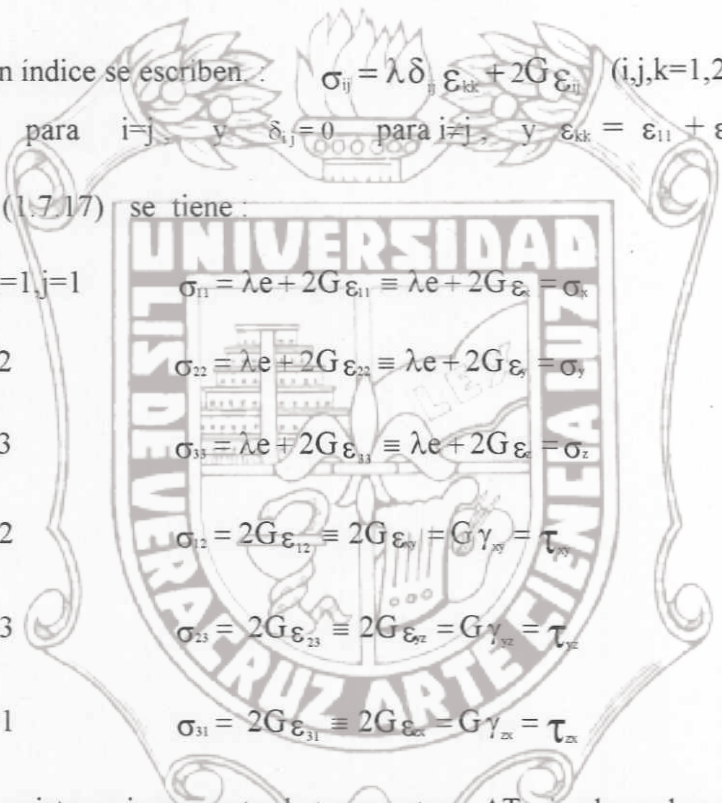
considerando (1.7.5) y las ecuaciones constitutivas (1.7.7) llegamos a :

$$\sigma_X = \lambda e + 2G \epsilon_X, \quad \sigma_Y = \lambda e + 2G \epsilon_Y, \quad \sigma_Z = \lambda e + 2G \epsilon_Z \quad (1.7.16)$$

usando notación indice se escriben : 
$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (1.7.17)$$

donde  $\delta_{ij} = 1$  para  $i=j$ , y  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , y  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \equiv e$ .

Desarrollando (1.7.17) se tiene :



$$\begin{aligned} \text{para } i=1,j=1 & \quad \sigma_{11} = \lambda e + 2G \epsilon_{11} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_x = \sigma_x \\ i=2,j=2 & \quad \sigma_{22} = \lambda e + 2G \epsilon_{22} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_y = \sigma_y \\ i=3,j=3 & \quad \sigma_{33} = \lambda e + 2G \epsilon_{33} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_z = \sigma_z \\ i=1,j=2 & \quad \sigma_{12} = 2G \epsilon_{12} \equiv 2G \epsilon_{xy} = G \gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ i=2,j=3 & \quad \sigma_{23} = 2G \epsilon_{23} \equiv 2G \epsilon_{yz} = G \gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ i=3,j=1 & \quad \sigma_{31} = 2G \epsilon_{31} \equiv 2G \epsilon_{zx} = G \gamma_{zx} = \tau_{zx} \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura  $\Delta T$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de expansión térmica las ecuaciones (1.7.7) quedan:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.7.19)$$

CAPÍTULO II.TEORÍA CLÁSICA DE TORSIÓN.**2.1.- INTRODUCCIÓN.**

Estas cargas se presentan generalmente en forma de pares que hacen girar los miembros y producen esfuerzos cortantes. Los ejes circulares (flechas) son los miembros más comúnmente asociados con cargas de torsión y se presentan en muchas aplicaciones prácticas para ello, especialmente en el campo de diseño de máquinas. La torsión en elementos estructurales no es tan simple y las causas pueden ser muy diversas, la torsión puede ser resultado de acciones primarias o secundarias. La torsión primaria se debe a que la carga externa no puede ser resistida sino mediante torsión, en tales casos, es posible determinar la torsión requerida para mantener el equilibrio estático, este caso puede llamarse torsión de equilibrio, se trata principalmente de un problema de resistencia, debido a que la estructura, o sus componentes, se desploman si no se puede proporcionar resistencia torsional, se presenta generalmente por cargas aplicadas excéntricamente (un ejemplo simple serían los voladizos en una trabe). La torsión secundaria es originada como acción secundaria de requerimientos de continuidad en las estructuras estáticamente indeterminadas, (un ejemplo sería al iniciarse el pandeo de un miembro originalmente recto, sometido a solicitaciones de otro tipo). Una introducción al tema de torsión, debe comenzar con el comportamiento elástico de las secciones simples, tales como las circulares, elípticas y las rectangulares que a continuación se presenta.

**2.2.- TORSIÓN EN MIEMBROS DE SECCIÓN CIRCULAR.**

A partir del campo de los desplazamientos  $u_i$ , determinaremos los esfuerzos.

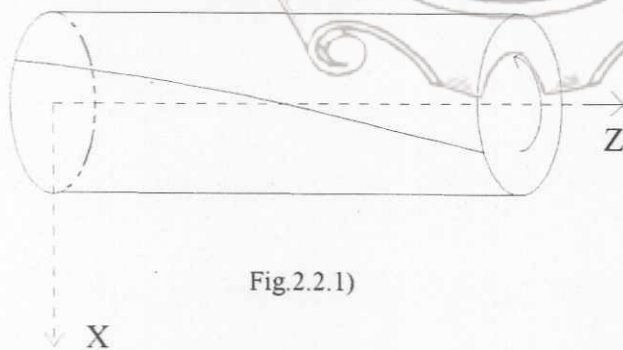


Fig.2.2.1)

Considerando un eje de longitud  $l$  de sección circular, con una de sus bases fijas en el plano  $x-y$ , torcido por la acción de pares de fuerza  $T$  que actúan en sus extremos, el eje se dice que está en torsión pura. La sección circular está sujeta a cargas de torsión, ya que estas fuerzas tangentes a la superficie, producen esfuerzos cortantes.

El producto de estas fuerzas cortantes por sus respectivas distancias al eje de la flecha producen momentos, que están situados a lo largo del eje- $z$ , cuya suma (o resultante), es el par resistente, bajo la acción del esfuerzo torsionante, generará que el cilindro se deforme describiendo curvas helicoidales o en forma helicoidal.

Para investigar la torsión en los ejes, debemos conocer la relación entre el par aplicado y los esfuerzos internos producidos por ese par. Para establecer esa relación, se harán las siguientes suposiciones :

- A causa de la simetría de la sección es razonable suponer que la sección plana del cilindro antes de la deformación permanecerá plana después de ella.
- El diámetro de la flecha no cambia durante la carga.
- Los esfuerzos están en el rango elástico.
- Las deformaciones por cortante varían linealmente desde cero en el eje del miembro, hasta un máximo en las fibras extremas.

La observación y la verificación experimental comprueban que estas suposiciones están justificadas y que las secciones rectas giran como cuerpos rígidos alrededor del eje longitudinal.



Durante la torsión de la barra habrá un giro o rotación alrededor del eje longitudinal de un extremo de la barra con respecto al otro. Por ejemplo, si consideramos fijo el extremo izquierdo de la barra, entonces el extremo derecho girará un ángulo  $\alpha$  con respecto al extremo izquierdo (fig.2.2.1). Al mismo tiempo una recta longitudinal en la superficie de la barra, tal como la  $mm$ , girará un pequeño ángulo hasta las posición  $mm'$ . Debido a esta rotación, un elemento rectangular ( $abcd$ ) en la superficie de la barra (tal como el mostrado en la fig.2.2.1.b) entre dos secciones transversales distantes  $dz$ , se deforma convirtiéndose en romboide ( $ab'cd'$ ), tal elemento se muestra en la fig.2.2.1.b), donde una porción de la barra se ha aislado del resto de la misma. La configuración original de elemento se indica por  $abcd$ . Durante la torsión, la sección recta de la derecha gira con respecto a la cara opuesta y los puntos  $b$  y  $d$  se mueven hasta  $b'$  y  $d'$ , respectivamente. La longitud de los lados del elemento no cambia durante dicha rotación, pero los ángulos en sus vértices ya no serán de  $90^\circ$ .

Por lo tanto, vemos que el elemento está en un estado de cortadura pura, y la magnitud de la deformación de cortadura,  $\gamma$  es igual a la disminución del ángulo  $bac$ . Este es :

$$\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

La distancia  $bb'$  es la longitud de un pequeño arco de radio  $r$  subtendido por el ángulo  $d\alpha$ , que es el ángulo de rotación de una sección recta con respecto a la otra. Así pues hallamos que  $bb' = r d\alpha$ . Además, la distancia  $ab$  es igual a  $dz$ , la longitud del elemento. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\gamma = \frac{r d\alpha}{dz}$$

Cuando un árbol de máquina está sometido a torsión pura, la derivada  $d\alpha/dz$  del ángulo de torsión es constante a lo largo de la barra. Esta constante representa el ángulo de torsión por unidad de longitud y se designará por  $\theta$ . Por tanto, vemos que  $\theta = \alpha/L$ , donde  $L$  es la longitud del eje o árbol. Entonces, de la ecuación anterior se tiene que:

$$\gamma = r\theta = \frac{r\alpha}{L}$$

La suma de la rotación dependerá de la distancia de la sección desde la base  $z=0$  y ya que las deformaciones son pequeñas es sensible de suponer que la suma de la rotación  $\theta$  es proporcional a la distancia de la sección desde la base fija, generalizando  $L=z$  y de  $\theta = \alpha / L = \alpha / z$ . Así,

$$\alpha = \theta z$$

donde  $\theta$  como se dijo es el torque por unidad de longitud, esto es, el desplazamiento angular relativo de un par de secciones transversales separadas una distancia unitaria.

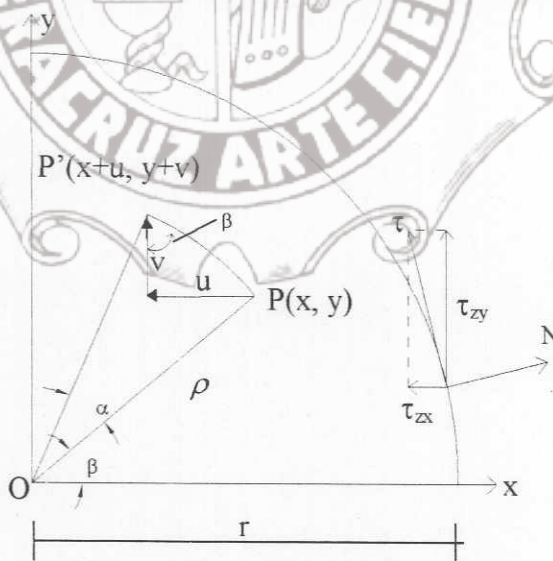


Fig.2.2.2)

Si la sección transversal del cilindro permanece plana después de la deformación, entonces el desplazamiento  $w$ , a lo largo del eje  $z$ , es cero. Los desplazamientos  $u$  y  $v$  son fácilmente calculados, así, considerando cualquier punto  $P(x,y)$  en la sección circular, el cual, antes de la deformación, ocupa la posición mostrada en la fig.2.2.2).

Después de la deformación, el punto  $P(x,y)$  ocupará una nueva posición  $P'(x+u, y+v)$ . En términos de desplazamiento angular  $\theta$  del punto  $P$ , nosotros tenemos:

$$\begin{aligned} u &= \rho \cos(\beta+\alpha) - \rho \cos \beta \\ v &= \rho \sin(\beta+\alpha) - \rho \sin \beta \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\cos(\beta+\alpha)$  y  $\sin(\beta+\alpha)$  por sus identidades trigonométricas y teniendo que  $\beta$  es el ángulo entre el radio vector  $\rho$  y el eje  $x$  de modo que  $x = \rho \cos \beta$ ,  $y = \rho \sin \beta$

$$\begin{aligned} u &= x (\cos \alpha - 1) - y \sin \alpha \\ v &= x \sin \alpha + y (\cos \alpha - 1) \end{aligned}$$

y si el ángulo  $\alpha$  es pequeño, podemos escribir

$$u = -\alpha y, \quad v = \alpha x,$$

toda vez que  $\alpha = \theta z$ , los desplazamientos en cualquier punto con coordenadas  $(x, y, z)$ , son:

$$u = -\theta zy, \quad v = \theta zx, \quad w = 0. \quad (2.2.1)$$

Los esfuerzos asociados con los desplazamientos anteriores están determinados por la ley de Hooke generalizada:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + G (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Por lo que :

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{zy} = G\theta x, \quad \tau_{zx} = -G\theta y, \quad (2.2.2)$$

Estado de esfuerzos que satisface las ecuaciones de equilibrio (cuando no hay fuerzas de cuerpo actuando) y las ecuaciones de compatibilidad. Las primeras dos ecuaciones de borde (1.3.3) se satisfacen idénticamente y la última nos queda:

$$\tau_{zx} \cos(Nx) + \tau_{zy} \cos(Ny) = -G\theta y \cos(Nx) + G\theta x \cos(Ny) \equiv 0$$

para un cilindro circular de radio  $r$ , tenemos:  $\cos(Nx) = x/r$  y  $\cos(Ny) = y/r$ , sustituyendo vemos que la última ecuación, también se satisface.

El único componente no nulo del par  $M$  producido por la distribución de esfuerzos (2.2.2) en el final del cilindro es  $M_z$ , el cual es fácilmente calculado, de esta manera,

$$M_z = \iint (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy = G\theta \iint (x^2 + y^2) dx dy = G\theta J_0 \quad (2.2.3)$$

donde  $J_0 = \pi r^4/2$  es el momento polar de inercia de una sección circular de radio  $r$ . La fuerza resultante actuante en el extremo del cilindro desaparece y esto viene del principio de Saint-Venant, de que cualquiera que sea la distribución de fuerzas sobre el extremo del cilindro ocasiona un par de magnitud  $M_z$ , la distribución de esfuerzos alejados de los extremos del cilindro están esencialmente especificados por (2.2.2).



El vector de esfuerzos:  $\tau = \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \tau_{zz} k = G \theta (-yi + xj)$  actuando en un punto  $(x, y)$ , en cualquier sección transversal  $z$  constante, se sitúa en el plano de la sección y es normal al vector "r". La magnitud de  $\tau$  es

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\theta \sqrt{x^2 + y^2} = G\theta \rho \quad (2.2.4)$$

De lo anterior tenemos que:

$$G\theta = \frac{\tau}{\rho} = \frac{M_z}{J_o}$$

Por lo que podemos expresar el esfuerzo como:

$$\tau = \frac{M_z}{J_o} \rho$$

De esto podemos observar que el máximo esfuerzo es un esfuerzo tangencial que actúa en la frontera del cilindro y tiene una magnitud  $G\theta r$ , donde "r" es el radio del cilindro. La teoría elemental de la torsión dada aquí, se originó en el trabajo del ingeniero francés C. A. Coulomb (1736-1806), alrededor de 1775 en relación con su trabajo acerca de instrumentos eléctricos.

### 2.3.- TORSIÓN DE BARRAS PRISMÁTICAS.

Navier considerando las hipótesis de Coulomb para estudiar el caso de una barra prismática de sección no circular, llegó a la conclusión errónea de que para un determinado momento el ángulo de torsión es inversamente proporcional al momento polar de inercia respecto al centro de gravedad de la sección transversal y de que los valores máximos del esfuerzo tangencial se dan en los puntos más alejados del centro de la sección. Esta hipótesis está en contradicción con las condiciones de contorno. Tomando una barra de sección rectangular (fig.2.3.1), Navier pensó que en todo punto A del contorno, el esfuerzo tangencial debe actuar según la dirección normal al radio OA.

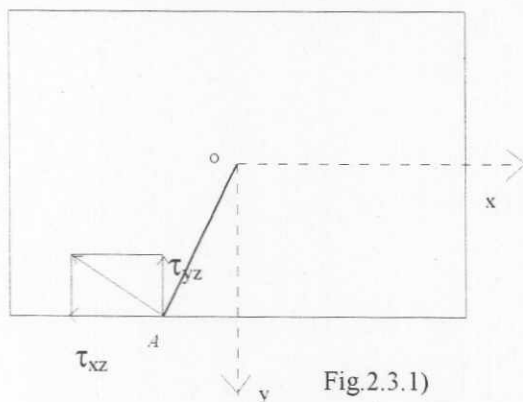
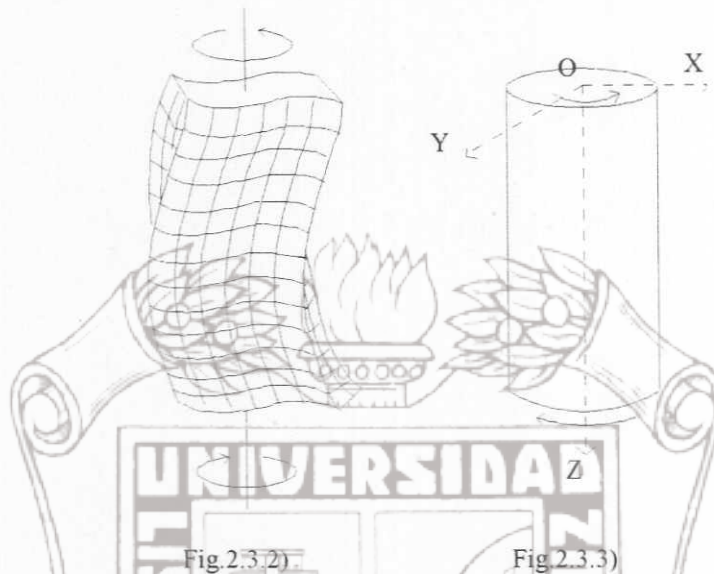


Fig.2.3.1)

Descomponiendo este esfuerzo en sus dos componentes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  es evidente que un esfuerzo complementario, igual a  $\tau_{yz}$  actuará sobre la superficie lateral de la barra que circunda al punto A, lo cual está en contradicción con la hipótesis de que las caras laterales de la barra están libres de la acción de toda fuerza exterior, causada por los pares que actúan sobre los extremos de la barra.

Instituto de Ingeniería Universidad Veracruzana

Un experimento realizado con una barra rectangular (fig.2.3.2) muestra que las secciones transversales de la barra no permanecen planas al sufrir la torsión y que la distorsión de los elementos rectangulares de la superficie es máxima en el centro de los lados.



Para barras prismáticas sometidas a torsión, la solución exacta la dio Saint-Venant, quien ocupó el método llamado semiinverso. Comenzó haciendo suposiciones respecto a la deformación de la barra sometida a torsión, suposiciones que demostró cumplían con las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno. Se sigue, entonces, de la unicidad de la solución de las ecuaciones de la elasticidad, que las suposiciones hechas son correctas y que la solución obtenida es la verdadera solución del problema de torsión. Tomando una barra prismática que trabaja a torsión (fig.2.3.3) y basándose en la solución obtenida para el árbol cilíndrico, Saint-Venant supone que la deformación de la barra prismática sometida a torsión, consiste en:

- una rotación de las secciones transversales, como en el caso del árbol cilíndrico y
- un alabeo de las secciones transversales, igual para todas ellas.

Colocando el origen de coordenadas en un extremo de la barra (fig.2.3.3), tenemos que los desplazamientos correspondientes a la rotación de las secciones transversales son (ecuación 2.2.1):

$$u = -\theta zy \quad , \quad v = \theta zx \quad (2.3.1)$$

$\theta z$  es el ángulo de rotación de la sección transversal distante  $z$  del origen.

Una función definirá el alabeo de las secciones transversales :

$$w = \theta \psi(x,y) \quad (2.3.2)$$

De los desplazamientos (2.3.1) y (2.3.2), calculamos las deformaciones mediante las ecuaciones (1.5.2) y (1.6.5):

$$\begin{aligned}\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)\end{aligned}\quad (2.3.3)$$

Según las ecuaciones (1.7.18), los esfuerzos son:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{xz} &= G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)\end{aligned}\quad (2.3.4)$$

De (2.3.1) y (2.3.2), vemos la ausencia de esfuerzos normales actuando entre las fibras longitudinales de la pieza o longitudinalmente de las mismas. Así mismo no hay distorsión de las secciones transversales por ser  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  nulos. Tenemos en todo punto un estado de esfuerzo cortante simple definido por las componentes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ . La función  $\psi(x, y)$ , que define el alabeo de la sección recta, debe ser determinada ahora, de forma que satisfaga las ecuaciones de equilibrio (1.4.4). Llevando a estas ecuaciones la expresión (2.3.4) y despreciando las fuerzas de cuerpo vemos que la función  $\psi$  debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.3.5)$$

Considerando ahora las condiciones de contorno (1.3.3), para las superficies laterales de la barra, la cual esta libre de fuerzas externas y cuyas normales son perpendiculares al eje z, tenemos:

$$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0 \quad \text{y} \quad \cos(Nz) = n = 0.$$

Las primeras dos ecuaciones de contorno se satisfacen idénticamente y la tercera resulta:

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0 \quad (2.3.6)$$

lo que significa que el esfuerzo tangencial resultante que actúa en la frontera, tiene por dirección la tangente a la frontera (fig.2.3.4). Esta condición debe ser satisfecha si sobre la superficie lateral de la barra no actúa ninguna fuerza.

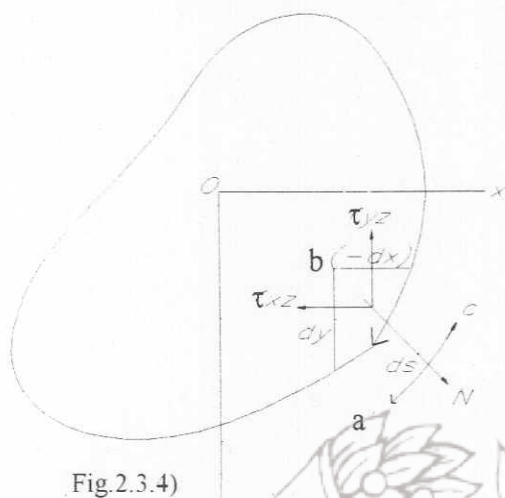


Fig.2.3.4)

Consideramos un elemento de arco *abc* del contorno y suponemos que “*s*” aumenta en la dirección de *c* hacia *a*, tenemos que :

$$l = \cos(N_x) = \frac{dy}{ds} \quad , \quad m = \cos(N_y) = -\frac{dx}{ds}$$

y (2.3.6) se convierte en :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} = 0 \quad (2.3.8)$$

Por lo tanto, todo problema de torsión se reduce a la determinación de una función  $\psi$  que satisfaga la ecuación (2.3.5) y las condiciones de contorno (2.3.8). Un procedimiento alternativo es simplificando la expresión de la condición de contorno, ya que:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

ya que  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son independientes de *z*, las dos ecuaciones primeras se satisfacen y de la tercera podemos expresar  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  de la forma:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.3.9)$$

donde  $\phi(x,y)$  es llamada función de esfuerzos. Sustituyendo  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  tenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

Para eliminar  $\psi$ , derivemos la primera expresión respecto a “*y*” y la segunda respecto a “*x*” y sumándolas encontramos que la función de esfuerzos debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta = F \quad (2.3.11)$$

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

Sustituyendo las ecuaciones (2.3.9) en la condición de contorno (2.3.6) nos queda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (2.3.13)$$

Esto nos indica que la función de esfuerzos  $\phi$  debe ser constante a lo largo del contorno de la sección transversal. Si se trata de barras macizas, esta constante puede ser elegida arbitrariamente. *La determinación, entonces, de la distribución de esfuerzos en la sección transversal de una barra sometida a torsión, consiste en determinar la función  $\phi$  que satisfaga la ecuación (2.3.11) y sea nula en el contorno.* Considerando las condiciones en los extremos de una barra sometida a torsión. Las normales a esas secciones extremas son paralelas al eje  $z$ . En consecuencia  $l = m = 0$ ,  $n = \pm 1$  y las ecuaciones de borde serán:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz}, \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz} \quad (2.3.14)$$

en las que el signo positivo deberá tomarse para el extremo de la barra cuya normal exterior tenga el sentido del eje positivo de las "z", como ocurre con el extremo inferior de la barra (fig.2.3.3). En los extremos las fuerzas tangenciales se distribuyen de igual manera que los esfuerzos tangenciales en las secciones transversales de la barra. La resultante de esas fuerzas es un par. Sustituyendo en las ecuaciones (2.3.14) los valores de (2.3.9) y observando que  $\phi$  es cero en el contorno se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint \bar{X} \, dx \, dy &= \iint \tau_{xz} \, dx \, dy = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx \, dy = \int dx \int \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dy = 0 \\ \iint \bar{Y} \, dx \, dy &= \iint \tau_{yz} \, dx \, dy = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx \, dy = - \int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la resultante de las fuerzas distribuidas sobre los extremos de la barra son cero y que estas fuerzas representan un par cuya magnitud es:

$$M_t = \iint (\bar{Y}_x - \bar{X}_y) \, dx \, dy = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x \, dx \, dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y \, dx \, dy \quad (2.3.15)$$

Teniendo en cuenta que  $\phi = 0$  en el contorno e integrando por partes tenemos:

$$M_t = 2 \iint \phi \, dx \, dy \quad (2.3.16)$$

cada una de las integrales del último miembro de las ecuaciones (2.3.15) contribuyen a la mitad del valor del par. Se tiene así, que una mitad del par es debida a la componente

$\tau_{xz}$  y la otra a  $\tau_{yz}$ .

## 2.4.- BARRAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL ELÍPTICA.

De acuerdo con la sección anterior para determinar la distribución de esfuerzos en una barra sometida a torsión, se tiene que determinar una función  $\phi$  que satisfaga la ecuación (2.3.11) y se anule en el contorno. Consideremos una barra cuya sección transversal es elíptica (fig.2.4.1).

La ecuación de la elipse es :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.4.a)$$

Las ecuaciones (2.3.11) y (2.3.13) se satisfacen si :

$$\phi = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (2.4.b)$$

Donde "m" es una constante. Sustituyendo (2.4.b) en (2.3.11) se obtiene

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F \quad \text{por lo que:} \quad \phi = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) F \quad (2.4.c)$$

Sustituyendo el valor (2.4.c) en (2.3.16) obtenemos  $M_t$  y  $F$  :

$$M_t = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \left[ \frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right] F \quad (2.4.d)$$

$$\iint x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi b a^3}{4}, \quad \iint y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4}, \quad \iint dx dy = \pi a b = A$$

sustituyendo resulta:

$$M_t = -\frac{\pi a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)} F$$

despejando:

$$F = -\frac{2 M_t (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad (2.4.e)$$

Por tanto (2.4.c) resulta:

$$\phi = -\frac{M_t}{\pi a b} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (2.4.f)$$

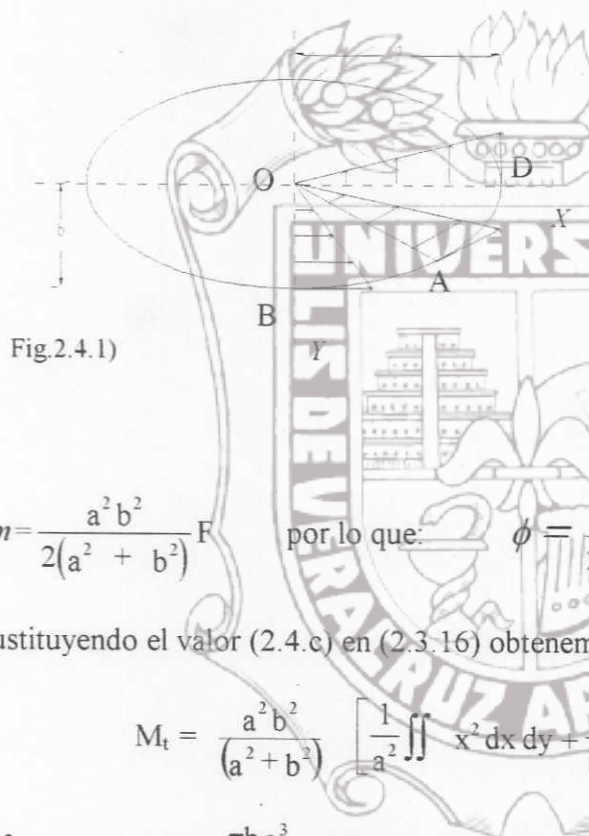


Fig.2.4.1)

Los esfuerzos se obtienen sustituyendo en (2.3.9) la función de esfuerzo  $\phi$ :

$$\tau_{xz} = -\frac{2 M_t y}{\pi a b^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2 M_t x}{\pi a^3 b} \quad (2.4.1)$$

Las componentes de la tensión tienen una relación proporcional a  $y/x$  y por lo tanto constante a lo largo de cualquier radio tal como OA (fig.2.4.1). Esto significa que la tensión tangencial resultante a lo largo de un radio cualquiera OA, tiene una dirección constante que será evidentemente la de la tangente al contorno en el punto A. A lo largo del eje vertical OB la componente  $\tau_{yz}$  de la tensión tangencial es nula y la tensión resultante es igual a  $\tau_{xz}$ . A lo largo del eje horizontal OD la tensión tangencial resultante es igual a  $\tau_{yz}$ . El esfuerzo máximo se produce en el contorno y puede demostrarse que este máximo se da en los extremos del eje menor de la elipse. Sustituyendo  $y = b$  en la primera de las ecuaciones (2.4.1) obtenemos el valor absoluto de dicho máximo:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi a b^2} \quad (2.4.2)$$

### 2.5.- BARRAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL TRIANGULAR.

Considerando una barra de sección transversal triangular equilátera (fig.2.5.1), donde los vértices son los puntos A, B, C y las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo son:

para AB,  $(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a) = 0$ , para BC,  $(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a) = 0$ , y para AC,  $(x + \frac{1}{3}a) = 0$ .

El producto de las 3 ecuaciones de los lados del triángulo, será la ecuación de contorno:

$$(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a)(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a)(x + \frac{1}{3}a) = 0$$

resultando el polinomio:

$$\left( \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 + 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right) = 0$$

Las ecuaciones (2.3.11) y (2.3.13) se satisfacen si:

$$\phi = \frac{F}{2} \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right\}$$

Ya que  $F = -2G\theta$  tenemos:

$$\phi = -G\theta \left( \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right) \quad (2.5.g)$$

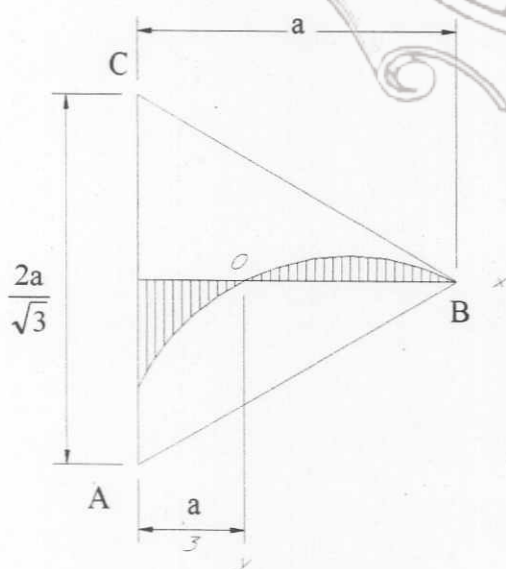


Fig.2.5.1)

Instituto de Ingeniería Universidad Veracruzana

Sustituyendo  $\phi$  en las ecuaciones (2.3.9) obtenemos las componentes de  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ .  
 Por razones de simetría a lo largo del eje x,  $\tau_{xz} = 0$  y entonces obtenemos de (2.5.g):

$$\tau_{yz} = \frac{3G\theta}{2a} \left( \frac{2ax}{3} - x^2 \right) \quad (2.5.h)$$

En los puntos medios de los lados del triángulo se produce el esfuerzo máximo, de (2.5.h) encontramos que:

$$\tau_{\max} = \frac{G\theta a}{2} \quad (2.5.k)$$

El esfuerzo tangencial en los vértices del triángulo es nulo (vease la fig.2.5.1).  
 $M_t$  lo encontramos sustituyendo (2.5.g) en la ecuación (2.3.16):

$$M_t = \frac{G\theta a^3}{15 \cdot 3} = \frac{5}{3} \theta G I_p \quad (2.5.l)$$

### 2.6.- ANALOGÍA DE LA MEMBRANA.

L. Prandtl presentó una analogía entre la torsión y la deformación de una membrana, la cual ha resultado de gran utilidad para la solución de problemas de torsión, que no se pueden resolver matemáticamente en forma conveniente, esta analogía se conoce como "analogía de la membrana". Imaginemos una membrana homogénea (fig.2.6.1), tal como una película de jabón, formada y ligeramente estirada sobre un agujero, esta debe ser geoméricamente semejante a la sección transversal de la barra en estudio. Debe mantenerse una ligera presión de aire por un lado de la membrana y los bordes se mantienen fijos sobre el contorno, por lo que esta es sometida a una tracción uniforme sobre sus bordes ("s" = la tensión uniforme por unidad de longitud de su contorno) y a una presión uniforme sobre su caras ("q" = la presión por unidad de área de la membrana).

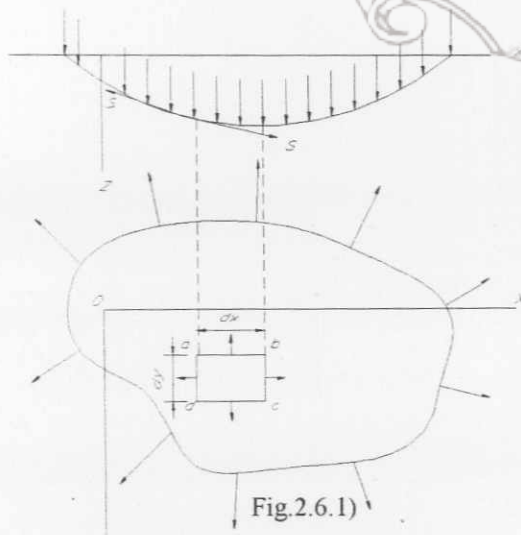


Fig.2.6.1)

Sobre los lados ad y bc del elemento infinitesimal abcd (fig.2.6.1), actúan esfuerzos de tensión, que cuando las flechas de la membrana son pequeñas, tienen una resultante hacia arriba cuyo valor es  $-s(\partial^2 z / \partial x^2) dx dy$ . De igual forma, las tensiones que actúan sobre los otros lados del elemento tienen por resultante  $-s(\partial^2 z / \partial y^2) dx dy$  y la ecuación de equilibrio del elemento será:

$$q dx dy + s \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$$



De donde: 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{s} \tag{2.6.1}$$

La flecha de la membrana es cero en el contorno. Comparando la ecuación (2.6.1) y las condiciones de contorno para las flechas  $z$  de la membrana, con la ecuación (2.3.11) y la condición de contorno (2.3.13) para la función de tensión  $\phi$ , se tiene que estos dos problemas son idénticos. Podemos entonces obtener de las flechas de la membrana los valores de  $\phi$  sin más que sustituir la cantidad  $-(q/s)$  de la ecuación (2.6.1) por la cantidad  $F = -2 G\theta$  de la ecuación (2.3.11). Representando la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel (fig.2.6.2) podemos obtener conclusiones importantes relativas a la distribución de esfuerzos en la torsión. Considerando un punto cualquiera B (fig.2.6.2) en la membrana, se observa que la flecha a lo largo de la curva de nivel que pasa por este punto es constante, por lo que:  $\frac{\partial z}{\partial s} = 0$ .

La correspondiente ecuación para la función de tensión  $\phi$  es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0$$

Esta ecuación indica que la proyección de la resultante de la tensión tangencial en el punto B, sobre la normal  $N$  a la curva de nivel es cero y por lo tanto podemos concluir que la tensión tangencial en el punto B tiene la dirección de la tangente a la curva de nivel que pasa por ese punto. Si en la sección transversal de una barra sujeta a torsión se trazan curvas tales que la tensión tangencial resultante en cualquiera de sus puntos tenga la dirección de la tangente respectiva, dichas curvas serán llamadas líneas de tensión tangencial. Por lo tanto, las curvas de nivel de la membrana son las curvas de tensión tangencial de la sección transversal de la barra sometida a torsión.

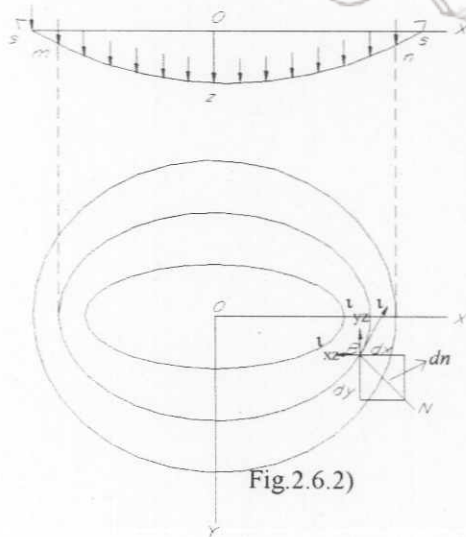


Fig.2.6.2)

la magnitud de la tensión resultante  $\tau$  en B (fig.2.6.2) se obtiene proyectando sobre la tangente las componentes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ . Por lo que:

$$\tau = \tau_{yz} \cos(Nx) - \tau_{xz} \cos(Ny)$$

Sustituyendo:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\cos(Nx) = \frac{dx}{dn}, \quad \cos(Ny) = \frac{dy}{dn}$$

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

Se obtiene:

$$\tau = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) = - \frac{d\phi}{dn}$$

Así, la magnitud de la tensión tangencial en B viene dada por la pendiente máxima de la membrana en ese punto. Basta simplemente con sustituir  $q/s$  por  $2G\theta$  en la expresión de la pendiente. De este hecho, se deduce que los máximos esfuerzos tangenciales actúan en los puntos en los que las curvas de nivel están muy próximas unas a otras. La ecuación (2.3.16) nos permite establecer que el doble del volumen limitado por la membrana deformada y el plano  $xy$  (fig.2.6.2) representa el par de torsión siempre que  $q/s$  es sustituido por  $2G\theta$ .

## 2.7.- TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA.

Ocupando la analogía con la membrana se encuentra una solución sencilla del problema de torsión de una barra de sección rectangular estrecha. Despreciando el efecto de los lados cortos del rectángulo y suponiendo que la membrana, ligeramente deformada, toma una forma cilíndrica (fig.2.7.1), podremos obtener la flecha de la membrana mediante la fórmula elemental de la parábola, que corresponde a la curva de equilibrio de un hilo uniformemente cargado (fig.2.7.1.b):

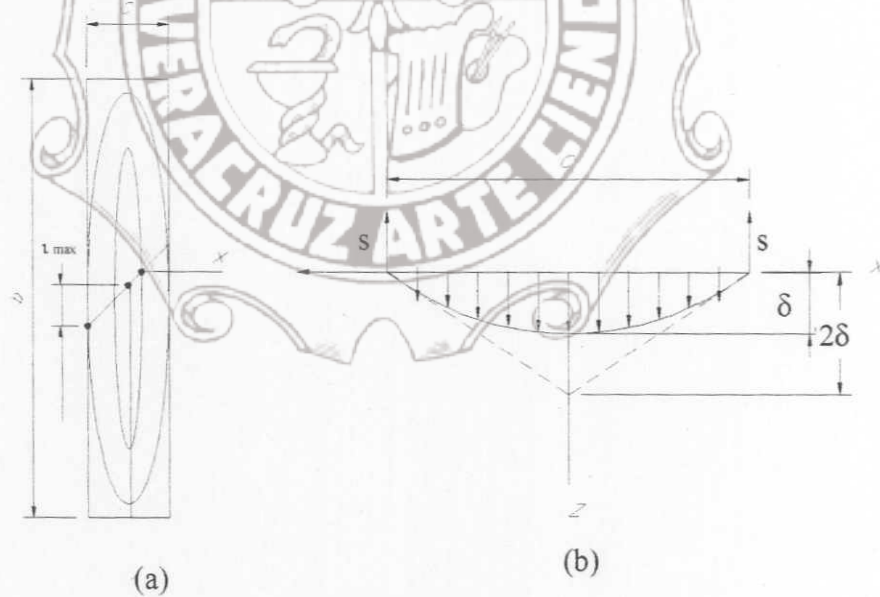


Fig.2.7.1)

$$\delta = \frac{qc^2}{8S} \quad (2.7.a)$$

De acuerdo a las propiedades de la parábola, la pendiente máxima, que se presenta en el punto medio de los lados largos del rectángulo, es:

$$\frac{4\delta}{c} = \frac{qc}{2S} \quad (2.7.b)$$

Calculando como cilindro parabólico el volumen limitado por la membrana deformada y el plano xy, tenemos:

$$V = \frac{2}{3} c\delta b = \frac{qbc^3}{12S} \quad (2.7.c)$$

Aplicando la analogía de la membrana y sustituyendo  $q/S$  por  $2G\theta$  en (2.7.b) y (2.7.c) se obtiene:

$$\tau_{\max} = cG\theta, \quad M_t = \frac{1}{3} bc^3 G\theta \quad (2.7.d)$$

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3} bc^3 G} \quad (2.7.1) \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} bc^2} \quad (2.7.2)$$

La curva de deflexión parabólica (fig.2.7.1.b), es:  $Z = \frac{4\delta}{c^2} \left( \frac{c^2}{4} - x^2 \right)$

y la pendiente de la membrana en cualquier punto es:  $\frac{dz}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{q}{S} x$

en la barra sometida a torsión, el esfuerzo correspondiente es:  $\tau_{yz} = 2G\theta x$

## 2.8.- TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN RECTANGULAR.

Empleando nuevamente la analogía de la membrana, el problema para secciones rectangulares se reduce a la determinación de las flechas de una membrana rectangular, como la representada en la fig.2.8.1). Estas flechas deben de satisfacer la ecuación (2.6.1) y ser cero en el contorno.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{s} \quad (2.8.a)$$

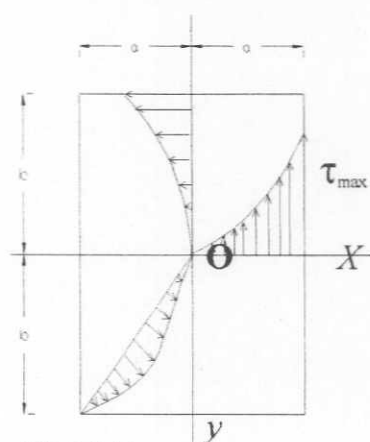


Fig.2.8.1)

La condición de la simetría con respecto al eje "y" y las condiciones de contorno en los lados  $x = \pm a$  del rectángulo, quedan satisfechas si se expresa  $z$  de la forma de una serie,

$$z = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2a} Y_n \quad (2.8.b)$$

donde  $b_1, b_3, \dots$  son coeficientes constantes e  $Y_1, Y_3, \dots$  son funciones de  $y$  solamente.

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

Sustituyendo (2.8.b) en la ecuación (2.8.a) y observando que el segundo miembro de esta ecuación puede ser desarrollado en serie:

$$-\frac{q}{S} = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (2.8.c)$$

Para la determinación de  $Y_n$  tenemos la siguiente ecuación:

$$Y_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} Y_n = - \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.8.d)$$

$$Y_n = A \sinh \frac{n\pi y}{2a} + B \cosh \frac{n\pi y}{2a} + \frac{16qa^2}{S n^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.8.e)$$

La constante  $A$ , debe ser cero por la simetría de la superficie deformada de la membrana respecto al eje  $x$ . La constante  $B$  es determinada de la condición de que la flecha de la membrana sea nula para  $y = \pm b$ , es decir,  $(Y_n)_{y=\pm b} = 0$  lo que da:

$$Y_n = \frac{16qa^2}{S n^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y / 2a)}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right] \quad (2.8.f)$$

La expresión general, según (2.8.b), de la superficie deformada de la membrana será:

$$Z = \frac{16qa^2}{S \pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y / 2a)}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

La función de esfuerzo se obtiene sustituyendo  $q/S$  por  $2G\theta$ :

$$\phi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y / 2a)}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (2.8.g)$$

A partir de (2.3.9) se obtienen las componentes del esfuerzo :

$$\tau_{yz} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y / 2a)}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right] \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad (2.8.h)$$

El esfuerzo tangencial máximo suponiendo que  $b > a$ , correspondiente a la mayor pendiente de la membrana, se da en los puntos medios de los lados largos  $x = \pm a$  del rectángulo.

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

Sustituyendo  $x = a$ ,  $y = 0$  en (2.8.h) obtenemos:

$$\tau_{\max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right]$$

ya que:  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$

tenemos:  $\tau_{\max} = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi b / 2a)} \right]$  (2.8.1)

El  $\tau_{\max}$  para cualquier valor particular de  $b/a$ , se calcula con suficiente exactitud, ya que la serie del segundo miembro converge con gran rapidez para  $b > a$ . En el caso de un rectángulo muy estrecho, por ejemplo  $b/a$  resulta muy grande, por lo cual podemos despreciar la sumatoria de (2.8.1). Tenemos entonces  $\tau_{\max} = 2G\theta a$  lo que coincide con la primera de las ecuaciones (2.7.d) de la sección (2.7). Si la sección es cuadrada  $a=b$  y de la ecuación (2.8.1):

$$\tau_{\max} = 2G\theta a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[ \frac{1}{\cosh(\pi/2)} + \frac{1}{9 \cosh(3\pi/2)} + \dots \right] \right\}$$

$$\tau_{\max} = 2G\theta a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[ \frac{1}{2.509} + \frac{1}{9(55.67)} + \dots \right] \right\} = 1.31G\theta a$$
 (2.8.2)

En general se tiene:  $\tau_{\max} = k 2 G \theta a$  (2.8.3)

En donde  $k$  es un factor numérico que depende de  $b/a$ . Diversos valores de este factor son dados en la tabla 2.8.1). El momento torsionante  $M_t$  se calculará ahora en función del ángulo específico de torsión  $\theta$ . Usando para ello la ecuación (2.3.16) obtenemos:

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \phi dx dy = \frac{64G\theta a^2}{\pi^3} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y / 2a)}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \right\} dx dy =$$

$$= \frac{32G\theta(2a)^3(2b)}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{64G\theta(2a)^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a}$$

ya que:  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Tenemos: 
$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (2.8.4)$$

Mt puede ser calculado fácilmente para cualquier valor de la relación a/b, ya que la serie en el segundo miembro converge rápidamente. En el caso de un rectángulo estrecho

tenemos que : 
$$\tanh \frac{n\pi b}{2a} = 1$$

y 
$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left( 1 - 0,630 \frac{a}{b} \right) \quad (2.8.5)$$

a=b en la sección cuadrada y (2.8.4) da 
$$M_t = 0,1406 G\theta(2a)^4 \quad (2.8.6)$$

El momento Mt puede ser representado en general por la ecuación:

$$M_t = k_1 G\theta(2a)^3(2b) \quad (2.8.7)$$

donde k<sub>1</sub> es un factor numérico cuyo valor depende de la relación b/a. Diversos valores de este factor son dados en la tabla 2.8.1). Sustituyendo el valor de θ dado por la ecuación (2.8.7) en la ecuación (2.8.3) obtenemos el esfuerzo tangencial máxima en función del momento de torsión:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2 (2a)^2 (2b)} \quad (2.8.8)$$

k<sub>2</sub> es un factor numérico cuyo valor viene indicado en la tabla siguiente:

b/a	k	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>
1,0	0,675	0,1406	0,208
1,2	0,759	0,166	0,219
1,5	0,848	0,196	0,231
2,0	0,930	0,229	0,246
2,5	0,968	0,249	0,258
3	0,985	0,263	0,267
4	0,997	0,281	0,282
5	0,999	0,291	0,291
10	1,000	0,312	0,312
∞	1,000	0,333	0,333

Tabla 2.8.1)

## 2.9.- TORSIÓN DE PERFILES LAMINADOS.

El estudio de la torsión de secciones formadas por aceros laminados, como perfiles U, L, C e I, se tratará como un caso particular para barras de sección rectangular estrecha. Si la sección transversal es de espesor constante, como en la fig.2.9.1), el ángulo de torsión se obtiene con suficiente exactitud a partir de la ecuación (2.7.1), haciendo en ella  $b$  igual a la longitud desarrollada de la fibra media de la sección, es decir,  $b=2a-c$ . Para una sección en U (fig.2.9.1.b), se obtiene con cierta aproximación el ángulo de torsión considerando para las alas un espesor medio, descomponiendo la sección transversal en tres rectángulos y sustituyendo en la ecuación (2.7.1)  $bc^3$  por  $b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3$ , lo que significa que la rigidez torsional de la pieza es igual a la suma de las rigideces de los tres rectángulos. Se tiene entonces:

$$\theta = \frac{3M_t}{(b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3)G} \quad (2.9.a)$$

El esfuerzo en los puntos del contorno, situados a distancia considerable de los vértices de la sección transversal, lo podemos calcular usando, la ecuación correspondiente a un rectángulo alargado y tomar:

$$\tau = c\theta G$$

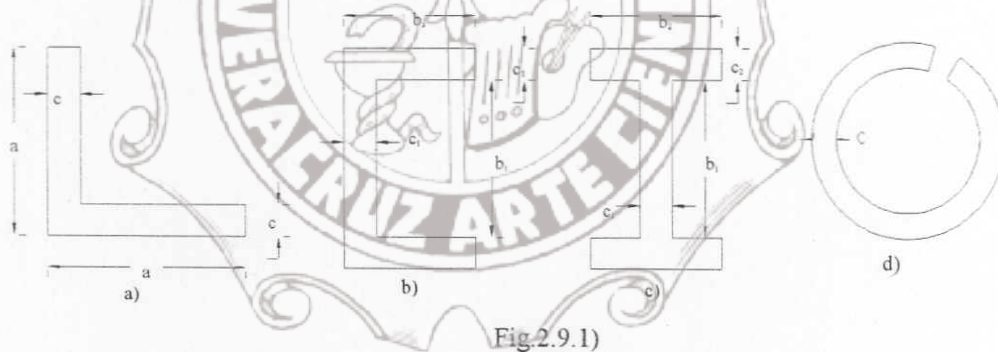


Fig.2.9.1)

De la ecuación (2.9.a) tendremos, para las alas de perfil :

$$\tau = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad (2.9.b)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para una viga de sección I (fig.2.9.1.c). En los ángulos entrantes se produce una considerable concentración de esfuerzos cuya magnitud depende del radio de las curvas de transición.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

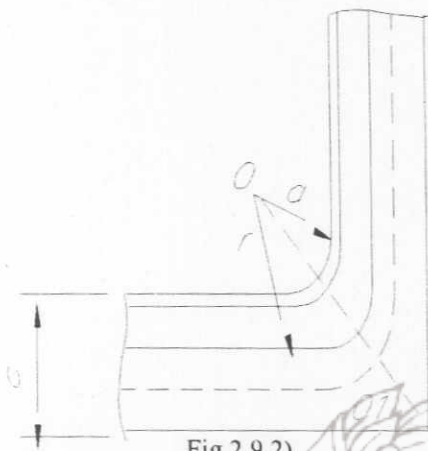


Fig.2.9.2)

Para las tensiones existentes en tales puntos, un valor aproximado puede obtenerse mediante la analogía de la membrana. Consideremos una sección transversal angular, de espesor constante  $c$  (fig.2.9.2) y sea  $a$  el radio en la transición que corresponde al ángulo entrante. Suponiendo que la superficie de la membrana en la bisectriz  $OO_1$ , es aproximadamente una superficie de revolución de eje perpendicular al plano de la figura en  $O$  y empleando coordenadas polares, la ecuación (2.6.1) de la superficie deformada de la membrana se transforma en:

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = \frac{q}{S} \quad (2.9.c)$$

La pendiente de la membrana nos da el esfuerzo tangencial al sustituir  $q/S$  por  $2G\theta$  en la expresión (2.9.c), por lo que obtendremos la siguiente ecuación para el esfuerzo tangencial:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = -2G\theta \quad (2.9.d)$$

Para los puntos de las alas del ángulo, situados a considerable distancia de las esquinas, donde la membrana tiene una superficie aproximadamente cilíndrica, la ecuación correspondiente será:

$$\frac{d\tau}{dn} = -2G\theta \quad (2.9.e)$$

Donde "n" es la normal al contorno. Llamando  $\tau_1$  al esfuerzo en el borde, la ecuación (2.9.e) previamente obtenida para el caso de un rectángulo alargado  $\tau_1 = G\theta c$ . Usando ésta y empleando la ecuación (2.9.d) nos lleva a:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = -2 \frac{\tau_1}{c} \quad (2.9.d')$$

Integrando, tenemos:

$$\tau = \frac{A}{r} - \frac{\tau_1 r}{c} \quad (2.9.f)$$

Donde  $A$  es una constante de integración. Para la determinación de la misma, supongamos que el esfuerzo tangencial se anula en el punto  $O_1$ , distante  $c/2$  del contorno (fig.2.9.2). Según (2.9.f) se tendrá

$$\frac{A}{a+(c/2)} - \frac{\tau_1 [a+(c/2)]}{c} = 0 \quad \text{y} \quad A = \frac{\tau_1}{c} (a + \frac{c}{2})^2$$

Sustituyendo en (2.9.f) y tomando  $r = a$  obtenemos:  $\tau_{\max} = \tau_1 \left(1 + \frac{c}{4a}\right)$  (2.9.g)



**CAPÍTULO III.****ELEMENTO FINITO.****3.1.- INTRODUCCIÓN.**

El método de elemento finito es un procedimiento numérico para obtener solución a muchos de los problemas encontrados en el análisis ingenieril. Este tiene dos subdivisiones primarias. La número uno utiliza elementos discretos para obtener los desplazamientos en las articulaciones y las fuerzas en los miembros de un marco estructural. La segunda usa elementos continuos para obtener soluciones aproximadas como para transferencia de calor, mecánica de fluidos y problemas de mecánica de sólidos. La formulación, usando elementos discretos, es referida como el análisis matricial de estructuras y producen resultados idénticos a los del análisis clásico de marcos estructurales. El segundo enfoque es el verdadero método de elemento finito. Este produce valores aproximados de los parámetros deseados en puntos específicos llamados nodos. Un programa general de computadora de elemento finito, es capaz de resolver ambos tipos de problemas y el nombre "método de elemento finito" es frecuentemente usado para denotar ambas formulaciones, con elementos discretos y con continuos. El método de elemento finito aplica conceptos matemáticos para producir un sistema de ecuaciones lineales o no lineales. El número de ecuaciones es usualmente muy grande y requiere el poder de cálculo de una computadora, el método tiene poco valor práctico sin una computadora. No es posible documentar el origen exacto del método de elemento finito ya que los conceptos básicos envuelven un período de 150 o más años. El método que nosotros conocemos hoy en día es el resultado de varios artículos publicados en los 40's y 50's que extiende el análisis matricial de estructuras para cuerpos continuos tales como los de Hrenikoff (1941), Courant(1943), Argyris y Kelsey (1960), y Turner, Clough, Martin, and Topp (1956). El término "Elemento finito" fue usado por primera vez por Clough (1960) en un artículo titulado "The finite element in plane stress analysis" en donde la técnica fue presentada para análisis plano de esfuerzos, implicando el uso directo de metodología estándar aplicable a sistemas discretos desde un punto de vista computacional. La exploración espacial de los 60's proporcionó recursos para investigaciones básicas las cuales colocaron al método en bases matemáticas firmes y estimuló el desarrollo de programas de computadora, implementando el método con múltiples propósitos. El diseño de aviones, misiles, cápsulas espaciales y similares proporcionó áreas de aplicación. Aunque el origen del método es vago, sus ventajas son claras. El método es fácilmente aplicable a objetos de forma irregular compuestos de diferentes materiales y teniendo condiciones de frontera variadas. Eso es aplicable para problemas dinámicos y estáticos, así como a problemas que envuelven materiales con propiedades no lineales. El método de elemento finito es la base de muchos programas de diseño asistidos por computadora. El incremento en el uso de diseño asistido por computadora hace imperativo el conocimiento de como el método de elemento finito trabaja.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 3.2.- SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTERA.

Un camino para resolver cualquier problema físico gobernado por ecuaciones diferenciales es obtener su solución analítica, sin embargo, hay muchas situaciones, donde la solución analítica es difícil de obtener. La región en consideración puede ser irregular, esto es, que matemáticamente sea imposible de describir la frontera. La configuración puede estar compuesta de diferentes y diversos materiales, cuyas regiones sean matemáticamente difíciles de describir. Problemas que envuelven materiales anisotrópicos son usualmente difíciles de resolver analíticamente, así como problemas cuya relación esfuerzo-deformación o bien cuando se estudian grandes deformaciones contienen términos no lineales. Los métodos numéricos pueden ser usados para obtener una solución aproximada cuando la solución analítica no puede ser desarrollada. Todas las soluciones numéricas, producen puntos de valores discretos, para un juego de parámetros independientes. El procedimiento de solución completo es repetido cada vez que estos parámetros cambian. Las soluciones numéricas aproximadas son, por mucho, preferibles que la no solución analítica del problema. Los valores calculados nos dan información importante acerca de procesos físicos aun cuando ellos estén discretizados en puntos. Hay varios procedimientos para obtener una solución numérica para una ecuación diferencial, los métodos pueden ser separados dentro de 3 grupos básicos: (1) El método de las diferencias finitas, (2) El método variacional y (3) El método de residuos ponderados.

#### 3.2.1.- MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.

El método de diferencias finitas, aproxima las derivadas en la ecuación diferencial, usando la aproximación de diferencias finitas. Este método es útil, para resolver problemas de transferencia de calor, mecánica de fluidos, y trabaja bien para regiones bidimensionales con fronteras paralelas a ejes de coordenadas. El método, sin embargo es complicado cuando las regiones tienen fronteras curvas o irregulares y esto hace difícil el escribir programas generales para dicho método.

#### 3.2.2.- MÉTODO VARIACIONAL.

La aproximación variacional envuelve la integral de una función que produce un número. Cada nueva función produce un nuevo número, la función que produce el número más pequeño tiene la propiedad adicional de satisfacer una ecuación diferencial específica. Por ejemplo:

$$\Pi = \int_0^L \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (3.2.1)$$

El valor numérico de  $\Pi$  puede ser calculado dada una ecuación específica  $y=f(x)$ . Los cálculos de variaciones muestran, sin embargo, que la ecuación particular  $y=g(x)$ , la cual produce el valor numérico más bajo para  $\Pi$ , es la solución de la ecuación diferencial.

$$D \frac{d^2y}{dx^2} + Q = 0 \quad (3.2.2)$$

Con las condiciones de frontera  $y(0) = y_0$  e  $y(L) = y_L$ . La función de prueba que da el mínimo valor de  $\Pi$  es la solución aproximada. El método variacional es la base para muchas formulaciones de elemento finito, pero tiene una gran desventaja, no es aplicable a ecuaciones diferenciales que contengan términos en primeras derivadas.

### 3.2.3.- MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS.

El método de los residuos ponderados también envuelve una integral. En este método, una solución aproximada es sustituida dentro de la ecuación diferencial. Ya que la solución aproximada no satisface la ecuación, resulta un término residual o de error, suponiendo que  $y=h(x)$  es una solución aproximada de (3.2.2) sustituyendo da:

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q \neq 0 \quad (3.2.3)$$

a esta diferencia la llamaremos *residuo*  $R(x)$ , ya que  $y=h(x)$  no satisface la ecuación. El método de residuos ponderados requiere que

$$\int_0^L W_i(x)R(x)dx = 0 \quad (3.2.4)$$

El residuo  $R(x)$  es multiplicado por una función de ponderación  $W_i(x)$ , y la integral del producto es necesario que sea cero. El número de funciones de ponderación es igual al número de coeficientes desconocidos en la solución aproximada. Hay varias opciones para las funciones de ponderación y algunas de las más populares les han sido asignados nombres. Estas opciones son mencionadas a continuación.

**MÉTODO DE COLOCACIÓN** : Funciones impulso  $W_i(x)=\delta(x-x_i)$  son seleccionadas como funciones de ponderación donde  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac. Esta selección es equivalente a necesitar que el residuo desaparezca en puntos específicos. El número de puntos seleccionados es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

**MÉTODO DE SUBDOMINIO**: Cada función de ponderación es seleccionada como unitaria,  $W_i(x)=1$ , sobre una región específica. Esto es equivalente a necesitar que la integral del residuo desaparezca sobre un intervalo de la región. El número de intervalos de integración iguala el número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

**MÉTODO DE GALERKIN** : El método de Galerkin usa la misma función para  $W_i(x)$  que fue usada en la ecuación de aproximación es decir  $W_i(x)=h(x)$ . Este enfoque es la base del método de elemento finito para problemas que envuelven términos en primeras derivadas. El método de Galerkin es usado para desarrollar las ecuaciones de elemento finito para el problema discutido en este trabajo.

**MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS :** El método de mínimos cuadrados, utiliza el residuo como la función de peso o ponderación y obtiene un nuevo término de error definido por :

$$E_r = \int_0^L [R(x)]^2 dx \quad (3.2.5)$$

Este error es minimizado con respecto al coeficiente desconocido en la solución aproximada. El método de los mínimos cuadrados ha sido utilizado para formulaciones de elemento finito, pero no es tan popular como el método de Galerkin y la aproximación variacional. *El método Variacional y el método de Residuos Ponderados cada uno envuelve una integral. Estos métodos pueden ser agrupados bajo el encabezado de formulaciones integrales.*

### 3.3.- FORMULACIONES POR ENERGÍA POTENCIAL .

La solución de problemas de mecánica de sólidos, los cuales incluyen la solución de problemas de elasticidad de dos y tres dimensiones, así como placas y estructuras de cascarones, pueden ser enfocados de varias formas. El enfoque clásico es la formulación de las ecuaciones diferenciales gobernantes y obtener la solución analítica. Esto no se puede hacer en muchos problemas debido a la dificultad en describir matemáticamente la geometría estructural o las condiciones de frontera. Una alternativa popular al enfoque clásico es un procedimiento numérico basado en el principio del mínimo de la energía potencial, el cual establece que: *Las ecuaciones de desplazamientos que satisfacen la compatibilidad interna, las condiciones de frontera y que también satisfacen las ecuaciones de equilibrio, hacen la energía potencial un mínimo en un sistema estable.* Es decir que los desplazamiento en la posición de equilibrio ocurren tal que la energía potencial de un sistema estable es un valor mínimo.

El principio anterior implica lo siguiente:

- 1.-Escribir las ecuaciones de desplazamiento para cada miembro.
- 2.-Incorporar las condiciones de frontera para que las ecuaciones de desplazamiento cumplan todas las condiciones de apoyo.
- 3.-Escribir una ecuación para la energía potencial interna del sistema estructural en términos de los desplazamientos desconocidos.
- 4.-Minimizar la energía potencial con respecto a los desplazamientos indeterminados dentro de las ecuaciones de desplazamiento.

El seguir los cuatro pasos anteriores nos lleva a un sistema de ecuaciones de equilibrio que se resuelven para los desplazamientos de los nudos. Una vez que los desplazamientos son conocidos las fuerzas internas y los momentos en cada miembro pueden ser calculadas.

### 3.4.- MÉTODO DE ELEMENTO FINITO .

El método de elemento finito es un procedimiento numérico para resolver problemas físicos gobernados por una ecuación diferencial o un teorema de energía. Este tiene dos características que lo distinguen de otros procedimientos numéricos.

- 1.- El método utiliza una formulación integral, que genera un sistema de ecuaciones algebraicas.
- 2.-El método usa funciones continuas de discretización para aproximar la cantidad o cantidades desconocidas.

La segunda característica distingue al método de elemento finito de otros procesos numéricos que utilizan formulación integral. El método de elemento finito usa una función continua, pero una con sólo suficiente continuidad en las derivadas, para permitir que las integrales puedan ser evaluadas. Una ecuación compuesta de varios segmentos lineales puede ser usada como una ecuación de aproximación.

En el método de elemento finito pueden considerarse los siguientes cinco pasos básicos.

1. - *Discretizar la región.* Esto incluye localización y numeración de nudos, también como la especificación de sus valores de coordenadas.
2. - *Especificar la ecuación de aproximación.* El orden de la aproximación, lineal o cuadrática, debe de ser especificado y las ecuaciones deben ser escritas en términos de los valores nodales desconocidos. Una ecuación es escrita para cada elemento
3. - *Desarrollar el sistema de ecuaciones.* Cuando usamos el método de Galerkin, las funciones de ponderación para cada valor nodal desconocido es definido y la integral de residuo ponderado es evaluada. Esto genera una ecuación para cada valor nodal desconocido. En la formulación de energía potencial, la energía potencial del sistema es escrita en términos de los desplazamientos nodales y entonces es minimizada. Esto da una ecuación para cada uno de los desplazamientos.
4. - *Resolver el sistema de ecuaciones.*
5. - *Calcular las cantidades de interés.* Estas cantidades son usualmente relacionadas a la derivada de los parámetros.

## 3.5.- ELEMENTOS BIDIMENSIONALES.

Una ventaja primaria del método de elemento finito es el caso, el cual puede ser generalizado para resolver problemas bidimensionales compuestos de diferentes materiales y teniendo fronteras irregulares. La discusión de los problemas bidimensionales comienza considerando los elementos lineal triangular y bilineal rectangular, así como las funciones de interpolación y un sistema adecuado de coordenadas.

El elemento lineal triangular (fig. 3.5.1a) tiene lados rectos y nodos en cada esquina. La ecuación de interpolación para una cantidad escalar es:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.5.1)$$

El cual es un polinomio lineal completo ya que éste contiene un término constante y todos los posibles términos lineales, normalmente,  $x$  e  $y$ . Como resultado, el elemento triangular puede tomar cualquier orientación y satisfacer los requerimientos de continuidad envolviendo elementos adyacentes.

El elemento rectangular bilineal (fig. 3.5.1b) tiene lados rectos y nodos en cada esquina. La ecuación de interpolación para una cantidad escalar es.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (3.5.2)$$

Esta ecuación contiene sólo uno de tres posibles términos de segundo orden,  $xy$ . El rectángulo no puede tener una orientación arbitraria ya que los términos  $x^2$  y  $y^2$  no están presentes. Los lados del rectángulo deben permanecer paralelos al sistema coordenado  $x$ - $y$ .

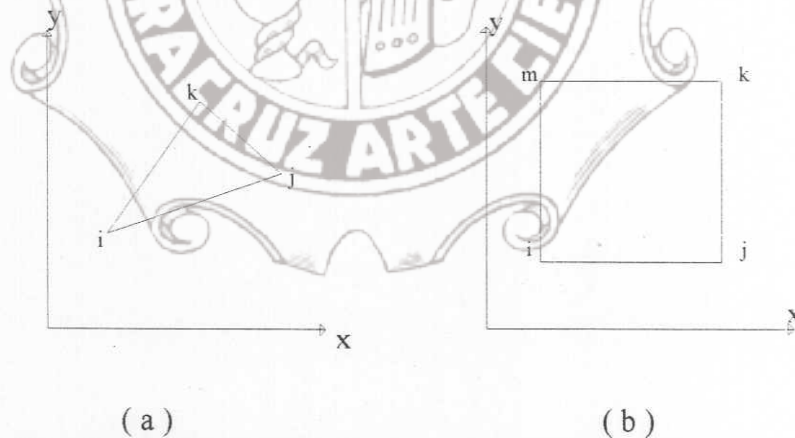


Figura 3.5.1. El elemento triangular lineal y el elemento rectangular bilineal.

## 3.5.1.- ELEMENTO TRIANGULAR:

El elemento lineal triangular mostrado en la figura 3.5.2) tiene lados rectos y tres nodos, uno en cada esquina, una nomenclatura uniforme de los nudos es un requisito. Los valores nodales de  $\phi$  son  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$  y  $\Phi_k$ , considerando las coordenadas  $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$ , y  $(X_k, Y_k)$ .

De lo anterior se tendrían las condiciones nodales:

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_i, & \text{en} & \quad x=X_i, \quad y=Y_i \\ \phi &= \Phi_j, & \text{en} & \quad x=X_j, \quad y=Y_j \\ \phi &= \Phi_k, & \text{en} & \quad x=X_k, \quad y=Y_k \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

y el polinomio de interpolación para el elemento triangular :

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.5.4)$$

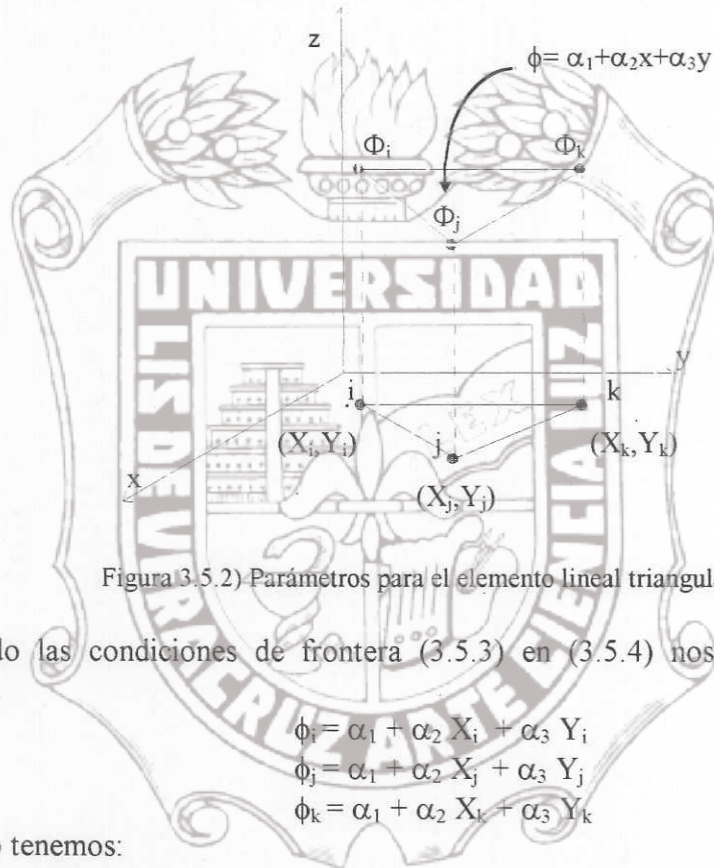


Figura 3.5.2) Parámetros para el elemento lineal triangular.

Sustituyendo las condiciones de frontera (3.5.3) en (3.5.4) nos lleva al sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\ \phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\ \phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} \left[ (X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k \right] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} \left[ (Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} \left[ (X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k \right] \end{aligned}$$

donde el determinante :

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A \quad (3.5.6)$$

siendo A el área del triángulo .

Sustituyendo para  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  en (3.5.4) y reorganizando, produce una ecuación para  $\phi$  en términos de las tres funciones de interpolación y  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$  que es:

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \quad (3.5.7)$$

Donde: 
$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (3.5.8)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad (3.5.9)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad (3.5.10)$$

y

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j, & b_i &= Y_j - Y_k, & c_i &= X_k - X_j \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k, & b_j &= Y_k - Y_i, & c_j &= X_i - X_k \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i, & b_k &= Y_i - Y_j, & c_k &= X_j - X_i \end{aligned}$$

La cantidad escalar  $\phi$  se relaciona a los valores nodales por un grupo de funciones de interpolación que son lineales en  $x$  e  $y$ , esto significa que los gradientes  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  son constantes dentro del elemento, por ejemplo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k \quad (3.5.11)$$

pero:

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{b_\beta}{2A} \quad \beta = i, j, k.$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2A} [b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k] \quad (3.5.12)$$

Ya que  $b_i, b_j,$  y  $b_k$  son constantes (éstos son fijados una vez que las coordenadas nodales son especificadas) y  $\Phi_i, \Phi_j$  y  $\Phi_k$  son independientes de las coordenadas espaciales, las derivadas tienen un valor constante. Un gradiente constante dentro de cualquier elemento significa que muchos pequeños elementos tienen que ser usados para aproximar precisamente un cambio rápido.

### 3.5.2.- ELEMENTO RECTANGULAR:

El elemento bilineal rectangular tiene una longitud de  $2b$  y una altura de  $2a$ . Los nodos son etiquetados  $i, j, k$  y  $m$  con el nodo  $i$  siempre en la esquina inferior izquierda. El elemento y el sistema de coordenadas son mostrados en la figura 3.5.3).

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana



Las ecuaciones de interpolación (3.5.2) son escritas en términos de coordenadas locales  $s$  y  $t$ , hay al menos tres opciones con:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 t + \alpha_4 st \quad (3.5.13)$$

Siendo ésta la más útil, las otras elecciones reemplazarán el término  $st$  por  $s^2$  o  $t^2$ . La ecuación (3.5.13) es usada ya que  $\phi$  es lineal en  $s$  a lo largo de cualquier línea de constante  $t$  y lineal en  $t$  a lo largo de cualquier línea de constante  $s$ , por estas propiedades, el elemento es frecuentemente llamado bilineal. La ecuación (3.5.13) es escrita relativa a un sistema de coordenadas locales, cuyo origen es en el nodo  $i$  ya que la función de forma es fácilmente evaluada en este marco de referencia. Otro popular sistema de coordenadas es el  $qr$ , el cual tiene su origen localizado en el centro del elemento (fig. 3.5.3). Los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , y  $\alpha_4$  en (3.5.13) son obtenidos usando los valores nodales de  $\phi$  y las coordenadas nodales (en el sistema  $st$ ) para generar cuatro ecuaciones.

Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 \\ \Phi_j &= \alpha_1 + (2b) \alpha_2 \\ \Phi_k &= \alpha_1 + (2b) \alpha_2 + (2a) \alpha_3 + (4ab) \alpha_4 \\ \Phi_m &= \alpha_1 + (2a) \alpha_3 \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

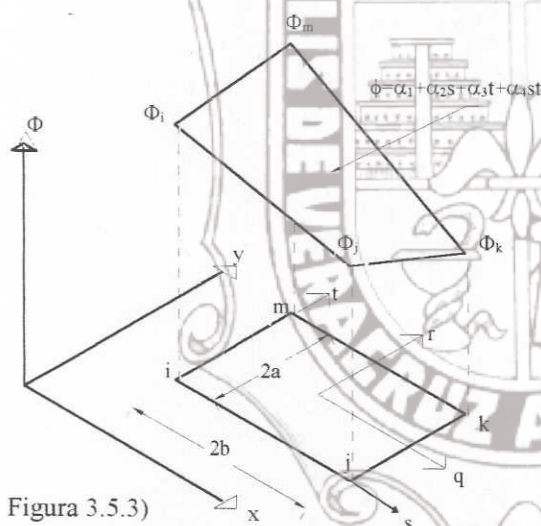


Figura 3.5.3)

Resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Phi_i \\ \alpha_2 &= 1/2b (\Phi_j - \Phi_i) \\ \alpha_3 &= 1/2a (\Phi_m - \Phi_i) \\ \alpha_4 &= 1/4ab (\Phi_i - \Phi_j + \Phi_k - \Phi_m) \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Sustituyendo de (3.5.15) en (3.5.13) y reorganizando nos da:

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k + N_m \Phi_m \quad (3.5.16)$$

Donde:

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \left(1 - \frac{t}{2a}\right), \\ N_j &= \frac{s}{2b} \left(1 - \frac{t}{2a}\right), \quad N_k = \frac{st}{4ab}, \quad N_m = \frac{t}{2a} \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Las funciones de interpolación para el elemento rectangular bilineal tienen propiedades similares a las que posee el elemento triangular, cada función de interpolación varía linealmente a lo largo de los bordes entre su nodo y los dos nodos adyacentes, por ejemplo,  $N_i$  varía linealmente a lo largo de los lados  $ij$  y  $mi$ , cada función de interpolación es también cero a lo largo de los lados donde su nodo no toca, por ejemplo,  $N_i$  es cero a lo largo de los lados  $jk$  y  $km$ . La variación lineal de  $\phi$  a lo largo de un borde del elemento rectangular y un borde del elemento triangular significa que estos dos elementos son compatibles y pueden ser adyacentes uno con otro.

3.6.- DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS .

Todas las soluciones de elemento finito requieren la evaluación de integrales, algunas de estas son fácilmente evaluadas mientras que otras son muy difíciles y muchas son imposibles de evaluar analíticamente, por lo que se requiere emplear técnicas numéricas. Las dificultades asociadas con la evaluación de una integral puede frecuentemente ser disminuida cambiando las variables de integración, esto nos lleva a escribir la integral en un nuevo sistema de coordenadas.

3.6.1.- SISTEMAS DE COORDENADAS LOCALES :

Considerando las funciones lineales de interpolación de Lagrange :

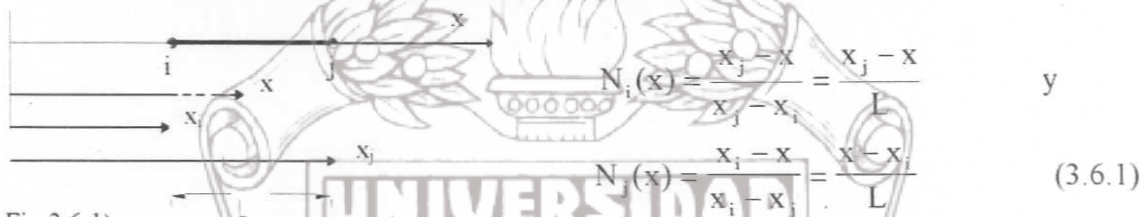


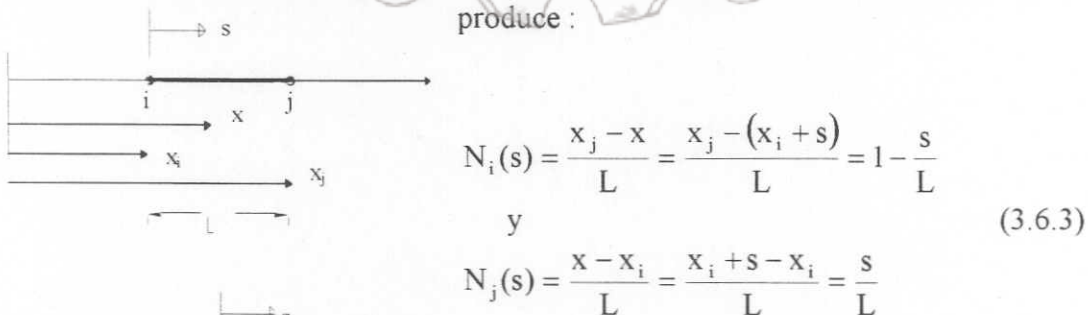
Fig.3.6.1)

que son para elementos en los cuales el origen del sistema de coordenadas está a la izquierda del nodo i (fig 3.6.1), estas son ecuaciones generales validas para todos los elementos lineales sin importar su localización. La desventaja de estas funciones de interpolación, mostradas arriba, es cuando evaluamos las integrales envolviendo productos de funciones de interpolación tales como :

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i(x)N_j(x)dx \quad \text{o} \quad \int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx \quad (3.6.2)$$

La integración en (3.6.2) se simplifica considerablemente si seleccionamos un sistema de coordenadas adecuado, un sistema es el llamado sistema de coordenadas locales, los sistemas de coordenadas locales más comunes para elementos unidimensionales tienen el origen localizado en el nudo i o en el centro del elemento (fig.3.6.2).

La función de interpolación para un sistema de coordenadas localizado en el nudo i es obtenido de (3.6.1) reemplazando x por  $x = x_i + s$ , donde  $0 < s < L$ . Esta sustitución produce :



Note que cada función de forma es igual a uno en su propio nodo y cero en los otros nodos y la suma de las dos funciones da uno como en (3.6.1).

fig.3.6.2) Sistema local de coordenadas para elementos unidimensional.

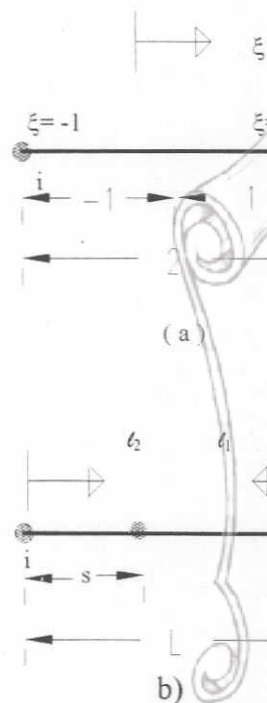
Instituto de Ingeniería Universidad Veracruzana

Las funciones de interpolación para un sistema coordenado localizado en el centro del elemento es obtenida de (3.6.1) reemplazando  $x$  por  $x = x_i + (L/2) + q$ , esta función de interpolación es :

$$N_j(q) = \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{L}\right) \quad \text{y} \quad N_i(q) = \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right) \quad (3.6.4)$$

donde  $-L/2 < q < L/2$ .

**3.6.2.- SISTEMA DE COORDENADAS NATURALES:**



El sistema de coordenadas locales  $s$  y  $q$  puede ser convertido a un sistema de coordenadas naturales. Un sistema de coordenadas naturales es un sistema local que permite la especificación de un punto dentro del elemento para un número adimensional, cuya magnitud absoluta nunca exceda la unidad. Comienza con la coordenada  $q$  en la fig.3.6.2) y forma la relación  $q/(L/2)=2q/L=\xi$ . La coordenada  $\xi$  varia de  $-1$  a  $+1$ , fig.3.6.3a). La función de interpolación en (3.6.4) puede ser escrita en términos de  $\xi$  reemplazando  $q$  por  $q=\xi L/2$ . La nueva función de interpolación es :

$$N_i(\xi) = (1-\xi)/2 \quad \text{y} \quad N_j(\xi) = (1+\xi)/2 \quad (3.6.5)$$

Otro interesante sistema de coordenadas naturales consiste en un par de longitudes de relaciones, fig.3.6.3b), si  $s$  es la distancia desde el nodo  $i$ , entonces  $l_1$  y  $l_2$  son definidos como las relaciones

Fig.3.6.3. Sistema de coordenadas naturales para elementos unidimensionales.

$$l_1 = \frac{L-s}{L} \quad \text{y} \quad l_2 = \frac{s}{L} \quad (3.6.6)$$

Este par de coordenadas no son independientes ya que:  $l_1 + l_2 = 1$  (3.6.7)  
 La más importante característica de (3.6.6) y (3.6.7) es que  $l_1$  y  $l_2$  son idénticas a las funciones de interpolación definidas por (3.6.3).

**COORDENADAS DE ÁREA.**

Un sistema natural de coordenadas para el elemento triangular es obtenido definiendo tres relaciones de longitud  $L_1, L_2$  y  $L_3$  mostrados en la fig.3.6.4a). Cada coordenada es la relación de la distancia perpendicular desde un lado  $s$ , a la altura  $h$ , del mismo lado, esto es ilustrado en la fig.3.6.4b). Cada coordenada es una longitud que varía entre cero y uno. Las líneas de constante  $L_1$  son mostradas en la fig.3.6.4c). Cada una de estas líneas es paralela al lado del cual  $L_1$  es medido.

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

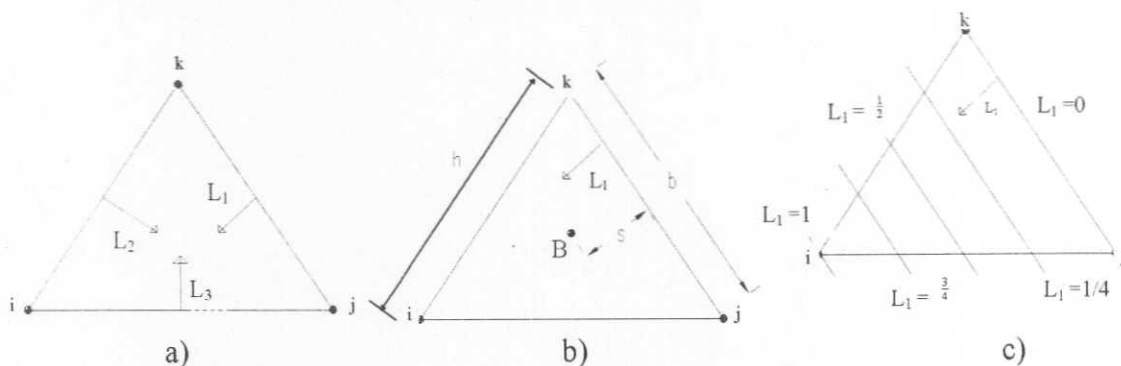


Fig.3.6.4. Tres áreas coordenadas para un elemento triangular.

Las coordenadas  $L_1$ ,  $L_2$ , y  $L_3$  son llamadas coordenadas de área ya que sus valores son la relación del área de una región subtriangular y el área del triángulo completo.

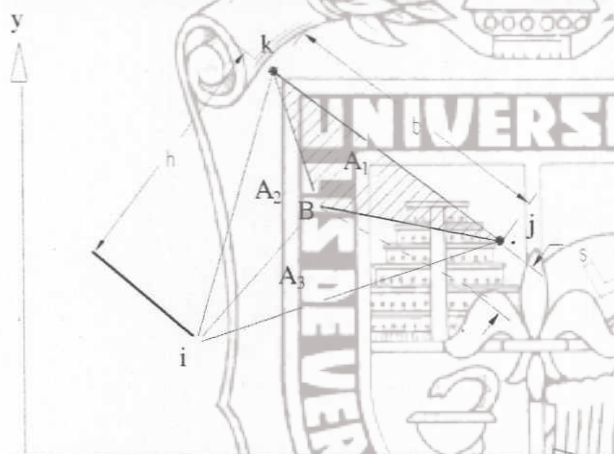


Figura 3.6.5. Un triángulo dividido en las áreas correspondiendo a las coordenadas de área

Considere un punto B como se muestra en la fig.3.6.5). El área completa del triángulo está dada por

$$A = \frac{bh}{2}$$

Considerando el área del triángulo sombreado (B,j,k) es:

$$A_1 = \frac{bs}{2} \quad (3.6.8)$$

Formando la relación  $A_1/A$  resulta:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{s}{h} = L_1 \quad (3.6.9)$$

La coordenada de área  $L_1$  es la relación del área sombreada en la fig.3.6.5) al total del área. Ecuaciones similares pueden ser escritas para  $L_2$  y  $L_3$  resultando:

$$L_2 = \frac{A_2}{A} \quad (3.6.10)$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (3.6.11)$$

ya que  $A_1 + A_2 + A_3 = A$ ,  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$  (3.6.12)

Una ecuación relacionando las tres coordenadas era de esperarse, ya que las coordenadas no son independientes. La localización de un punto, puede ser especificado usando dos de las coordenadas. Podemos determinar el área  $A_1$  mediante un determinante de tercer orden:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}$$

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

$$A_1 = \frac{1}{2} [(X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j - Y_k)x + (X_k - X_j)y] \quad (3.6.13)$$

Donde "x" y "y" son las coordenadas de B en la fig.3.6.5), sustituyendo (3.6.13) en (3.6.9) resulta

$$L_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j - Y_k)x + (X_k - X_j)y] = N_i \quad (3.6.14)$$

La ecuación (3.6.14) es idéntica a (3.5.8) ; así

$$L_1 = N_i \quad (3.6.15)$$

Un análisis similar para  $L_2$  y  $L_3$  muestra que

$$L_2 = N_j \quad \text{y} \quad L_3 = N_k \quad (3.6.16)$$

Las coordenadas de área para elementos lineales triangulares son idénticas a las funciones de interpolación y los dos juegos de cantidades pueden ser intercambiadas. De la misma manera se pueden definir las coordenadas de volumen para un tetraedro sin que entremos en su obtención.

### 3.6.3.- INTEGRACIÓN EN DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS.

Las funciones de interpolación (3.6.3), (3.6.4), (3.6.5), (3.6.6), (3.6.15) y (3.6.16) son útiles sólo si se realiza un cambio en las variables de integración. La fórmula para el cambio de variable para el cálculo integral es:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{p_1}^{p_2} f(g(p)) \left[ \frac{d(g(p))}{dp} \right] dp \quad (3.6.17)$$

Donde p es la nueva variable coordenada y g(p) es la ecuación relacionando x y p, que es,  $x = g(p)$ . La interpretación de (3.6.17) relativa a los sistemas coordenados en la fig.3.6.2) es la siguiente. Para la coordenada s, donde  $x = x_i + s$

$$\int_{x_i}^{x_j} f(x) dx = \int_{s_1}^{s_2} h(s) \frac{d(X_i + s)}{ds} ds = \int_0^L h(s) ds \quad (3.6.18)$$

Donde h(s) es f(x) escrita en términos de s. Los límites de integración fueron obtenidos sustituyendo  $x_i$  y  $x_j$  por x en  $x = x_i + s$  y resolviendo para s.

Para la coordenada q, donde  $x = x_i + L/2 + q$ .

$$\int_{x_i}^{x_j} f(x) dx = \int_{q_1}^{q_2} r(q) \frac{d(X_i + L/2 + q)}{dq} dq = \int_{-L/2}^{L/2} r(q) dq \quad (3.6.19)$$

Donde r(q) es f(x) escrita en términos de q.

En coordenadas naturales el cambio de variables en la integral produce:

$$\int_{-L/2}^{L/2} r(q) dq = \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(\xi) \frac{d(\xi L/2)}{d\xi} d\xi = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (3.6.20)$$

Donde g(ξ) es r(q) escrita en términos de ξ.

La ventaja de la variable coordenada  $\xi$  son el -1 y +1 como límites de integración. La mayoría de los programas de computadora usan técnicas de integración numérica para evaluar los elemento matriciales. Un método de integración numérica usado en programas de elemento finito es el método Gauss-Legendre, el cual tiene los puntos de muestreo y coeficientes de ponderación definidos en el intervalo de -1, +1, la utilidad de estas coordenadas está asociada con la evaluación de las integrales del tipo de:

$$\int_0^L N_i^a(s)N_j^b(s)ds \tag{3.6.21}$$

Las cuales envuelven el producto de funciones de interpolación. Las coordenadas de relación de longitud resultan en una fórmula simple para evaluar una integral similar a (3.6.21). La regla de cambio de variable y las relaciones  $N_i(s) = \ell_1$ ,  $N_j(s) = \ell_2$ ,  $s=L\ell_2$ , y  $ds/d\ell_2 = L$  nos dan:

$$\int_0^L N_i^a(s)N_j^b(s)ds = \int_0^1 \ell_1^a \ell_2^b L d\ell_2 \tag{3.6.22}$$

La integral en el lado derecho de (3.6.22) puede ser escrita usando (3.6.7) como:

$$L \int_0^1 (1-\ell_2)^a \ell_2^b d\ell_2 \tag{3.6.23}$$

La integral (3.6.23) nos recuerda a la función beta  $\beta(z,w)$ , la cual esta definida como:

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{3.6.24}$$

Donde  $\Gamma(n+1) = n!$ , es la función gama o factorial generalizada.

Así

$$L \int_0^1 \ell_1^a \ell_2^b d\ell_2 = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1+1)} = L \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \tag{3.6.25}$$

La ecuación (3.6.25) es útil ya que en estados donde resulta una integral complicada, puede ser evaluada usando una ecuación la cual envuelve sólo longitud del elemento. Veamos ahora el efecto de estas simplificaciones utilizando la transformación de coordenadas. La utilidad de (3.6.18) y (3.6.19) viene a ser importante cuando son evaluadas integrales tales como:

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2 dx$$

Usando la variable coordenada s, nosotros obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x)dx = \int_0^L N_i^2(s)ds = \int_0^L \left(1 - \frac{s}{L}\right)^2 ds = \frac{L}{3}$$

Usando la coordenada q, nosotros obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x)dx = \int_{-L/2}^{L/2} N_i^2(q)dq = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right)^2 dq = \frac{L}{3}$$

La evaluación de un par de integrales ilustra la utilidad de (3.6.25). Comenzando con :

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x)dx = \int_0^L N_i^2(s)ds$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

nos da : 
$$\int_0^L N_i^2(s) ds = L \int_0^1 \ell_1^2 \ell_2^0 d\ell_2 = L \frac{2!0!}{(2+0+1)!} = \frac{L}{3}$$

otro ejemplo es : 
$$\int_0^L N_i^3(s) N_j^1(s) ds = L \int_0^1 \ell_1^3 \ell_2^1 d\ell_2 = L \frac{3!1!}{(3+1+1)!} = \frac{L}{20}$$

Los sistemas de coordenadas, funciones de interpolación y límites de integración para los elementos unidimensionales son resumizados en la tabla (3.6.1).

Tipo de sistema	Variable de coordenada	Funciones de Interpolación	Límites de integración
Global	x	$N_i = \frac{X_j - x}{L}$ $N_j = \frac{x - X_i}{L}$	$X_i, X_j$
Local	s	$N_i = 1 - \frac{s}{L}$ $N_j = \frac{s}{L}$	0, L
Local	q	$N_i = \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right)$ $N_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{L}\right)$	$-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$
Natural	$\xi$	$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ $N_j = \frac{1}{2}(1 + \xi)$	-1, 1
Natural	$\ell_2$	$N_i = \ell_1$ $N_j = \ell_2$	0, 1

Tabla 3.6.1) Sistemas de coordenadas y límites de integración para los elementos unidimensionales.

Las ventajas de usar el sistemas de coordenadas de área es la existencia de una ecuación de integración que simplifica la evaluación de integrales de área, esta ecuación integral es relacionada a (3.6.25) y es:

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A \tag{3.6.26}$$

El uso de (3.6.26) puede ser ilustrado para la evaluación del producto de la función de interpolación

$$\int_A N_i(x,y) N_j(x,y) dA \tag{3.6.27}$$

sobre el área del triángulo, el área es :

$$\int_A N_i N_j dA = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12}$$

Las coordenadas de área  $L_1$  y  $L_2$  pueden ser sustituidas por  $N_i$  y  $N_j$ , respectivamente, ya que  $N_k$  no esta en el producto,  $L_3$  es incluida por el factorial cero, cero factorial es definido como uno.

La incorporación de condiciones de frontera o superficies de carga dentro de un análisis de elemento finito requiere la evaluación de una integral a lo largo de los bordes de un elemento. Esta integral es fácil de evaluar una vez que se sabe como se comportan en los bordes las coordenadas de área. Considere un punto B en el lado ij (fig. 3.6.6), la coordenada  $L_3$  es cero y  $L_1$  es la relación del área sombreada por el área total. Definidas las coordenadas variables  $s$ , las cuales son paralelas al lado ij y medidas desde el nodo i. Si el punto de coordenada B es  $s$ , y la longitud del lado es  $b$ , entonces:

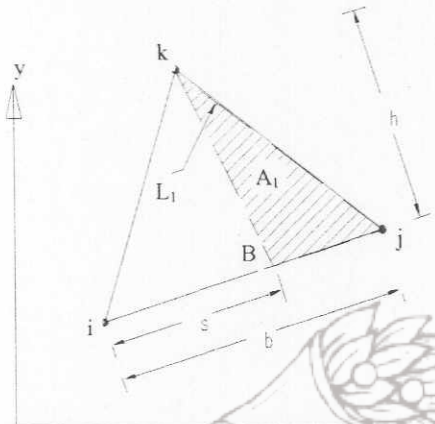


Figura 3.6.6) Las coordenadas de área para un punto en la frontera de un triángulo.

$$L_1 = \frac{2A_1}{2A} = \frac{\frac{2h(b-s)}{2}}{2bh} = \frac{b-s}{b} = 1 - \frac{s}{b} \quad (3.6.28)$$

el área coordenada  $L_2$  es: 
$$L_2 = \frac{s}{b} \quad (3.6.29)$$

El área coordenada  $L_1$  y  $L_2$  reduce las funciones de forma unidimensionales  $N_i(s)$  y  $N_j(s)$  definidas por (3.6.3). Usando las coordenadas naturales unidimensionales  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , definidas por (3.6.6), las coordenada de área resultan:

$$L_1 = \ell_1 \quad \text{y} \quad L_2 = \ell_2 \quad \text{lado } i \rightarrow j \quad (3.6.30)$$

las relaciones para los otros dos lados son:

$$L_2 = \ell_1 \quad \text{y} \quad L_3 = \ell_2 \quad \text{lado } j \rightarrow k \quad (3.6.31)$$

$$L_3 = \ell_1 \quad \text{y} \quad L_1 = \ell_2 \quad \text{lado } k \rightarrow i \quad (3.6.32)$$

La importancia de las relaciones (3.6.30), (3.6.31) y (3.6.32) es que cualquier integral en la frontera de un elemento triangular puede ser reemplazada por una integral lineal escrita en términos de  $s$  o  $\ell_2$ , tal que:

$$\int_{\Gamma} f(L_1, L_2, L_3) d\Gamma = \int_0^L g(s) ds = L \int_0^1 h(\ell_2) d\ell_2 \quad (3.6.33)$$

y evaluada usando la fórmula (3.6.25). La frontera de un elemento bidimensional es denotado por  $\Gamma$ .

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



Las ecuaciones de transformación entre los sistemas  $qr$  y  $st$  para el elemento rectangular son :

$$s=b+q \quad \text{y} \quad t=a+r$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (3.5.17) tenemos las funciones de interpolación en términos de  $q$  y  $r$  para el elemento rectangular.

$$N_i = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right), \quad N_j = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right) \quad (3.6.35)$$

$$N_k = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right), \quad N_m = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

Las funciones de interpolación definidas anteriormente son útiles ya que estas conducen a un sistema de coordenadas naturales que permiten convertir al rectángulo en un cuadrilátero general. El sistema de coordenadas naturales tiene las mismas ventajas observadas en el elemento triangular y la primordial es que es más conveniente para ambas integraciones analíticas y numéricas. El sistema de coordenadas naturales para los elementos rectangulares es mostrado en la fig.3.6.7) éste es localizado en el centro del elemento y las coordenadas son las relaciones de longitudes:

$$\xi = \frac{q}{b} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{r}{a} \quad (3.6.34)$$

donde  $q$  y  $r$  son las coordenadas locales. Las funciones de forma (3.6.35) son fácilmente convertidas al sistema de coordenadas naturales. El resultado es :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_j = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_k = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_m = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.6.35')$$

Es claro que el rango de  $\xi$  y  $\eta$  máximo y mínimo es uno, esto es:

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

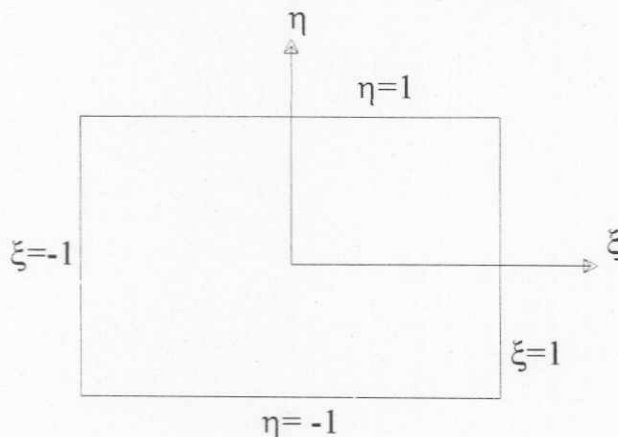
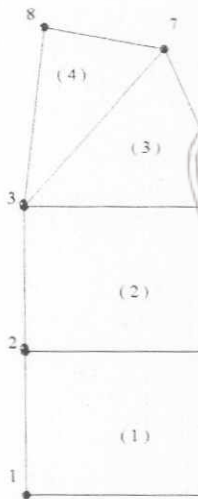


Figura 3.6.7) Un sistema natural de coordenadas para el elemento rectangular.

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

3.7.- ECUACIÓN CONTINUA DE INTERPOLACIÓN O APROXIMACIÓN.

Las ecuaciones de elemento para  $\phi$  definidas por (3.5.7) o (3.5.16) pueden ser usadas para cualquier elemento triangular o rectangular especificando los valores numéricos de  $i, j$  y  $k$  o  $i, j, k$  y  $m$ . Cualquier nudo de un elemento puede ser nudo  $i$ . Utilizando un asterisco para distinguir éste de los otros nudos. El nudo  $i$  del elemento rectangular está siempre en el origen del sistema de coordenadas  $st$ .



Los datos nodales del elemento para la malla de cuatro elementos de la fig. 3.7.1) es:

e	i	j	k	m
1	1	4	5	2
2	2	5	6	3
3	3	6	7	
4	8	3	7	

La ecuación de interpolación para el elemento uno es:

$$\phi^{(1)} = N_1^{(1)} \Phi_1 + N_4^{(1)} \Phi_4 + N_5^{(1)} \Phi_5 + N_2^{(1)} \Phi_2 \quad (3.7.1)$$

Figura 3.7.1) Una malla de cuatro elementos con sus nudos numerados.

Notese que el número de nodo del elemento no es consecutivo. Esto es un caso usual con elementos bidimensionales. Las funciones de interpolación en (3.5.17) son una función en coordenadas globales solo en el sentido que

$$2b = X_j - X_i = X_4 - X_1 \quad \text{y} \quad 2a = X_m - X_i = X_2 - X_1$$

La ecuación de interpolación para el elemento cuatro es

$$\phi^{(4)} = N_8^{(4)} \Phi_8 + N_3^{(4)} \Phi_3 + N_7^{(4)} \Phi_7 \quad (3.7.2)$$

La función de interpolación en (3.7.2) es una función de coordenadas globales y la especificación de  $i, j$  y  $k$  indica inmediatamente cual coordenada usar. Considere, por ejemplo  $N_8^{(4)}$  usando (3.5.8) da:

$$N_8^{(4)} = \frac{1}{2A} (a_8^{(4)} + b_8^{(4)} + c_8^{(4)} y)$$

Donde:

$$a_8^{(4)} = X_3 X_7 - X_7 X_3, \quad b_8^{(4)} = Y_3 - Y_7, \quad c_8^{(4)} = X_7 - X_3$$

ya que  $j=3$  y  $k=7$ . El área,  $A$ , es del elemento cuatro.

Instituto de Ingeniería Universidad Veracruzana

**CAPÍTULO IV.****TRATAMIENTO DEL PROBLEMA DE TORSIÓN POR EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.****4.1.- ECUACIONES DE CAMPO BIDIMENSIONALES.**

La implementación del método de elemento finito puede desarrollarse siguiendo los tres pasos siguientes:

- 1) Establecer las propiedades de interpolación del elemento.
- 2) Evaluar las matrices de elemento.
- 3) Resolver el problema.

Hemos discutido las propiedades de dos elementos bidimensionales en las secciones anteriores y nuestro inmediato objetivo es la discusión de las matrices de elemento asociadas con la ecuación bidimensional de campo.

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - P\phi + Q = 0 \quad (4.1.1)$$

La ecuación (4.1.1) es aplicable a varios problemas físicos, entre los cuales encontramos problemas de mecánica de fluidos, transferencia de calor y por supuesto, el de torsión. Los coeficientes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $P$  y  $Q$  representan para cada problema coeficientes que definen propiedades particulares para cada problema. El objetivo en este capítulo será encontrar las ecuaciones integrales para las matrices de elemento y la evaluación de estas ecuaciones para los elementos triangular lineal y rectangular bilineal.

**4.1.1.- ECUACION DIFERENCIAL PARA LA TORSIÓN.**

La ecuación diferencial para la torsión de secciones es :

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2\theta = 0 \quad (4.1.2)$$

Donde  $G$  es el módulo de cortante del material y  $\theta$  es el ángulo de torsión. La ecuación (4.1.2) podemos relacionarla con (4.1.1) haciendo  $D_x=D_y= 1/G$ ,  $P=0$  y  $Q=2\theta$ . La variable  $\phi$  es una función de esfuerzo y los esfuerzos cortantes dentro de la flecha son relacionados a las derivadas de  $\phi$  con respecto a  $x$  e  $y$ .

## 4.1.2.- ECUACIONES INTEGRALES PARA LAS MATRICES DE ELEMENTO.

Las ecuaciones de elemento finito serán obtenidas usando la formulación Galerkin del método de residuos ponderados. La evaluación de la integral residual produce una ecuación de elemento que es aplicada de una manera recursiva para generar un sistema de ecuaciones lineales. El objetivo inmediato es encontrar las ecuaciones integrales que definen las matrices de elemento para el grupo de problemas asociados con la ecuación general (4.1.1).

La contribución de elemento al sistema de ecuaciones está dado por :

$$\{R^{(e)}\} = - \int_A [N]^T \left( D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - P\phi + Q \right) dA \quad (4.1.11)$$

Donde [N] es un vector renglón que contiene las funciones de interpolación.

Ya que la función de interpolación,  $\phi(x,y)$ , no tiene derivadas continuas entre los elementos, los términos en segundas derivadas de (4.1.11) deben de ser reemplazados por términos en primeras derivadas. Los términos en segundas derivadas de (4.1.11) pueden ser reemplazados aplicando la regla de producto para diferenciación. Considere:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (4.1.12)$$

diferenciando nos da:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.1.13)$$

despejando  $[N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  y sustituyéndolo en el primer término de (4.1.11) se tiene:

$$- \int_A [N]^T D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dA = - \left[ \int_A D_x \frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA + \int_A D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA \right] \quad (4.1.14)$$

La primera integral del segundo miembro de (4.1.14) puede ser reemplazada por una integral al rededor de la frontera, usando el teorema de Green, por el cual cualquier función F, de x e y [f(x, y)] de una integral doble puede reemplazarse por una integral simple, recordando la siguiente fórmula:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int F \cos \alpha ds$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\iint \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int F \sin \alpha ds$$

la integral simple se evalúa a lo largo de la frontera y  $\alpha$  es el ángulo entre la normal y el eje de las x (Fig.2.3.4.).

Aplicando el teorema tenemos:

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA = \int_{\Gamma} [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta d\Gamma \quad (4.1.15)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo a la normal y  $\Gamma$  es el elemento de frontera. Sustituyendo (4.1.15) en (4.1.14) nos da la relación final para el término en segundas derivadas :

$$-\int_A D_x [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dA = -\int_{\Gamma} D_x [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta d\Gamma + \int_A D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA \quad (4.1.16)$$

Análogamente para y encontramos :

$$-\int_A D_y [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dA = -\int_{\Gamma} D_y [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta d\Gamma + \int_A D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dA \quad (4.1.17)$$

sustituyendo (4.1.16) y (4.1.17) en (4.1.11) y agrupando términos resulta :

$$\begin{aligned} \{R^{(e)}\} = & -\int_{\Gamma} [N]^T \left( D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma \\ & + \int_A \left( D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dA \\ & + \int_A P [N]^T \phi dA - \int_A Q [N]^T dA \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

La ecuación (4.1.18) puede ser escrita en una forma final sustituyendo  $\phi$  como la relación :

$$\phi = [N] \{\Phi^{(e)}\} \quad (4.1.19)$$

sustituyendo tenemos :

$$\begin{aligned} \{R^{(e)}\} = & -\int_{\Gamma} [N]^T \left( D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma \\ & + \left( \int_A \left( D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \right) \{\Phi^{(e)}\} \\ & + \left( \int_A P [N]^T [N] dA \right) \{\Phi^{(e)}\} - \int_A Q [N]^T dA \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

la cual tiene la forma general

$$\{R^{(e)}\} = \{I^{(e)}\} + \{k^{(e)}\}\{\Phi^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} \quad (4.1.21)$$

donde

$$\{I^{(e)}\} = -\int_{\Gamma} [N]^T \left( D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma \quad (4.1.22)$$

$$\{k^{(e)}\} = \int_A \left( D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA + \int_A P [N]^T [N] dA \quad (4.1.23)$$

y

$$\{f^{(e)}\} = \int_A Q [N]^T dA \quad (4.1.24)$$

La variable  $\phi$  en (4.1.22) no fue reemplazada ya que la cantidad :

$$D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \quad (4.1.25)$$

ocurre, derivada de las condiciones de frontera, el problema de torsión es un problema único por que  $\phi$  debe ser constante a lo largo del contorno de la sección transversal, por lo que este termino se anula para el problema de torsión.

La primera integral en (4.1.23), puede ser escrita compactamente, definiendo :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix} \quad (4.1.26)$$

y el vector gradiente

$$\{g_v\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi^{(e)}\} = [B] \{\Phi^{(e)}\} \quad (4.1.27)$$

La traspuesta de [B] está dada por :

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} & \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.1.28)$$

Si usamos (4.1.26), (4.1.27) y (4.1.28), tenemos que :

$$\int_A [B]^T [D] [B] dA = \int_A \left( D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \quad (4.1.29)$$

Instituto de Ingeniería y Universidad Veracruzana

La matriz de rigidez es usualmente escrita como :

$$[k^{(e)}] = \int_A [B]^T [D][B] dA + \int_A P[N]^T [N] dA \quad (4.1.30)$$

y las integrales individuales son denotadas como  $[k_D^{(e)}]$  y  $[k_P^{(e)}]$  donde :

$$[k^{(e)}] = [k_D^{(e)}] + [k_P^{(e)}] \quad (4.1.31)$$

**4.1.3.- MATRICES DE ELEMENTO :**

**ELEMENTOS TRIANGULARES.**

Nuestro objetivo, por lo que resta del capítulo será evaluar las matrices para los elementos bidimensionales discutidos en el capítulo tres. La cantidad escalar  $\phi$  es definida sobre una región triangular por :

$$\phi^{(e)} = [N_i \ N_j \ N_k] \{ \Phi^{(e)} \} \quad (4.1.32)$$

donde

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y) \quad , \quad N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y)$$

y los coeficientes a, b, y c, fueron definidos en el capítulo tres. El vector gradiente para estos elementos es :

$$\{ gv \} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \{ \Phi^{(e)} \} \quad (4.1.33)$$

o

$$\{ gv \} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{ \Phi^{(e)} \} = [B] \{ \Phi^{(e)} \} \quad (4.1.34)$$

Para (4.1.30) tenemos que la matriz [B] está dada por (4.1.34) y [D] por (4.1.26) la que consiste enteramente de constantes, ya que  $b_\beta, c_\beta, \beta = i, j, k$  son constantes y  $D_x$  y  $D_y$  son coeficientes de materiales. La primera integral de (4.1.30) por lo tanto, es fácilmente evaluada. Esta integral resulta:

$$[k_D^{(e)}] = \int_A [B]^T [D][B] dA = [B]^T [D][B] \int_A dA$$

o

$$[k_D^{(e)}] = [B]^T [D][B] A \quad (4.1.35)$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Los productos matriciales produce :

$$[k_D^{(e)}] = \frac{D_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.36)$$

La segunda integral de (4.1.30) envuelve las funciones de interpolación. Si asumimos que P es constante en el elemento. Esta integral es :

$$[k_P^{(e)}] = \int_A P [N]^T [N] dA = P \int_A \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA$$

$$= P \int_A \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dA \quad (4.1.37)$$

Ya que  $N_i=L_1$ ,  $N_j=L_2$ , y  $N_k=L_3$  para el triángulo lineal. Usando la fórmula (3.6.26) al evaluar cada integral produce :

$$[k_P^{(e)}] = \frac{PA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.1.38)$$

La matriz de elemento para el elemento triangular es la suma de (4.1.36) y (4.1.38). El vector de fuerza también envuelve las funciones de interpolación, y la evaluación de (4.1.24) es bastante similar a la evaluación de  $[k_P^{(e)}]$ , por lo que tenemos :

$$\int_A Q [N]^T dA = Q \int_A \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA = Q \int_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dA \quad (4.1.39)$$

Asumiendo que Q es constante en el elemento. Usando la ecuación integral (3.6.26) produce.

$$\{f^{(e)}\} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.1.40)$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



## ELEMENTO RECTANGULAR :

La evaluación de las matrices de elemento para el elemento rectangular, no es tan rápida como las de la sección previa, ya que cada coeficiente envuelve la integración de un polinomio sobre un área. Las integrales pueden ser evaluadas usando funciones de interpolación dadas por cualquiera de (3.5.17) o (3.6.35), aquí usaremos (3.5.17) por su similitud entre el sistema coordenado  $st$  y  $xy$ . Las funciones de interpolación en (3.5.17) fueron desarrolladas relativas al sistema coordenado  $st$ . Todas las integrales están definidas con relación al sistema  $xy$ . En particular, la matriz de gradiente  $[B]$  tiene coeficientes relacionados a las derivadas de las funciones de interpolación con respecto a "x" e "y". La aplicación de esta ecuación para un elemento rectangular definido relativo al sistema coordenado  $st$  puede ser resumido como sigue. Ya que el sistema coordenado  $st$  es paralelo al sistema  $xy$  y la unidad de longitud en cualquiera de "s" o "t" es igual que una unidad de longitud en el "x" o "y".

$$\int_A f(x,y) dx dy = \int_A f(s,t) ds dt \quad (4.1.41)$$

Igualdades importantes son las relaciones entre las derivadas. La regla de la cadena nos da :

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{\partial N_\beta}{\partial s} \quad y \quad \frac{\partial N_\beta}{\partial y} = \frac{\partial N_\beta}{\partial t} \quad (4.1.42)$$

Las funciones de interpolación (3.5.17) son:

$$N_i = 1 - \frac{s}{2b} - \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab}, \quad N_j = \frac{s}{2b} - \frac{st}{4ab}$$

$$N_k = \frac{st}{4ab}, \quad N_m = \frac{t}{2a} - \frac{st}{4ab}$$

La evaluación de  $[k^{(e)}]$  y  $\{f^{(e)}\}$  es ilustrada considerando una integral específica en cada caso.

Las integrales más fáciles son asociadas con  $\{f^{(e)}\}$ , el cual es :

$$\{f^{(e)}\} = \int_A Q[N]^T dA = \int_0^{2b} \int_0^{2a} Q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{Bmatrix} dt ds \quad (4.1.44)$$

considerando el tercer coeficiente tenemos :

$$\int_0^{2b} \int_0^{2a} N_k dt ds = \int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{st}{4ab} dt ds = \int_0^{2b} \left. \frac{st^2}{8ab} \right|_0^{2a} ds = \int_0^{2b} \frac{as}{2b} ds = ab = \frac{A}{4} \quad (4.1.45)$$

las otras tres integrales producen el mismo resultado :

$$\{f^{(e)}\} = \frac{QA}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.1.46)$$

La integral asociada con  $[k_p^{(e)}]$  es :

$$[k_p^{(e)}] = \int_A P [N]^T [N] dA = \int_A P \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k & N_i N_m \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k & N_j N_m \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 & N_k N_m \\ N_i N_m & N_j N_m & N_k N_m & N_m^2 \end{bmatrix} dA \quad (4.1.47)$$

Seleccionando el  $k_k$  término, obtenemos :

$$\int_0^{2b} \int_0^{2a} \left(\frac{st}{4ab}\right)^2 dt ds = \int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{s^2 t^2}{16a^2 b^2} dt ds = \frac{4ab}{9} = \frac{A}{9} \quad (4.1.48)$$

La matriz  $[k_p^{(e)}]$  es :

$$[k_p^{(e)}] = \frac{PA}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.1.49)$$

La evaluación de  $[k_D^{(e)}]$  envuelve la derivada de las funciones de interpolación. La matriz de gradiente [B] es:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.1.50)$$

Usando la relación dada en (4.1.42) permite que [B] sea escrita en términos de s y t. La diferenciación de las funciones de interpolación resulta :

$$[B] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(2a-t) & (2a-t) & t & -t \\ -(2b-s) & -s & s & (2b-s) \end{bmatrix} \quad (4.1.51)$$

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

El coeficiente en la primera fila y la primera columna de  $[k_D^{(e)}]$  esta disponible después de la multiplicación de  $[B]^T[D][B]$ , este coeficiente es :

$$\frac{D_x}{16a^2b^2}(2a-t)^2 + \frac{D_y}{16a^2b^2}(2b-s)^2 \quad (4.1.52)$$

y la integral asociada es :

$$\int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{D_x}{16a^2b^2}(2a-t)^2 dt ds + \int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{D_y}{16a^2b^2}(2b-s)^2 dt ds \quad (4.1.53)$$

el cual integrando resulta

$$\frac{D_x a}{3b} + \frac{D_y b}{3a} \quad (4.1.54)$$

el resultado completo para  $[k_D^{(e)}]$  es

$$[k_D^{(e)}] = \frac{D_x a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{D_y b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.1.55)$$

La matriz de rigidez de elemento  $[k^{(e)}]$  para el elemento rectangular es la suma de (4.1.49) y (4.1.55). El vector de fuerzas está dado por (4.1.46).

## 4.2.- APLICACIÓN DEL METODO DE ELEMENTO FINITO A UN PROBLEMA DE TORSIÓN DE SECCIONES.

Las matrices de elemento para el elementos triangular lineal y rectangular bilineal fueron evaluadas en la sección anterior. En esta sección se discute la aplicación de esta información, para obtener la solución numérica de un problema real. Calcularemos esfuerzos cortantes en un eje de acero rectangular sujeto a un momento torsionante.

### 4.2.1.- TEORÍA GENERAL.

Hay dos teorías para calcular los esfuerzos cortantes en una flecha sólida prismática sujeta a torsión. St. Venant desarrolló una teoría y L. Prandtl propuso la otra (capítulo 2). En este capítulo utilizaremos la teoría de Prandtl. Las componentes de esfuerzo de cortante en una barra prismáticas sujeta a un momento torsionante  $T$  sobre el eje  $Z$  puede ser calculada usando (2.3.9), donde  $\phi(x, y)$  es una función de esfuerzo, la ecuación diferencial que rige es (4.1.2) con  $D_x = D_y = 1$ ,  $P=0$ ,  $Q=2G\theta$  y  $\phi = 0$  en la frontera.

Los parámetros físicos en (4.1.2) son el módulo de cortante,  $G$  ( $N/cm^2$ ) y el ángulo de torsión por unidad de longitud,  $\theta$  ( $rad/cm$ ). La formulación de Prandtl, no aplica el momento torsionante  $T$  ( $N/cm$ ), en las ecuaciones que rigen, en lugar de esto,  $T$  es calculado usando:

$$T = 2 \int_A \phi \, dA \quad (4.2.1)$$

ya que  $\phi(x,y)$  es conocida.

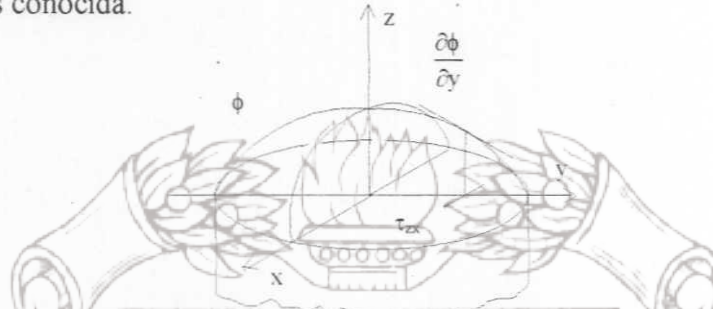


Figura 4.2.1) La superficie  $\phi$  y las componentes de esfuerzo cortante relacionadas.

La función esfuerzo representa una superficie que cubre la sección transversal del eje (fig.4.2.1). El momento torsionante es proporcional al volumen bajo la superficie, mientras que el esfuerzo cortante está relacionado al gradiente de la superficie en las direcciones coordenadas  $x-y$ .

### 4.2.2.- SOLUCIÓN POR ELEMENTO FINITO DE LA TORSIÓN DE UNA BARRA RECTANGULAR.

La flecha rectangular (fig 4.2.2) es usada para ilustrar la evaluación y ensamblaje de las matrices de elemento dentro de un grupo de ecuaciones lineales, esta barra tiene cuatro ejes de simetría, por lo tanto, sólo un octavo de la sección transversal es necesaria para ser analizada. Los valores que se ocupan del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 N/cm^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/cm = .00017453 \text{ rad/cm}$ ).

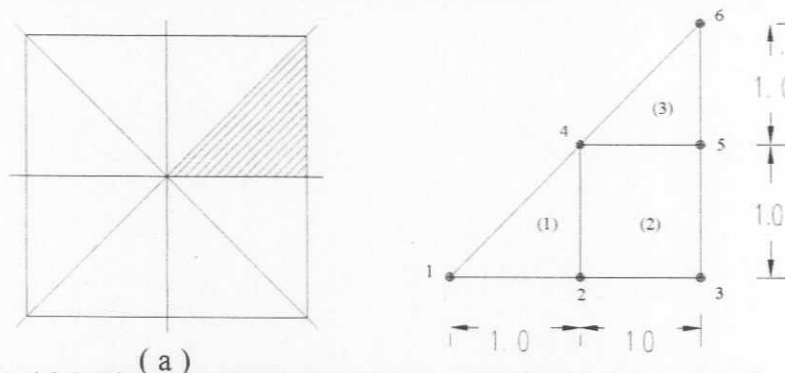


Figura 4.2.2) Elemento subdividido para la torsión de una barra cuadrada. La flecha es de  $4 \times 4 \text{ cm}$ ,  $G = 8(10^6) N/cm^2$ ,  $\theta = 0.01 \text{ grados/cm} = .0001745 \text{ rad/cm}$ .

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

Esta porción de la sección se divide en tres elementos (figura 4.2.2) aunque estos tres elementos no son suficientes para obtener una respuesta aproximada, si son suficientes para ilustrar los cálculos. Los cálculos tienen tres dígitos significativos de aproximación. Los números de nudos por elemento son:

e	i	j	k	m
1	1	2	4	
2	2	3	5	4
3	4	5	6	

Los elementos 1 y 3 tienen la misma orientación y las mismas dimensiones; por lo tanto sus matrices son idénticas. Las matrices para el elemento triangular están dadas por (4.1.36) y (4.1.40) mientras que para el rectangular están dadas por (4.1.46) y (4.1.55). Las matrices para el elemento triangular son:

$$[k_D^{(e)}] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_j & b_1 b_k \\ b_1 b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_1 b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_j & c_1 c_k \\ c_1 c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_1 c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

y

$$\{f^{(e)}\} = \frac{2G\theta A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.2.3)$$

y para el elemento rectangular.

$$[k^{(e)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

y

$$\{f^{(e)}\} = \frac{2G\theta A}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.2.5)$$

La ecuación (4.2.4) incorpora el hecho de que el elemento dos es cuadrado,  $2a=2b$ . Ahora valdremos (4.2.2) para los elementos 1 y 3. El área del elemento triangular es  $1/2$  y  $4A^{(1)}=2$ . Los coeficientes b y c son:

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} &= Y_2 - Y_4 = -1 & , & & c_1^{(1)} &= X_4 - X_2 = 0 \\ b_2^{(1)} &= Y_4 - Y_1 = 1 & , & & c_2^{(1)} &= X_1 - X_4 = -1 \\ b_4^{(1)} &= Y_1 - Y_2 = 0 & , & & c_4^{(1)} &= X_2 - X_1 = 1 \end{aligned}$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Sustituyendo estos valores en (4.2.2) :

$$[k^{(1)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Sumando las 2 partes de las matrices :

$$[k^{(1)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [k^{(3)}] \quad (4.2.7)$$

El vector de fuerza de elemento  $\{f^{(1)}\}$ , es obtenido una vez que el parámetro  $2G\theta$  se calcula, sustituyendo los valores dados en la figura 4.2.2) produce:

$$2G\theta = 2(8 \times 10^6)(0.01) \left( \frac{\pi}{180} \right) = 2792$$

Sustituyendo  $2G\theta = 2792$  y  $A^{(1)} = 1/2$  en (4.2.3) :

$$\{f^{(1)}\}^T = [ 465 \ 465 \ 465 ] = \{f^{(3)}\}^T \quad (4.2.8)$$

La matriz de rigidez para el elemento dos está dada por (4.2.4) y el vector de fuerza por (4.2.5), sustituyendo,  $A^{(2)} = 1$  y  $2G\theta = 2792$ , tenemos:

$$\{f^{(2)}\}^T = [ 698 \ 698 \ 698 \ 698 ] \quad (4.2.9)$$

Las matrices de elemento son resumidas a continuación. El número de nodo indica la fila y columna de  $[K]$  y  $\{F\}$  a los cuales se suma los coeficientes individuales.

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$[k^{(1)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{f^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 465 \\ 465 \\ 465 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$[k^{(2)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \{f^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 698 \\ 698 \\ 698 \\ 698 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \quad (4.2.11)$$

$$[k^{(3)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{f^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 465 \\ 465 \\ 465 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (4.2.12)$$

Adicionando las contribuciones de los elementos usando el método directo de rigidez resulta el sistema de seis ecuaciones siguiente.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2790 \\ 6978 \\ 4188 \\ 9768 \\ 6978 \\ 2790 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (4.2.13)$$

Los valores nodales  $\Phi_3$ ,  $\Phi_5$  y  $\Phi_6$  están en la frontera y cada uno es cero, por lo tanto, las ecuaciones tres, cinco y seis son eliminadas y el sistema modificado de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2790 \\ 6978 \\ 9768 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

resolviendo resulta

$$\Phi_1 = 3462, \quad \Phi_2 = 2532 \quad \text{y} \quad \Phi_4 = 1989$$

Gran parte de la solución radica en la determinación de los valores nodales, sin embargo, usualmente existe un juego de cantidades de elemento que deben ser calculadas una vez que los valores nodales son conocidos como las componentes del esfuerzo cortante y el momento torsionante, la evaluación de estas cantidades se discute a continuación.

COMPONENTES DE ESFUERZO CORTANTE.

Los gradientes de los parámetros nodales  $\phi$ , son importantes ya que las componentes de los esfuerzos cortantes están relacionados a los gradientes por

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.2.14)$$

El vector gradiente para el elemento triangular está dado por (4.1.34) como :

$$\{gv\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} \quad (4.2.15)$$

El vector gradiente para el elemento rectangular está dado por (4.1.51) como :

$$\{gv\} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(2a-t) & -(2a-t) & t & -t \\ -(2b-s) & -s & s & (2b-s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_m \end{Bmatrix} \quad (4.2.16)$$

El área así como los coeficientes  $b$  y  $c$  son iguales para ambos elementos triangulares y ellos fueron evaluados anteriormente. Usando estos valores y los valores calculados para  $\Phi_i$ , encontramos los gradientes para los elementos triangulares:

$$\{gv^{(1)}\} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3462 \\ 2532 \\ 1989 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -930 \\ -543 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{zx}^{(1)} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -543 \text{ N/cm}^2 \quad \text{y} \quad \tau_{zy}^{(1)} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -930 \text{ N/cm}^2$$

$$\{gv^{(3)}\} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1989 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1989 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{zx}^{(3)} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{zy}^{(3)} = 1989 \text{ N/cm}^2$$

Se calcularán las componentes de esfuerzo cortante en el elemento rectangular notando que los valores del gradiente no son constantes dentro del elemento rectangular y que en el nodo tres el valor de  $\tau_{zy}$  es el mayor. Las coordenadas locales de los nodos son, para el nodo dos:  $s=0, t=0$ , tres:  $s=2b, t=0$ , cinco:  $s=2b, t=2a$ , cuatro:  $s=0, t=2a$  y para el elemento se tendrá que  $2a=2b=1$ .



El vector gradiente para los nodos es :

$$\{gv^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}, \quad \tau_{zx}^{(2)} = -543 \quad \text{y} \quad \tau_{zy}^{(2)} = -2532 \text{ N/cm}^2$$

$$\{gv^{(3)}\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}, \quad \tau_{zx}^{(3)} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{zy}^{(3)} = -2532 \text{ N/cm}^2$$

$$\{gv^{(5)}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}, \quad \tau_{zx}^{(5)} = -1989 \quad \text{y} \quad \tau_{zy}^{(5)} = 0 \text{ N/cm}^2$$

$$\{gv^{(4)}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}, \quad \tau_{zx}^{(4)} = -1989 \quad \text{y} \quad \tau_{zy}^{(4)} = -543 \text{ N/cm}^2$$

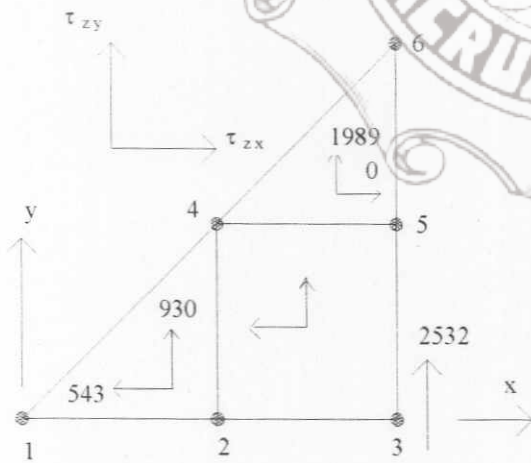


Figura 4.2.3) Los valores de esfuerzos cortantes para la flecha cuadrada

Los esfuerzos cortantes calculados anteriormente son mostrados en la fig.4.2.3). Los valores de esfuerzo cortante para cada elemento triangular son constantes dentro del elemento y asumidos en el centro del elemento. Hay al menos dos formas de mejorar los valores obtenidos de los esfuerzos para este ejemplo, la primera puede ser usando un gran número de elementos, ya que el tamaño de los elementos decrece, la existencia de un valor constante dentro de el elemento resulta más real. Un enfoque alternativo es el uso de elementos con más nudos y un polinomio de interpolación cuadrático o cúbico.

## EVALUACIÓN DEL MOMENTO TORSIONANTE :

Otras cantidades de interés en el análisis de torsión en un miembro es el momento torsionante  $T$  definido en (4.2.1). Esta integral es equivalente a :

$$T = \sum_{e=1}^n 2 \int_{A^{(e)}} \phi^{(e)} dA \quad (4.2.17)$$

la integral

$$\int_{A^{(e)}} \phi^{(e)} dA$$

para el elemento triangular es:

$$\int_{A^{(e)}} \phi^{(e)} dA = \frac{A}{3} (\Phi_i + \Phi_j + \Phi_k) \quad (4.2.18)$$

y para el elemento rectangular

$$\int_{A^{(e)}} \phi^{(e)} dA = \frac{A}{4} (\Phi_i + \Phi_j + \Phi_k + \Phi_m) \quad (4.2.19)$$

El momento torsionante,  $T$ , es la suma de la contribución de los elementos :

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \dots + T^{(n)}$$

la contribución de cada elemento es:

$$T^{(1)} = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \right) (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4) = (3462 + 2532 + 1989) = 2661$$

$$T^{(2)} = 2 \left( (1) \left( \frac{1}{4} \right) \right) (\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5 + \Phi_4) = 2260.5$$

$$T^{(3)} = (\Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6) = 663$$

el momento torsionante resulta:  $T = 2661 + 2260.5 + 663 = 5584.5 \text{ N.cm}$  (4.2.20)

Este momento actúa en un octavo de la sección transversal. Así el momento torsionante total en la barra cuadrada es  $8(5584.5) = 44676 \text{ N.cm}$ , un momento de  $44676 \text{ N.cm}$  produce una torsión de  $1^\circ$  en la barra de acero de  $100 \text{ cm}$  de longitud. La aproximación de este resultado es cuestionable, por la tosquedad de la malla. A lo cual respondimos con un 89% del valor teórico de  $50247 \text{ N.cm}$ . El valor calculado del momento torsionante rara vez corresponde al aplicado ya que tenemos que suponer el ángulo de torsión  $\theta$ . Los valores correctos de  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy}$ , y  $\theta$  son obtenidos escalando los valores calculados por la relación  $T_{\text{actual}}/T_{\text{calculada}}$ . Por ejemplo, suponiendo que el momento torsionante aplicado a la flecha en la figura 4.2.2) fue de  $60000 \text{ N.cm}$ . El ángulo verdadero de torsión es:

$$\theta_{\text{verdadero}} = \frac{T_{\text{actual}}}{T_{\text{calculado}}} \theta_{\text{asumido}} = \left( \frac{60000}{44676} \right) (0.01) = 0.0134 \text{ rad/cm} \quad (4.2.21)$$

Los valores de esfuerzo cortante son escalados en la misma forma. El valor más grande de  $\tau_{zy}$  para el momento torsionante actual aplicado es :

$$\tau_{zy} = \left( \frac{T_{\text{act}}}{T_{\text{cal}}} \right) \tau_{zy} = \left( \frac{60000}{44676} \right) (2532) = 3400 \text{ N/cm}^2 \quad (4.2.22)$$

**CAPÍTULO V.****PROGRAMA DE CÓMPUTO PARA RESOLVER PROBLEMAS****DE TORSIÓN.****5.1- PROGRAMA DE CÓMPUTO.**

El método de elemento finito envuelve por lo general un gran sistema de ecuaciones lineales y tiene un provecho limitado si no se dispone de una computadora. Un programa de computadora para resolver problemas de torsión escrito en fortran es discutido en esta sección. El programa contiene puntos de diagnóstico que localiza errores, además está acompañado por un programa de generación de malla y una subrutina la cual grafica la malla y los valores máximos de esfuerzo, además de generar archivos de almacenamiento de resultados y un archivo con el cual se puede, por medio de Autocad, generar la malla del problema para graficarla e imprimirla.

El programa de computadora TOR y sus subrutinas resolverá problemas para ecuaciones diferenciales bidimensionales, como:

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - P\phi + Q = 0 \quad (5.1)$$

El programa permite al usuario el análisis de mallas de elementos triangulares lineales y rectangulares bilineales. Los coeficientes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $P$  y  $Q$  pueden diferir entre elementos. Las ecuaciones (4.1.36) y (4.1.38) son usadas para  $[k_D^{(t)}]$  y  $[k_P^{(t)}]$  para los elementos triangulares mientras (4.1.49) y (4.1.55) son usados para los elementos rectangulares. Los vectores de fuerza están dados por (4.1.40) y (4.1.46). Los valores de gradiente son calculados usando (4.1.34) y (4.1.51).

**5.2.- DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA ( TOR.EXE ) .**

El programa TOR.EXE está formado por un programa principal TOR y cuatro subrutinas principales ELSTMF, MODIFY, DCMPBD, y SLVBD, así como subrutinas de generación de malla MSH2DG, MSH2DR, CNCTVT, y subrutinas que grafican la malla: GRAFICA, VENTANA, MALLA. Los datos de entrada para TOR y MODIFY se describen en el apéndice A. Los valores numéricos de IN y IO están definidos al comienzo de cada programa y pueden ser cambiados. Este programa almacena los coeficientes de  $\{\Phi\}$ ,  $\{F\}$  y  $\{K\}$  en un vector  $\{A\}$  denotado por  $A()$  en el programa. El almacenado vectorial elimina la necesidad para cambiar la dimensión de  $[K]$  cada vez que un nuevo problema es resuelto.

El concepto de almacenaje puede ser ilustrado usando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 175 \\ 436 \\ 262 \\ 611 \\ 436 \\ 175 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

El almacenaje convencional de este sistema puede requerir 48 espacios de memoria, 36 para [K] y 6 para {Φ} y {F}. El sistema tiene un ancho de banda de cuatro y es simétrico, por lo tanto, solo parte de estos coeficientes en [K] son necesarios para obtener una solución. Estos coeficientes pueden ser almacenados en el arreglo rectangular:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 & x \\ 10 & -3 & x & x \\ 3 & x & x & x \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Donde las x indican números que no existen. La primera columna de (5.5) es la diagonal principal de [K], la segunda columna es la diagonal arriba de la diagonal principal, etc. Cuando usamos un vector de almacenaje, los valores nodales {Φ} son localizados en la parte superior seguidos por {F}, entonces la matriz [K] que aparecen en (5.4) o (5.5) se convierte, usando un arreglo unidimensional, en la fig.5.1). La ubicación del primer coeficiente de {Φ}, {F} y {K} es calculado dentro del programa así como la longitud que A( ) necesita para problemas en particular. Todos los cálculos asociados con la solución de [K]{Φ}={F} son hechos dentro de {A}. Los lados tienen que ser numerados para facilitar el manejo de datos. Esta numeración es mostrada en la fig.5.2).

$$A^T = \{\Phi_1, \Phi_1, \Phi_1, \Phi_1, \Phi_1, \Phi_1, 175, 436, 262, 611, 436, 175, 3, 10, 4, 10, 10, 3, -3, -1, -2, -4, -3, 0, -4, 1, 0, 0, -2, 0\}$$

Fig.5.1) Almacenaje del sistema de ecuaciones en el vector A.

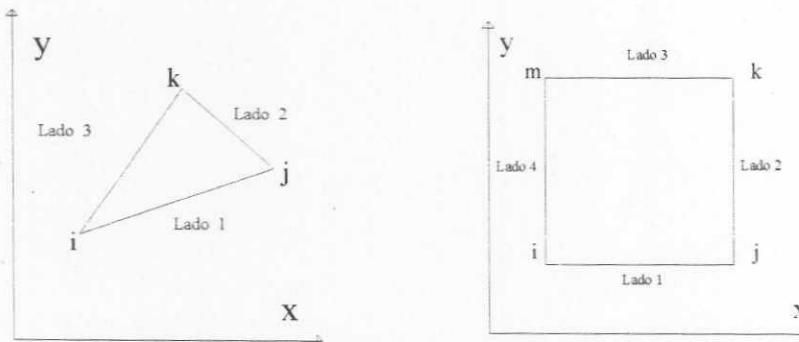


Figura 5.2) Procedimiento para denotar los lados de los elementos.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

**5.2.1.- SUBRUTINAS .**

ELSTMF. La Subrutina ELSTMF evalúa la matriz de rigidez de elemento y el vector de fuerza usando la ecuación mencionada en la sección previa. Las matrices de elemento pueden ser impresas para permitir al usuario revisar los cálculos a mano.

MODIFY. Esta incorpora los valores nodales específicos dentro del sistema de ecuaciones usando el método de eliminación de renglones y la subrutina, también es usada para adherir puntos fuentes o valores directamente a  $\{F\}$ .

DCMPBD. Esta descompone la matriz global de rigidez  $[K]$  en una forma triangular superior usando el método de eliminación Gaussiana. Esta subrutina asume que  $[K]$  es simétrica y sólo los elementos superiores de la diagonal principal son almacenados. Los coeficientes de  $[K]$  son almacenados en un vector.

SLVBD. La Subrutina SLVBD es un programa compañero para DCMPBD. Esta subrutina descompone el vector global de fuerza,  $\{F\}$ , y resuelve el sistema de ecuaciones usando sustitución posterior. La solución del sistema de ecuaciones es separado en dos subrutinas para que estas puedan ser usadas para resolver problemas dependientes del tiempo, donde cada nuevo paso de tiempo requiere la descomposición de  $\{F\}$  pero no requiere que  $[K]$  sea convertido en una forma triangular superior.

***SUBRUTINAS DE GENERACIÓN DE MALLA :***

MSH2DG. La subrutina MSH2DG genera mallas para problemas con geometrías complicadas y se basa en líneas de nudos y de elementos para generar los elementos, ésta genera las coordenadas de los nodos y trabaja con CNCTVT la cual se encarga de los nodos en los elementos.

MSH2DR. Esta subrutina genera mallas para problemas con geometrías simples de formas rectangulares .

CNCTVT. Esta subrutina trabaja junto con MSH2DG, y se encarga de la distribución de los nodos en los elementos .

***SUBRUTINAS QUE GRAFICAN LA MALLA :***

GRÁFICA. Es una subrutina principal que controla datos y a las demás subrutinas de graficación.

VENTANA. Esta Subrutina crea una ventana que delimita el área a graficar.

MALLA. Ésta grafica la malla y en caso de que el problema cuente con menos de 10 elementos el número de nodo .

**5.3.- SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CLÁSICOS DE TORSIÓN CON AYUDA DE PROGRAMA DE COMPUTADORA (TOR.EXE).**

En esta sección se resuelven algunos problemas clásicos de torsión con ayuda del programa TOR.EXE y se comparan con los valores teóricos. Los parámetros usados son los mismos ocupados en la sección 4.2.2. Se presenta el listado del archivo de datos de entrada y el de salida así como un resumen al final de cada sección.

**5.3.1.- SECCIÓN RECTANGULAR.**

La sección rectangular que se resolverá es de 4cm por 4cm, se tomará en cuenta la simetría de la sección para simplificar los cálculos, ocupando 1/8 de la sección; para la solución de este problema se prepararon tres mallas, donde la primera malla es de 3 elementos, 2 triangulares y uno rectangular, la segunda es de 66 nodos y 55 elementos entre rectangulares y triangulares, la tercera es de 231 nodos y 400 elementos triangulares, este ejemplo es igual que el de la sección 4.2.2., sólo que aquí se resuelve con ayuda del programa y se comprueban los resultados. Los archivos para el primer elemento son :

**Archivo de datos de entrada, primer ejemplo, malla 1 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN.(11SR.DAT).  
 SECCIÓN RECTANGULAR, 6 NODOS, 3  
 ELEMENTOS (TRIANG. Y RECTANG.).  
 (1/8 ÁREA).

```

6 3 1 0 1 1 0
1. 1. 0. 2790.
0. 1. 2. 1. 2. 2.
0. 0. 0. 1. 1. 2.

1 1 1 2 4 0
2 1 2 3 5 4
3 1 4 5 6 0

0
3
0.
5
0.
6
0.
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

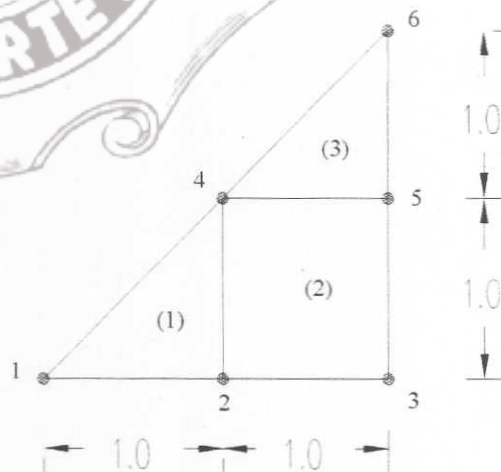


Fig. 5.3.1.1 ) Malla para la sección rectangular con 3 elementos y 6 nudos.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

**Archivo de salida, primer ejemplo malla 1:**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN. (11SR.DAT).  
 SECCIÓN RECTANGULAR, 6 NODOS, 3 ELEMENTOS (TRIANG. Y RECTANG.).  
 (1/8 ÁREA).

```
NP = 6
NE = 3
ITYP = 1
IPLVL = 1
MESH = 0
```

COEFICIENTES DE ECUACIONES

MATERIAL	SET	DX	DY	P	Q
	1	.10000E+01	.10000E+01	.00000E+00	.27900E+04

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
2	.10000E+01	.00000E+00
3	.20000E+01	.00000E+00
4	.10000E+01	.10000E+01
5	.20000E+01	.10000E+01
6	.20000E+01	.20000E+01

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NUMERO NODO			
1	1	1	2	4	
2	1	2	3	5	4
3	1	4	5	6	

EL ANCHO DE BANDA ES 4 EN EL ELEMENTO 1

ELEMENTO 1

VECTOR DE FUERZA      MATRIZ DE RIGIDEZ

.46500E+03	.50000E+00	-.50000E+00	.00000E+00
.46500E+03	-.50000E+00	.10000E+01	-.50000E+00
.46500E+03	.00000E+00	-.50000E+00	.50000E+00

ELEMENTO 2

VECTOR DE FUERZA      MATRIZ DE RIGIDEZ

.69750E+03	.66667E+00	-.16667E+00	-.33333E+00	-.16667E+00
.69750E+03	-.16667E+00	.66667E+00	-.16667E+00	-.33333E+00
.69750E+03	-.33333E+00	-.16667E+00	.66667E+00	-.16667E+00
.69750E+03	-.16667E+00	-.33333E+00	-.16667E+00	.66667E+00

ELEMENTO 3

VECTOR DE FUERZA      MATRIZ DE RIGIDEZ

.46500E+03	.50000E+00	-.50000E+00	.00000E+00
.46500E+03	-.50000E+00	.10000E+01	-.50000E+00
.46500E+03	.00000E+00	-.50000E+00	.50000E+00

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

3	.00000E+00
5	.00000E+00
6	.00000E+00

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

1	.34617E+04	2	.25317E+04	3	.00000E+00
4	.19892E+04	5	.00000E+00	6	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	CENTRO	-.54250E+03	.93000E+03
2	NODO 2	-.54250E+03	.25317E+04
	CENTRO	-.27125E+03	.22604E+04
	NODO 5	.00000E+00	.19892E+04
3	CENTRO	.00000E+00	.19892E+04

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

VOL.BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN= .55843E+04  
 ELEMENTO TAU (ZY) MAX ELEMENTO TAU (ZX) MAX VOL (PHI)  
 2 .2532E+04 1 -.5425E+03 .5584E+04

**Archivo de datos de entrada, primer ejemplo, malla 2:**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (12SR.DAT).  
 SECCIÓN RECTANGULAR 66 NUDOS, 55 ELEMENTOS (RECTANG. Y TRIANG).  
 (1/8 ÁREA).

66 55 1 0 1 0 0  
 1. 1. 0. 2790.

0.	.2	.4	.6	.8	1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.
	.2	.4	.6	.8	1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.
		.4	.6	.8	1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.
			.6	.8	1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.
				.8	1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.
					1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.
						1.2	1.4	1.6	1.8	2.
							1.4	1.6	1.8	2.
								1.6	1.8	2.
									1.8	2.
										2.

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6
.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8
1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.

1	1	1	2	12	0
2	1	2	3	13	12
3	1	3	4	14	13
4	1	4	5	15	14
5	1	5	6	16	15
6	1	6	7	17	16
7	1	7	8	18	17
8	1	8	9	19	18
9	1	9	10	20	19
10	1	10	11	21	20
11	1	12	13	22	0
12	1	13	14	23	22
13	1	14	15	24	23
14	1	15	16	25	24
15	1	16	17	26	25
29	1	32	33	40	39
30	1	33	34	41	40
25	1	27	28	36	35
26	1	28	29	37	36
27	1	29	30	38	37
28	1	31	32	39	0
40	1	44	45	51	50
41	1	46	47	52	0
42	1	47	48	53	52
43	1	48	49	54	53
44	1	49	50	55	54

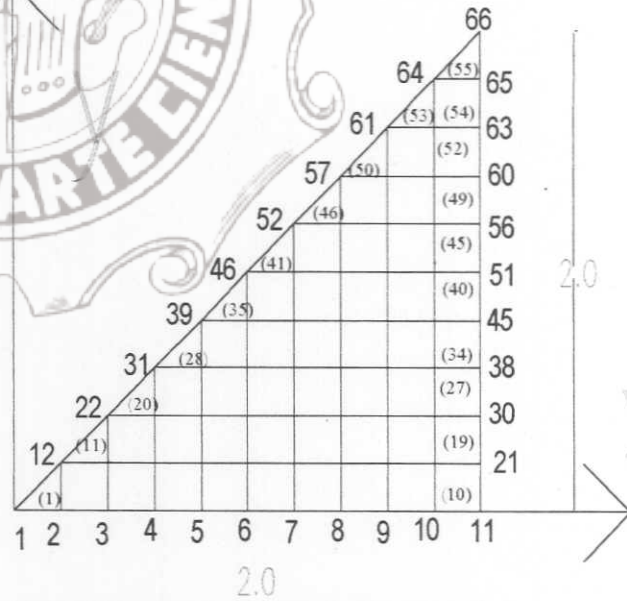
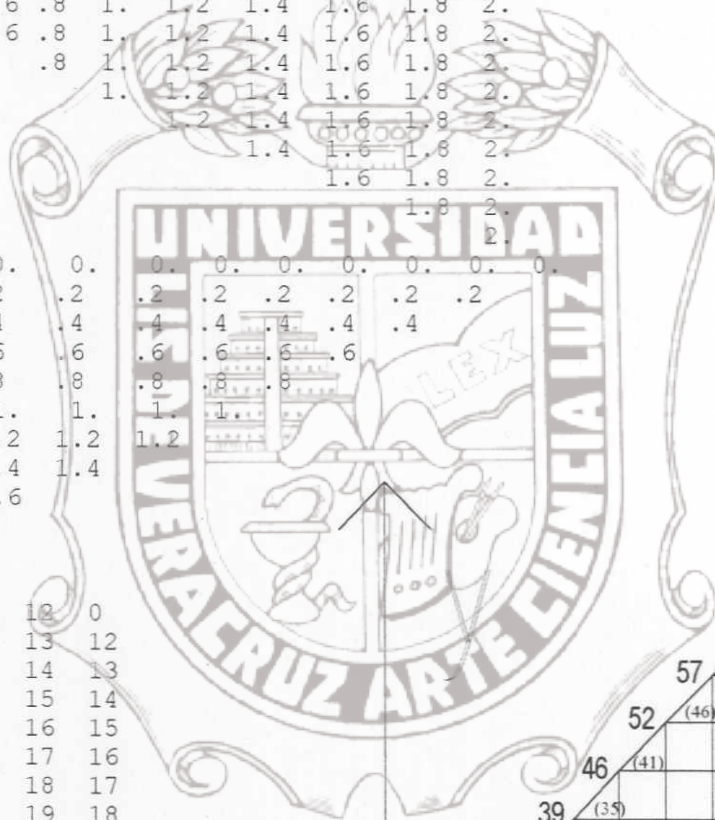


Fig. 5.3.1.2) Malla de 66 nudos y 55 elementos.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana



```

45 1 50 51 56 55
46 1 52 53 57 0
47 1 53 54 58 57
48 1 54 55 59 58
49 1 55 56 60 59
50 1 57 58 61 0
51 1 58 59 62 61
52 1 59 60 63 62
53 1 61 62 64 0
54 1 62 63 65 64
55 1 64 65 66 0
31 1 34 35 42 41
32 1 35 36 43 42
33 1 36 37 44 43
34 1 37 38 45 44
35 1 39 40 46 0
36 1 40 41 47 46
37 1 41 42 48 47
38 1 42 43 49 48
39 1 43 44 50 49
16 1 17 18 27 26
17 1 18 19 28 27
18 1 19 20 29 28
19 1 20 21 30 29
20 1 22 23 31 0
21 1 23 24 32 31
22 1 24 25 33 32
23 1 25 26 34 33
24 1 26 27 35 34
0
11 0. 21 0. 30 0. 38 0. 45 0. 51 0.
56 0. 60 0. 63 0. 65 0. 66 0.
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```



**Resumen de archivo de salida, primer ejemplo, malla 2 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN , (12SR.DAT).  
 SECCIÓN RECTANGULAR 66 NUDOS, 55 ELEMENTOS (RECTANG. Y TRIANG).  
 (1/8 ÁREA).

```

NP = 66
NE = 55
ITYP = 1
IPLVL = 0
MESH = 0
    
```

COEFICIENTES DE ECUACIONES  
 MATERIAL

SET	DX	DY	P	Q
1	.10000E+01	.10000E+01	.00000E+00	.27900E+04

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
10	.18000E+01	.00000E+00
11	.20000E+01	.00000E+00
20	.18000E+01	.20000E+00
21	.20000E+01	.20000E+00

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

22	.40000E+00	.40000E+00
52	.12000E+01	.12000E+01
53	.14000E+01	.12000E+01
57	.14000E+01	.14000E+01
58	.16000E+01	.14000E+01
66	.20000E+01	.20000E+01

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO NODO			
1	1	1	2	12	
10	1	10	11	21	20
45	1	50	51	56	55
46	1	52	53	57	
55	1	64	65	66	

EL ANCHO DE BANDA ES 12 EN EL ELEMENTO 1

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

11	.00000E+00	56	.00000E+00
21	.00000E+00	60	.00000E+00
30	.00000E+00	63	.00000E+00
38	.00000E+00	65	.00000E+00
45	.00000E+00	66	.00000E+00
51	.00000E+00		

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

1	.33012E+04	2	.32640E+04	3	.31818E+04
10	.70040E+03	11	.00000E+00	12	.32423E+04
46	.20244E+04	47	.17685E+04	48	.14473E+04
64	.17311E+03	65	.00000E+00	66	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	CENTRO	-.10850E+03	.18600E+03
10	NODO 10	-.23206E+02	.35020E+04
	CENTRO	-.11603E+02	.34904E+04
	NODO 21	.00000E+00	.34788E+04
45	NODO 50	-.30658E+03	.28784E+04
	CENTRO	-.15329E+03	.27251E+04
	NODO 56	.00000E+00	.25718E+04
46	CENTRO	-.11337E+04	.13515E+04

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN= .62491E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
10	.3502E+04	46	-.1134E+04	.6249E+04

**Archivo de datos de entrada, primer ejemplo, malla 3 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (16SR.DAT)

SECCIÓN RECTANGULAR, 231 NUDOS, 400 ELEMENTOS (TRIANG.)

(1/8 ÁREA)

231 400 1 0 1 0 2

1. 1. 0. 2790.

0 3

400 231

21

1	21	1	0.0	0.0	2.0	0.0	10
22	41	1	0.1	0.1	2.0	0.1	10
42	60	1	0.2	0.2	2.0	0.2	10
61	78	1	0.3	0.3	2.0	0.3	10
79	95	1	0.4	0.4	2.0	0.4	10
96	111	1	0.5	0.5	2.0	0.5	10
112	126	1	0.6	0.6	2.0	0.6	10

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

127	140	1	0.7	0.7	2.0	0.7	10
141	153	1	0.8	0.8	2.0	0.8	10
154	165	1	0.9	0.9	2.0	0.9	10
166	176	1	1.0	1.0	2.0	1.0	10
177	186	1	1.1	1.1	2.0	1.1	10
187	195	1	1.2	1.2	2.0	1.2	10
196	203	1	1.3	1.3	2.0	1.3	10
204	210	1	1.4	1.4	2.0	1.4	10
211	216	1	1.5	1.5	2.0	1.5	10
217	221	1	1.6	1.6	2.0	1.6	10
222	225	1	1.7	1.7	2.0	1.7	10
226	228	1	1.8	1.8	2.0	1.8	10
229	230	1	1.9	1.9	2.0	1.9	1
231	232	1	2.0	2.0	.0	.0	1

39	1	20	1	1	3	1	2	22
	21	39	1	1	3	2	23	22
	40	58	1	1	3	22	23	42
	59	76	1	1	3	23	43	42
	77	94	1	1	3	42	43	61
	95	111	1	1	3	43	62	61
	112	128	1	1	3	61	62	79
	129	144	1	1	3	62	80	79
	145	160	1	1	3	79	80	96
	161	175	1	1	3	80	97	96
	176	190	1	1	3	96	97	112
	191	204	1	1	3	97	113	112
	205	218	1	1	3	112	113	127
	219	231	1	1	3	113	128	127
	232	244	1	1	3	127	128	141
	245	256	1	1	3	128	142	141
	257	268	1	1	3	141	142	154
	269	279	1	1	3	142	155	154
	280	290	1	1	3	154	155	166
	291	300	1	1	3	155	167	166
	301	310	1	1	3	166	167	177
	311	319	1	1	3	167	178	177
	320	328	1	1	3	177	178	187
	329	336	1	1	3	178	188	187
	337	344	1	1	3	187	188	196
	345	351	1	1	3	188	197	196
	352	358	1	1	3	196	197	204
	359	364	1	1	3	197	205	204
	365	370	1	1	3	204	205	211
	371	375	1	1	3	205	212	211
	376	380	1	1	3	211	212	217
	381	384	1	1	3	212	218	217
	385	388	1	1	3	217	218	222
	389	391	1	1	3	218	223	222
	392	394	1	1	3	222	223	226
	395	396	1	1	3	223	227	226
	397	398	1	1	3	226	227	229
	399	399	0	0	3	227	230	229
	400	400	0	0	3	229	230	231

21 0. 41 0. 60 0. 78 0. 95 0. 111 0. 126 0. 140 0. 153 0. 165 0. 176 0.  
 186 0. 195 0. 203 0. 210 0. 216 0. 221 0. 225 0. 228 0. 230 0. 231 0.  
 0  
 0



Fig. 5.3.1.3) Malla 3, de 231 nudos y 400 elementos.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

**Resumen de archivo de salida, primer ejemplo, malla 3 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (16SR.DAT)  
 SECCIÓN RECTANGULAR, 231 NUDOS, 400 ELEMENTOS (TRIANG.)  
 (1/8 ÁREA)

```
NP = 231
NE = 400
ITYP = 1
IPLVL = 0
MESH = 2
```

COEFICIENTES DE ECUACIONES MATERIAL

SET	DX	DY	P	Q
1	.10000E+01	.10000E+01	.00000E+00	.27900E+04

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
20	.19818E+01	.00000E+00
21	.20000E+01	.00000E+00
41	.20000E+01	.10000E+00
178	.12818E+01	.11000E+01
187	.12000E+01	.12000E+01
188	.13818E+01	.12000E+01

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
1	1	1 2 22	
20	1	20 21 41	
328	1	185 186 195	
329	1	178 188 187	
400	1	229 230 231	

ELEMENTO	DE BANDA ES	22 EN EL ELEMENTO	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	CENTRO		-.23624E+02	.14976E+03
19	CENTRO		-.37388E-01	.36771E+04
20	CENTRO		.00000E+00	.37358E+04
21	CENTRO		-.12599E+03	.27488E+03
329	CENTRO		-.11240E+04	.13586E+04
400	CENTRO		.00000E+00	.57023E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN=		.62656E+04		
ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
20	.3736E+04	329	-.1124E+04	.6266E+04

Los valores teóricos, para la sección rectangular son obtenidos con las ecuaciones (2.8.3) para el esfuerzo máximo, (el cual se presenta en el punto medio de los lados) y la (2.8.6) para el momento torsionante, los valores finales del momento torsionante ocupando el programa se obtienen multiplicando por ocho el valor obtenido, ya que se ocupó un octavo del área total.

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

El valor que se ocupa del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/\text{cm} = .00017453 \text{ rad/cm}$ ) son los mismos que se ocuparon para el ejemplo en detalle del mismo problema en la sección (4.2.2).

De lo anterior se tiene que:

$$\tau_{\max} = k_2 G \theta a = (.675)(2792)(2) = 3769.2 \text{ N/cm}^2$$

$$M_t = k_1 G \theta (2a)^3 (2b) = .1406(8 \times 10^6)(.0001745)(2(2))^4 = 50247 \text{ N-cm.}$$

**Resultados 11SR :**

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
2	.2532E+04	1	-.5425E+03	(.6584E+04)*8=44672

**Resultados 12SR :**

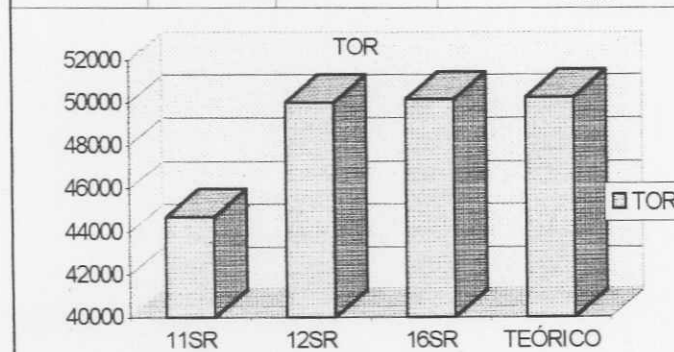
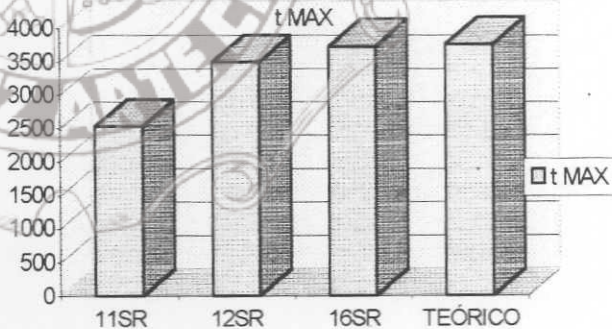
ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
10	.3502E+04	46	-.1134E+04	(.6249E+04)*8=49992

**Resultados 16SR2 :**

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
20	.3736E+04	329	-.1124E+04	(.6266E+04)*8=50128

**RESULTADOS SECCIÓN 5.3.1.  
SECCIÓN RECTANGULAR.**

PROB.	t MAX	TOR
11SR	2532	44672
12SR	3502	49992
16SR	3736	50128
TEÓRICO	3762	50247



**5.3.2.- SECCIÓN CIRCULAR.**

La sección circular que se resolverá es de 3cm de radio, se tomará en cuenta la simetría de la sección para simplificar los cálculos, ocupando 1/12 de la sección, la primera malla es de 16 nodos y 12 elementos (triangulares y rectangulares), la segunda es de 49 nodos y 42 elementos (rectangulares y triangulares). En esta sección y en las subsecuentes sólo se presentará el archivo de datos y un resumen de los valores más importantes del archivo de resultados, ya que las corridas de las secciones siguientes generan mucha información acerca de los elementos (geometría y conectividad) y los resultados de los esfuerzos en cada elemento y al presentar todo hace un volumen de páginas no adecuado.

**ARCHIVO DE DATOS, SEGUNDO EJEMPLO, MALLA 1 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN. (SC1.DAT)  
 SECCIÓN CIRCULAR, 16 NODOS, 12 ELEMENTOS.  
 (1/12 ÁREA)

```

16 12 1 0 1 1 0
1. 1. 0. 2790.
0. .866 1.732 2.5980762111 2.828427125 2.958039892 3.
.866 1.732 2.5990762111 2.828427125 2.958039892
. 1.732 2.5980762111 2.828427125
2.5980762111
0. 0. 0. 0. 0. 0.
.5 .5 .5 .5 .5
1. 1. 1.
1.5
1 1 1 2 8 0
2 1 2 3 9 8
3 1 3 4 10 9
4 1 4 5 11 10
5 1 5 6 12 11
6 1 6 7 12 0
7 1 8 9 13 0
8 1 9 10 14 13
9 1 10 11 15 14
10 1 11 12 15 0
11 1 13 14 16 0
12 1 14 15 16 0
0
7 0. 12 0. 15 0. 16 0.
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

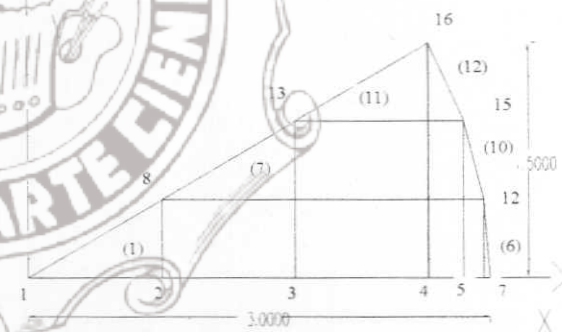


Fig. 5.3.2.1) Malla para el problema SC1.

**RESUMEN DE RESULTADOS, SEGUNDO EJEMPLO, MALLA 1 :**

COORDENADAS NODALES		
NODO	X	Y
6	.29580E+01	.00000E+00
7	.30000E+01	.00000E+00
12	.29580E+01	.50000E+00
13	.17320E+01	.10000E+01
14	.25981E+01	.10000E+01
16	.25981E+01	.15000E+01

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO NODO		
6	1	6	7	12
11	1	13	14	16

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

7	.00000E+00
12	.00000E+00
16	.00000E+00

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

6	.17357E+03	7	.00000E+00	12	.00000E+00
13	.35388E+04	14	.84320E+03	16	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
6	CENTRO	-.34714E+03	.41366E+04
11	CENTRO	-.16864E+04	.31125E+04

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .14418E+05

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
6	.4137E+04	11	-.1686E+04	.1442E+05

**ARCHIVO DE DATOS, SEGUNDO EJEMPLO, MALLA 2 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN. (SC2.DAT).  
SECCIÓN CIRCULAR, 49 NODOS, 42 ELEMENTOS.  
(1/12 ÁREA)

49	42	1	0	1	1	0						
1.	1.	0.	2790.									
0.	.433	.866	1.299	1.732	2.165	2.5980762111	2.727178029	2.828427125				
2.90473751	2.958039892	2.989565186	3.									
	.433	.866	1.299	1.732	2.165	2.5980762111	2.727178029	2.828427125				
2.90473751	2.958039892	2.989565186										
	.866	1.299	1.732	2.165	2.5980762111	2.727178029	2.828427125					
2.90473751	2.958039892											
	1.299	1.732	2.165	2.5980762111	2.727178029	2.828427125						
2.90473751												
				1.732	2.165	2.5980762111	2.727178029	2.828427125				
				2.165	2.5980762111	2.727178029						
				2.5980762111								
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25	.25
.5	.5	.5	.5	.5		.5	.5	.5	.5			
.75	.75	.75	.75			.75	.75	.75				
1.	1.	1.				1.	1.					
1.25	1.25					1.25						
1.5												
1	1	1	2	14	0							
2	1	2	3	15	14							
3	1	3	4	16	15							
4	1	4	5	17	16							
5	1	5	6	18	17							
6	1	6	7	19	18							
7	1	7	8	20	19							

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

8	1	8	9	21	20
9	1	9	10	22	21
10	1	10	11	23	22
11	1	11	12	24	23
12	1	12	13	24	0
13	1	14	15	25	0
14	1	15	16	26	25
15	1	16	17	27	26
16	1	17	18	28	27
17	1	18	19	29	28
18	1	19	20	30	29
19	1	20	21	31	30
20	1	21	22	32	31
21	1	22	23	33	32
22	1	23	24	33	0
23	1	25	26	34	0
24	1	26	27	35	34
25	1	27	28	36	35
26	1	28	29	37	36
27	1	29	30	38	37
28	1	30	31	39	38
29	1	31	32	40	39
30	1	32	33	40	0
31	1	34	35	41	0
32	1	35	36	42	41
33	1	36	37	43	42
34	1	37	38	44	43
35	1	38	39	45	44
36	1	39	40	45	0
37	1	41	42	46	0
38	1	42	43	47	46
39	1	43	44	48	47
0					

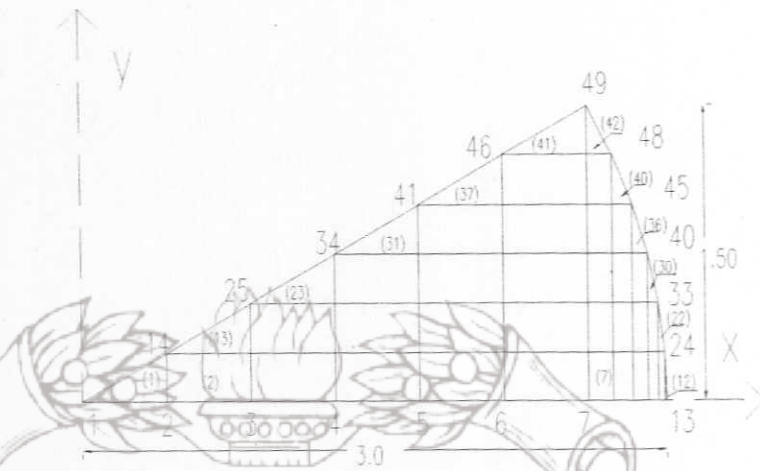


Fig 5.3.2.2) Malla para el problema SC2

### RESUMEN DE RESULTADOS, SEGUNDO EJEMPLO, MALLA 2:

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
12	.29896E+01	.00000E+00
13	.30000E+01	.00000E+00
24	.29896E+01	.25000E+00
46	.21650E+01	.12500E+01
47	.25981E+01	.12500E+01
49	.25981E+01	.15000E+01

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
12	1	12	13 24
41	1	46	47 49

EL ANCHO DE BANDA ES 14 EN EL ELEMENTO 1

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

13	.00000E+00	24	.00000E+00	49	.00000E+00
----	------------	----	------------	----	------------

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

12	.43551E+02	13	.00000E+00	24	.00000E+00
46	.19284E+04	47	.47120E+03	49	.00000E+00



ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
12	CENTRO	-.17420E+03	.41736E+04
41	CENTRO	-.18848E+04	.33648E+04

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .14696E+05

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
12	.4174E+04	41	-.1885E+04	.1470E+05

Los valores teóricos, son obtenidos usando las ecuaciones (2.2.4) para el esfuerzo máximo y la (2.2.3) para el momento torsionante, los valores finales del momento torsionante, ocupando el programa se obtienen multiplicando por doce el valor obtenido, ya que se considero la simetría de la sección. El valor que se ocupa del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/\text{cm} = .00017453 \text{ rad/cm}$ ). De lo anterior se tiene que:

$$\tau_{\max} = G \theta r = (8 \times 10^6)(.0001745)(3) = 4188 \text{ N/cm}^2$$

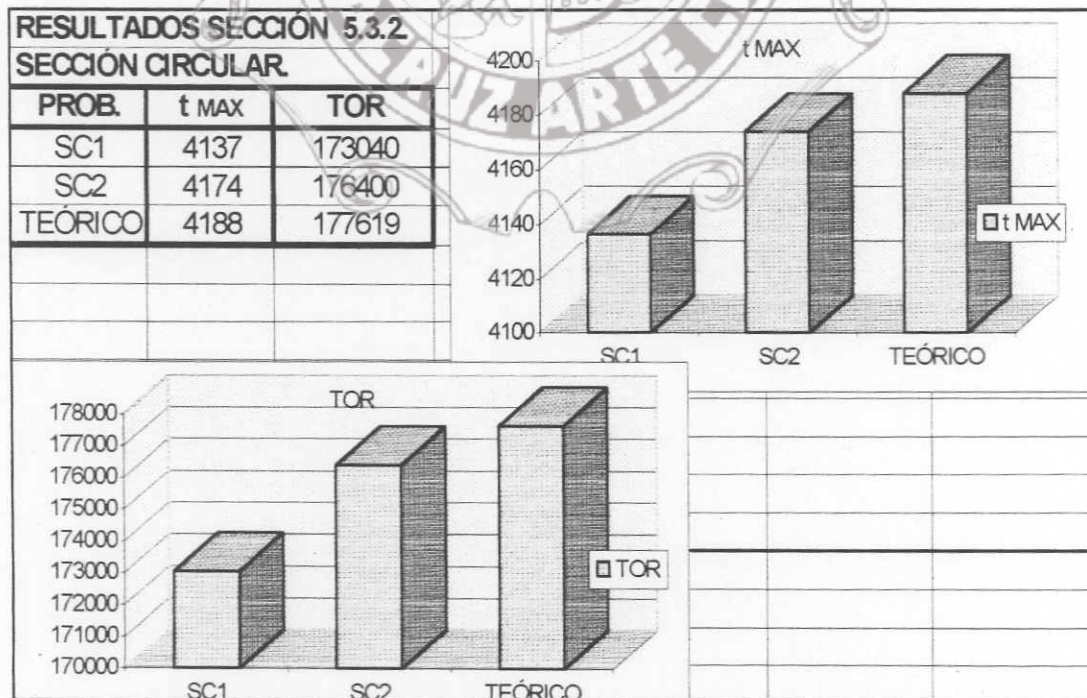
$$M_t = G \theta J_0 = (8 \times 10^6)(.0001745)(\pi(3)^4/2) = 177,619.37 \text{ N-cm}$$

**Resultados SC1:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
6	4137E+04	11	-.1686E+04	(.1442E+05)*12=173040

**Resultados SC2:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
12	.4174E+04	41	-.1885E+04	(.1470E+05)*12=176400



Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

5.3.3.- SECCIÓN ELÍPTICA.

La sección elíptica que se resolverá es de 2cm de semieje mayor y 1.5 cm de semieje menor, se tomará en cuenta la simetría de la sección para simplificar los cálculos, ocupando 1/4 de la sección, la primera malla es de 10 elementos, entre triangulares y rectangulares y 15 nodos, la segunda es de 39 nodos y 49 elementos triangulares.



Fig. 5.3.3.1) Malla de problema SE1

**ARCHIVO DE DATOS (SE1.DAT), TERCER EJEMPLO, MALLA 1:**  
 SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (SE1.DAT)  
 SECCIÓN ELÍPTICA, 15 NUDOS, 10 ELEMENTOS (TRIANG. Y RECTANG.)  
 (1/4 ÁREA)

```

15 10 1 0 1 0 0
1. 1. 0. 2790.
0. .5 1. 1.5 2. 0. .5 1. 1.5 0. .5 1. 0. .5 0.
0. 0. 0. 0. 0. .99216 .99216 .99216 .99216 1.299 1.299 1.299 1.4524
1.4524 1.5
1 1 1 2 7 6
2 1 2 3 8 7
3 1 3 4 9 8
4 1 4 5 9 0
5 1 6 7 11 10
6 1 7 8 12 11
7 1 8 9 12 0
8 1 10 11 14 13
9 1 11 12 14 0
10 1 13 14 15 0
0
5 0. 9 0. 12 0. 14 0. 15 0.
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

Instituto de Ingeniería,  
 Universidad Veracruzana

## RESUMEN DE RESULTADOS, TERCER EJEMPLO, MALLA 1 :

### COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
4	.15000E+01	.00000E+00
5	.20000E+01	.00000E+00
9	.15000E+01	.99216E+00
13	.00000E+00	.14524E+01
14	.50000E+00	.14524E+01
15	.00000E+00	.15000E+01

### DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
4	1	4	5 9
10	1	13	14 15

### VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

5	.00000E+00
9	.00000E+00
14	.00000E+00
15	.00000E+00

### CANTIDADES CALCULADAS

#### VALORES NODALES DE PHI

4	.81041E+03	5	.00000E+00	9	.00000E+00
13	.12318E+03	14	.00000E+00	15	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
4	CENTRO	-.81682E+03	.16208E+04
10	CENTRO	-.25877E+04	.24635E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .40120E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
4	.1621E+04	10	-.2588E+04	.4012E+04

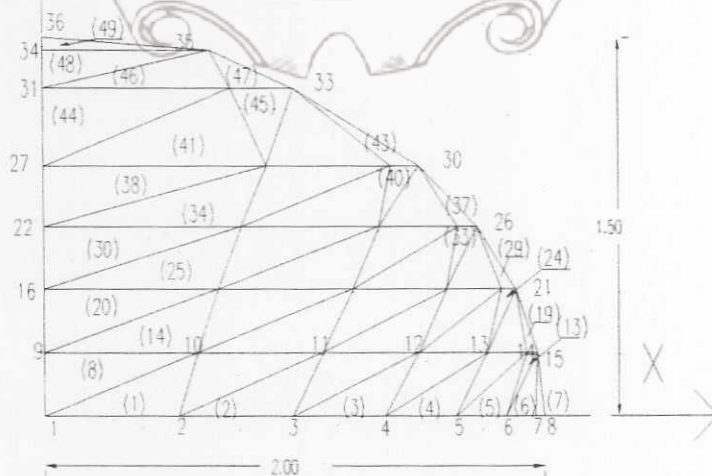


Fig. 5.3.3.2) Malla de problema SE2.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

**ARCHIVO DE DATOS (SE2.DAT), TERCER EJEMPLO, MALLA 2 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN , (SE2.DAT)  
 SECCIÓN ELÍPTICA, 36 NUDOS, 49 ELEMENTOS (TRIANG.)  
 (1/4 ÁREA)

36 49 1 0 1 0 2

1. 1. 0. 2790.

0 3

49 36

8

1	8	1	0.0	0.0	2.0	0.0	16
9	15	1	0.0	.25	1.9720	.25	14
16	21	1	0.0	.5	1.885618	.5	12
22	26	1	0.0	.75	1.732050	.75	10
27	30	1	0.0	.99216	1.5	.99216	8
31	33	1	0.0	1.299	1.0	1.299	3
34	35	1	0.0	1.4524	0.5	1.4524	2
36	37	0	0.0	1.5	0.	0.	1

19

1	6	1	1	3	1	2	10	41	42	1	1	3	27	28	32
7	7	0	0	3	7	8	15	43	43	0	0	3	29	30	33
8	13	1	1	3	1	10	9	44	45	1	1	3	27	32	31
14	18	1	1	3	9	10	17	46	46	0	0	3	31	32	35
19	19	0	0	3	14	15	21	47	47	0	0	3	32	33	35
20	24	1	1	3	9	17	16	48	48	0	0	3	31	35	34
25	28	1	1	3	16	17	23	49	49	0	0	3	34	35	36
29	29	0	0	3	20	21	26	0	0	0	0	0	0	0	0
30	33	1	1	3	16	23	22	8	0.	15	0.	21	0.	26	0.
34	36	1	1	3	22	23	28	30	0.	33	0.	35	0.	36	0.
37	37	0	0	3	25	26	30	0	0	0	0	0	0	0	0
38	40	1	1	3	22	28	27	0	0	0	0	0	0	0	0

**RESUMEN DE RESULTADOS, TERCER EJEMPLO, MALLA 2 :**

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
6	.18487E+01	.00000E+00
14	.19282E+01	.25000E+00
15	.19720E+01	.25000E+00
34	.00000E+00	.14524E+01
35	.66667E+00	.14524E+01
36	.00000E+00	.15000E+01

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
13	1	6	15 14
49	1	34	35 36

EL ANCHO DE BANDA ES 10 EN EL ELEMENTO 1

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

15	.00000E+00	35	.00000E+00	36	.00000E+00
----	------------	----	------------	----	------------

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

6	.26869E+03	14	.82651E+02	15	.00000E+00
34	.12693E+03	35	.00000E+00	36	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
13	CENTRO	-.14485E+03	.18861E+04
49	CENTRO	-.26667E+04	.19040E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN =		.45964E+04		
ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
13	.1886E+04	49	-.2667E+04	.4596E+04

Los valores obtenidos del programa de computadora se presentaron anteriormente y los valores teóricos son obtenidos usando las ecuaciones (2.4.2) para el esfuerzo máximo y la (2.4.d) para el momento torsionante. Los valores que se ocupan del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/\text{cm} = .00017453 \text{ rad/cm}$ ). De lo anterior se tiene que:

$$M_t = -\frac{\pi a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)} F = 18,932.49397, \quad \tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi a b^2} = 2,678.4$$

**Resultados de SE1:**

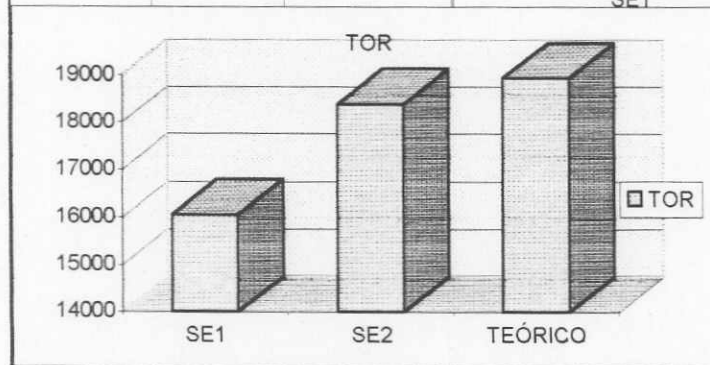
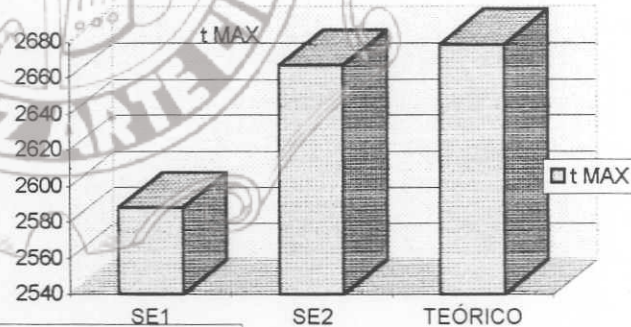
ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
4	.1621E+04	10	-.2588E+04	(.4012E+04)*4=16048

**Resultados de SE2:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
13	.1886E+04	49	-.2667E+04	(.4596E+04)*4=18384

**RESULTADOS SECCIÓN 5.3.3.  
SECCIÓN ELÍPTICA.**

PROB.	t MAX	TOR
SE1	2588	16048
SE2	2667	18384
TEÓRICO	2678	18932



## 5.3.4.- SECCIÓN TRIANGULAR EQUILÁTERA.

La sección triangular equilátera que se resolverá es de 3cm por lado, se tomará en cuenta la simetría de la sección para simplificar los cálculos, ocupando 1/2 de la sección, la primera malla es de 21 elementos, entre triangulares y rectangulares y 28 nodos, la segunda es de 91 nodos y 144 elementos triangulares, la tercera es de 231 nodos y 400 elementos triangulares.

### ARCHIVO DE DATOS, CUARTO EJEMPLO, MALLA 1 :

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN. (41STE.DAT).  
SECCIÓN TRIANGULAR EQUILÁTERA. 28 NUDOS, 21 ELEMENTOS.  
ELEMENTOS RECTANG. Y TRIANG. (1/2 área)

28 21 1 0 1 0 0  
1. 1. 0. 2790.

0. .433 .866 1.299 1.732 2.165 2.5980762111  
.433 .866 1.299 1.732 2.165 2.5980762111  
.866 1.299 1.732 2.165 2.5980762111  
1.299 1.732 2.165 2.5980762111  
1.732 2.165 2.5980762111  
2.165 2.5980762111  
2.5980762111

0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.  
.25 .25 .25 .25 .25 .25  
.5 .5 .5 .5 .5  
.75 .75 .75 .75  
1. 1. 1.  
1.25 1.25  
1.5

1 1 1 2 8 0  
2 1 2 3 9 8  
3 1 3 4 10 9  
4 1 4 5 11 10  
5 1 5 6 12 11  
6 1 6 7 13 12  
7 1 8 9 14 0  
8 1 9 10 15 14  
9 1 10 11 16 15  
10 1 11 12 17 16  
11 1 12 13 18 17  
12 1 14 15 19 0  
13 1 15 16 20 19  
14 1 16 17 21 20  
15 1 17 18 22 21  
16 1 19 20 23 0  
17 1 20 21 24 23  
18 1 21 22 25 24  
19 1 23 24 26 0  
20 1 24 25 27 26  
21 1 26 27 28 0

0  
1 0. 7 0. 8 0. 13 0. 14 0. 18 0. 19 0. 22 0. 23 0.  
25 0. 26 0. 27 0. 28 0.  
0 0

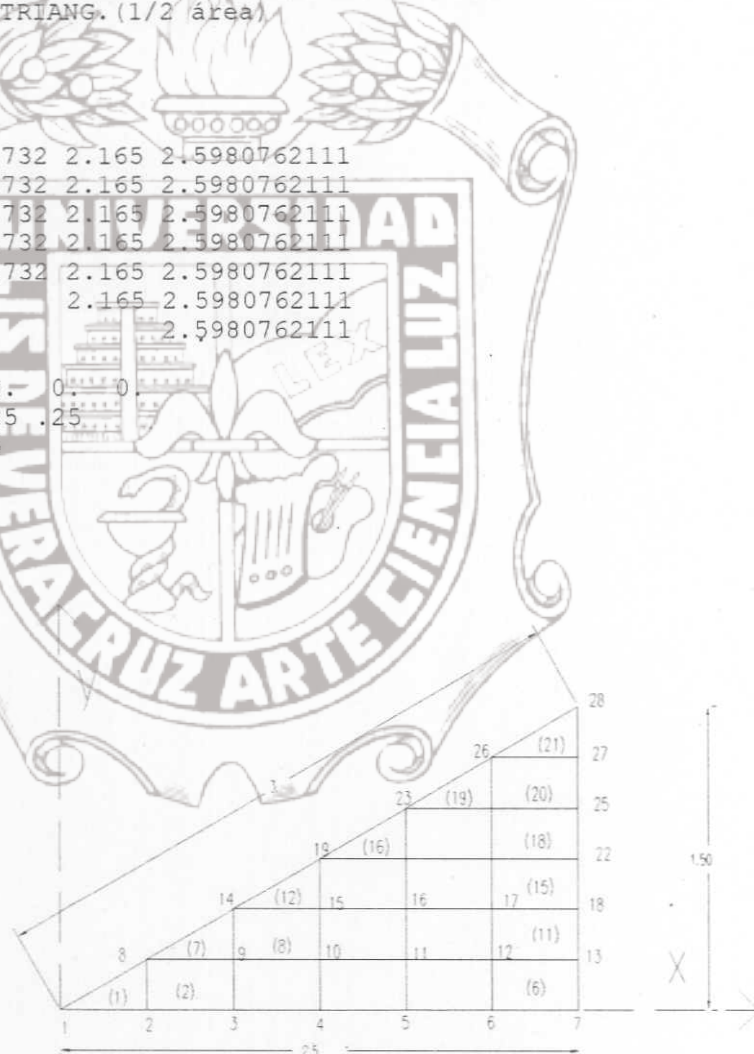


Fig. 5.3.4.1) Malla de problema 41STE.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## RESUMEN DE RESULTADOS, CUARTO EJEMPLO, MALLA 1 (41STE) :

### COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
6	.21650E+01	.00000E+00
7	.25981E+01	.00000E+00
12	.21650E+01	.25000E+00
14	.86600E+00	.50000E+00
15	.12990E+01	.50000E+00
19	.12990E+01	.75000E+00

### DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
6	1	6	7 13 12
12	1	14	15 19

EL ANCHO DE BANDA ES 8 EN EL ELEMENTO 1  
VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

7	.00000E+00
13	.00000E+00
14	.00000E+00
19	.00000E+00

### CANTIDADES CALCULADAS

#### VALORES NODALES DE PHI

6	.54921E+03	7	.00000E+00	12	.52782E+03
13	.00000E+00	14	.00000E+00	15	.33553E+03
19	.00000E+00				

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
6	NODO 6	-.85579E+02	.12682E+04
	CENTRO	-.42789E+02	.12435E+04
	NODO 13	.00000E+00	.12188E+04
12	CENTRO	-.13421E+04	-.77491E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .11364E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
6	.1268E+04	12	-.1342E+04	.1136E+04

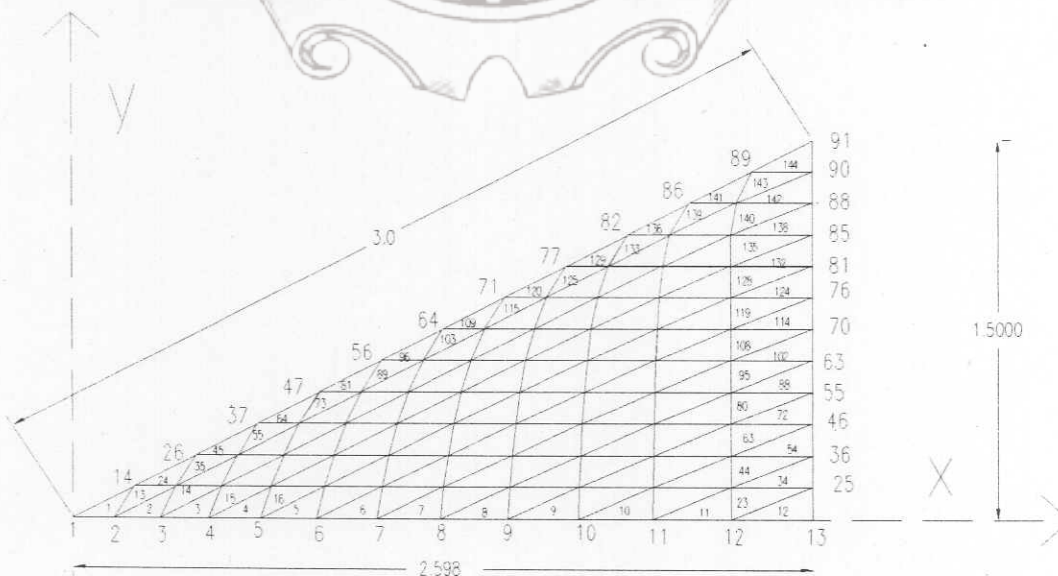


Fig. 5.3.4.2) Malla de problema 42STE.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

## ARCHIVO DE DATOS, CUARTO EJEMPLO, MALLA 2 :

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN , (42STE.DAT)  
 SECCIÓN TRIANGULAR EQUILÁTERA, 91 NUDOS, 144 ELEMENTOS (TRIANGULARES.)  
 (1/2 ÁREA)

91 144 1 0 1 0 2

1. 1. 0. 2790.

0 3

144 91

13

1	13	1	0.0	0.0	2.598	0.0	.5
14	25	1	0.2165	0.125	2.598	0.125	.5
26	36	1	0.433	.25	2.598	.25	.5
37	46	1	0.6495	.375	2.598	.375	.5
47	55	1	0.866	.5	2.598	.5	.5
56	63	1	1.0825	.625	2.598	.625	.5
64	70	1	1.299	.75	2.598	.75	.5
71	76	1	1.5155	.875	2.598	.875	.5
77	81	1	1.732	1.0	2.598	1.0	.5
82	85	1	1.9485	1.125	2.598	1.125	.5
86	88	1	2.165	1.25	2.598	1.25	.6
89	90	1	2.3815	1.375	2.598	1.375	1
91	92	1	2.598	1.5	0.	0.	1

23

1	12	1	1	3	1	2	14
13	23	1	1	3	2	15	14
24	34	1	1	3	14	15	26
35	44	1	1	3	15	27	26
45	54	1	1	3	26	27	37
55	63	1	1	3	27	38	37
64	72	1	1	3	37	38	47
73	80	1	1	3	38	48	47
81	88	1	1	3	47	48	56
89	95	1	1	3	48	57	56
96	102	1	1	3	56	57	64
103	108	1	1	3	57	65	64
109	114	1	1	3	64	65	71
115	119	1	1	3	65	72	71
120	124	1	1	3	71	72	77
125	128	1	1	3	72	78	77
129	132	1	1	3	77	78	82
133	135	1	1	3	78	83	82
136	138	1	1	3	82	83	86
139	140	1	1	3	83	87	86
141	142	1	1	3	86	87	89
143	143	0	0	3	87	90	89
144	144	0	0	3	89	90	91

0

1	0.	13	0.	14	0.	25	0.	26	0.	36	0.	37	0.
46	0.	47	0.	55	0.	56	0.	63	0.	64	0.	70	0.
71	0.	76	0.	77	0.	81	0.	82	0.	85	0.	86	0.
88	0.	89	0.	90	0.	91	0.						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana



## RESUMEN DE RESULTADOS, CUARTO EJEMPLO, MALLA 2 (42STE) :

### COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
12	.23093E+01	.00000E+00
13	.25980E+01	.00000E+00
25	.25980E+01	.12500E+00
56	.10825E+01	.62500E+00
57	.12268E+01	.62500E+00
64	.12990E+01	.75000E+00

### DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
12	1	12	13 25
96	1	56	57 64

EL ANCHO DE BANDA ES 14 EN EL ELEMENTO 1

### VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

13	.00000E+00	25	.00000E+00	56	.00000E+00	64	.00000E+00
----	------------	----	------------	----	------------	----	------------

### CANTIDADES CALCULADAS

### VALORES NODALES DE PHI

12	.41321E+03	13	.00000E+00	25	.00000E+00	56	.00000E+00
64	.00000E+00						

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
12	CENTRO	.00000E+00	.14314E+04
96	CENTRO	-.14746E+04	-.85141E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .11950E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
12	.1431E+04	96	-.1475E+04	.1195E+04

## ARCHIVO DE DATOS, CUARTO EJEMPLO, MALLA 3 :

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (43STE.DAT)  
SECCIÓN TRIANGULAR EQUILÁTERA, 231 NUDOS, 400 ELEMENTOS (TRIANG.)  
(1/2 ÁREA)

231 400 1 0 1 0 2

1. 1. 0. 2790.

0 3

400 231

21

1	21	1	0.0	0.000	2.5980	0.0	15
22	41	1	0.1299	0.075	2.5980	0.075	15
42	60	1	0.2598	0.150	2.5980	0.150	15
61	78	1	0.3897	0.225	2.5980	0.225	15
79	95	1	0.5196	0.300	2.5980	0.300	15
96	111	1	0.6495	0.375	2.5980	0.375	15
112	126	1	0.7794	0.450	2.5980	0.450	15
127	140	1	0.9093	0.525	2.5980	0.525	15
141	153	1	1.0392	0.600	2.5980	0.600	15
154	165	1	1.1691	0.675	2.5980	0.675	15
166	176	1	1.2990	0.750	2.5980	0.750	15
177	186	1	1.4289	0.825	2.5980	0.825	15
187	195	1	1.5588	0.900	2.5980	0.900	15
196	203	1	1.6887	0.975	2.5980	0.975	15
204	210	1	1.8186	1.050	2.5980	1.050	15
211	216	1	1.9485	1.125	2.5980	1.125	15
217	221	1	2.0784	1.200	2.5980	1.200	15

222	225	1	2.2083	1.275	2.5980	1.275	15
226	228	1	2.3382	1.350	2.5980	1.350	15
229	230	1	2.4681	1.425	2.5980	1.425	1
231	232	1	2.5980	1.500	.0	0.	1

39

1	20	1	1	3	1	2	22
21	39	1	1	3	2	23	22
40	58	1	1	3	22	23	42
59	76	1	1	3	23	43	42
77	94	1	1	3	42	43	61
95	111	1	1	3	43	62	61
112	128	1	1	3	61	62	79
129	144	1	1	3	62	80	79
145	160	1	1	3	79	80	96
161	175	1	1	3	80	97	96
176	190	1	1	3	96	97	112
191	204	1	1	3	97	113	112
205	218	1	1	3	112	113	127
219	231	1	1	3	113	128	127
232	244	1	1	3	127	128	141
245	256	1	1	3	128	142	141
257	268	1	1	3	141	142	154
269	279	1	1	3	142	155	154
280	290	1	1	3	154	155	166
291	300	1	1	3	155	167	166
301	310	1	1	3	166	167	177
311	319	1	1	3	167	178	177
320	328	1	1	3	177	178	187
329	336	1	1	3	178	188	187
337	344	1	1	3	187	188	196
345	351	1	1	3	188	197	196
352	358	1	1	3	196	197	204
359	364	1	1	3	197	205	204
365	370	1	1	3	204	205	211
371	375	1	1	3	205	212	211
376	380	1	1	3	211	212	217
381	384	1	1	3	212	218	217
385	388	1	1	3	217	218	222
389	391	1	1	3	218	223	222
392	394	1	1	3	222	223	226
395	396	1	1	3	223	227	226
397	398	1	1	3	226	227	229
399	399	0	0	3	227	230	229
400	400	0	0	3	229	230	231

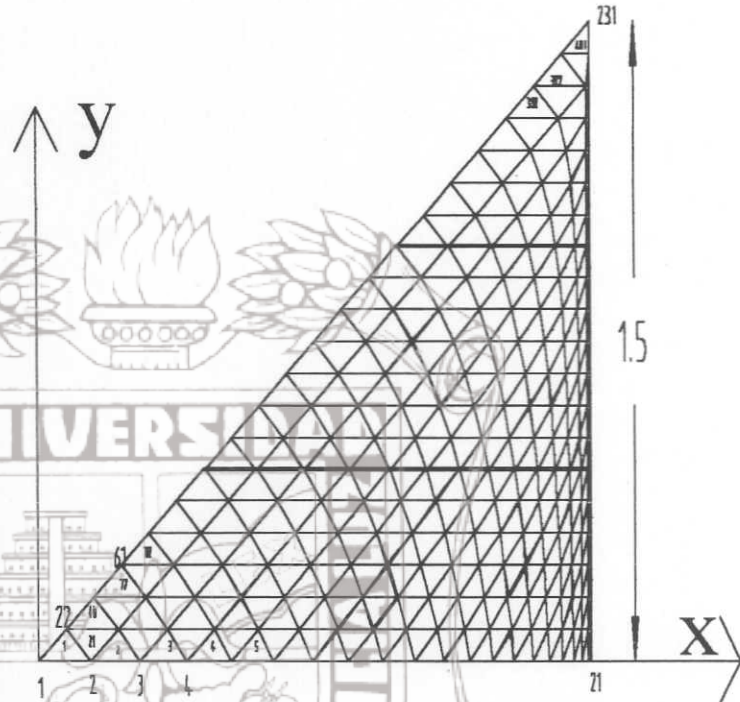


Fig. 5.3.4.3) Malla de problema 43STE.

0	21	0.	22	0.	41	0.	42	0.	60	0.	61	0.	78	0.	79	0.	95	0.	96												
0.	111	0.	112	0.	126	0.	127	0.	140	0.	141	0.	153	0.	154	0.	165	0.	166	0.	176	0.	177	0.	186	0.	187	0.	195	0.	196
0.	203	0.	204	0.	210	0.	211	0.	216	0.	217	0.	221	0.	222	0.	225	0.	226	0.	228	0.	229	0.	230	0.	231	0.	0.	0.	0.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

**RESUMEN DE RESULTADOS, CUARTO EJEMPLO, MALLA 3 (43STE) :**  
 SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (43STE.DAT)  
 SECCIÓN TRIANGULAR EQUILATERA, 231 NUDOS, 400 ELEMENTOS (TRIANG.)  
 (1/2 ÁREA)

NP = 231  
 NE = 400  
 ITYP = 1  
 IPLVL = 0  
 MESH = 2

COEFICIENTES DE ECUACIONES  
 MATERIAL

SET	DX	DY	P	Q
1	.10000E+01	.10000E+01	.00000E+00	.27900E+04

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
2	.24356E+00	.00000E+00
20	.25818E+01	.00000E+00
40	.25818E+01	.75000E-01
41	.25980E+01	.75000E-01
155	.14127E+01	.67500E+00
166	.12990E+01	.75000E+00
167	.15426E+01	.75000E+00
230	.25980E+01	.14250E+01
231	.25980E+01	.15000E+01

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
1	1	1 2	22
2	1	2 3	23
39	1	20 41	40
40	1	22 23	42
290	1	164 165	176
291	1	155 167	166
399	1	227 230	229
400	1	229 230	231

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	CENTRO	-.25767E+03	-.16399E+03
2	CENTRO	-.20650E+03	-.38941E+03
38	CENTRO	-.91761E+00	.17196E+04
39	CENTRO	.36116E+00	.17814E+04
291	CENTRO	-.14357E+04	-.79750E+03
292	CENTRO	-.11973E+04	-.55319E+03
389	CENTRO	-.75952E+03	-.17676E+03
390	CENTRO	-.29269E+03	.26354E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN= .12073E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
39	.1781E+04	291	-.1436E+04	.1207E+04

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

Los valores teóricos, son obtenidos usando las ecuaciones (2.5.k), para el esfuerzo máximo y la (2.5.l) para el momento torsionante. El valor que se ocupa del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/\text{cm} = .00017453 \text{ rad/cm}$ ).

De lo anterior se tiene que:

$$\tau_{\max} = \frac{G\theta a}{2} = 1,812.158 \quad M_t = -\frac{G\theta a^4}{15\sqrt{3}} = 2,446.4135$$

**Valores resultantes de la primera corrida con 41STE.DAT:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
6	.1268E+04	12	-.1342E+04	(.1136E+04)*2=2272

**Valores resultantes de la segunda corrida con 42STE.DAT:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
12	.1431E+04	96	-.1475E+04	(.1195E+04)*2=2390

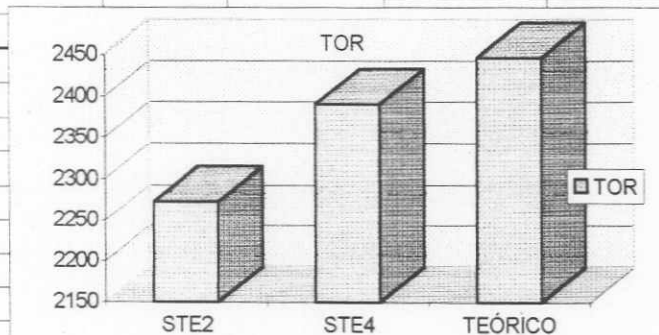
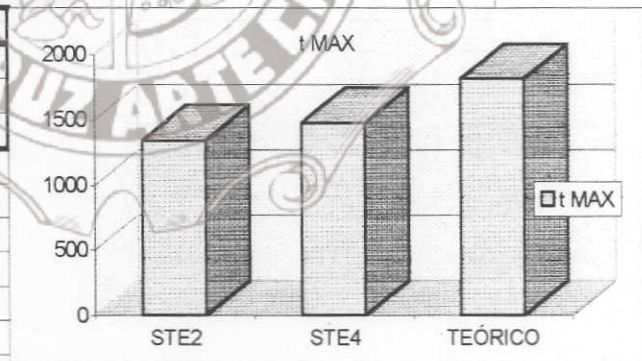
**Valores resultantes de la segunda corrida con 43STE.DAT:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
39	.1781E+04	291	-.1436E+04	(.1207E+04)*2=2414

**RESULTADOS SECCION 5.3.4.**

**SECCION TRIANGULAR EQUILATERA.**

PROB.	t MAX	TOR
STE2	1342	2272
STE4	1475	2390
TEÓRICO	1812	2446.41



Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

### 5.3.5.- SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA.

La sección rectangular estrecha que se resolverá es de 11cm de base y 1 cm de altura, se aprovechará su simetría y se analizará, sólo la mitad de su sección, la primera malla es de 88 elementos, rectangulares y 115 nodos, la segunda es de 405 nodos y 352 elementos rectangulares, la tercera es de 252 nodos y 440 elementos triangulares.

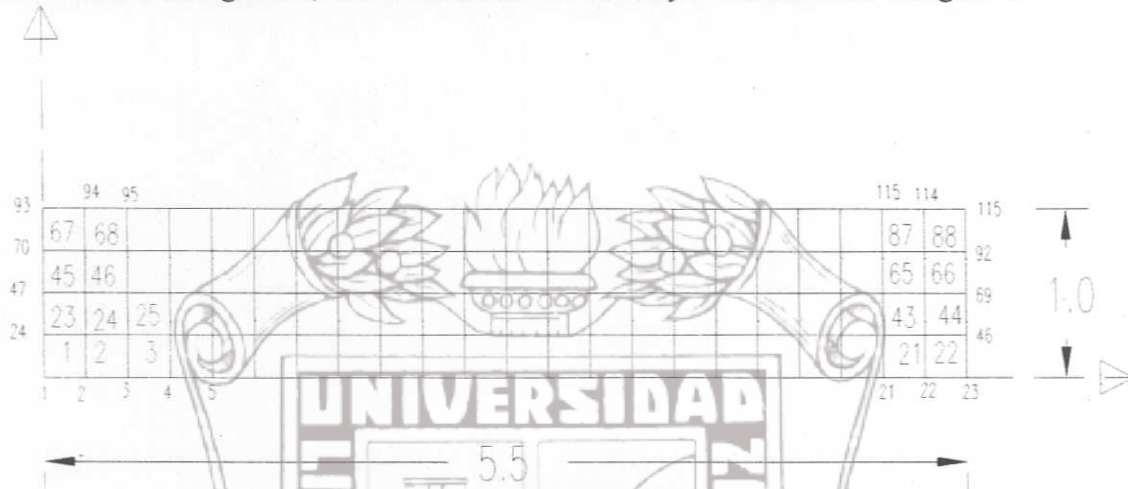


Fig. 5.3.5.1) Malla de problema 51SRE.

#### ARCHIVO DE DATOS, QUINTO EJEMPLO, MALLA 1 :

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN (51SRE.DAT). SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA. (1/2) DE ÁREA DE 15 CM DE LARGO Y 1 CM DE ANCHO, GENERANDO MALLA. MALLA DE ELEMENTOS RECTANGULARES, CON 115 NUDOS Y 88 ELEMENTOS.

```

115 88 1 0 1 0 1
1. 1. 0. 2790.
1 4
22 4
0.0 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25 .25
.25 .25 .25 .25 .25
0.0 .25 .25 .25 .25
0
1 0. 2 0. 3 0. 4 0. 5 0. 6 0. 7 0. 8 0. 9 0. 10 0. 11 0. 12 0. 13 0.
14 0. 15 0. 16 0. 17 0.
18 0. 19 0. 20 0. 21 0. 22 0. 23 0. 46 0. 69 0. 92 0. 93 0. 94 0. 95 0.
96 0. 97 0. 98 0.
99 0. 100 0. 101 0. 102 0. 103 0. 104 0. 105 0. 106 0. 107 0. 108 0.
109 0. 110 0. 111 0. 112 0. 113 0. 114 0. 115 0.
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

#### RESUMEN DE RESULTADOS, QUINTO EJEMPLO, MALLA 1 (51SRE) :

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
2	.25000E+00	.00000E+00
24	.00000E+00	.25000E+00
25	.25000E+00	.25000E+00
45	.52500E+01	.25000E+00
46	.55000E+01	.25000E+00
68	.52500E+01	.50000E+00
69	.55000E+01	.50000E+00

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO NODO			
1	1	1	2	25	24
44	1	45	46	69	68

EL ANCHO DE BANDA ES 25 EN EL ELEMENTO 1

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

1	.00000E+00
2	.00000E+00

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

1	.00000E+00	2	.00000E+00
24	.26156E+03	25	.26156E+03
45	.15101E+03	46	.00000E+00
68	.19148E+03	69	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	NODO 1	.10462E+04	.00000E+00
	CENTRO	.10462E+04	.61035E-04
	NODO 25	.10462E+04	.12207E-03
44	NODO 45	.16186E+03	.60405E+03
	CENTRO	.80928E+02	.68498E-03
	NODO 69	.00000E+00	.76591E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .22592E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
44	.7659E+03	1	.1046E+04	.2259E+04

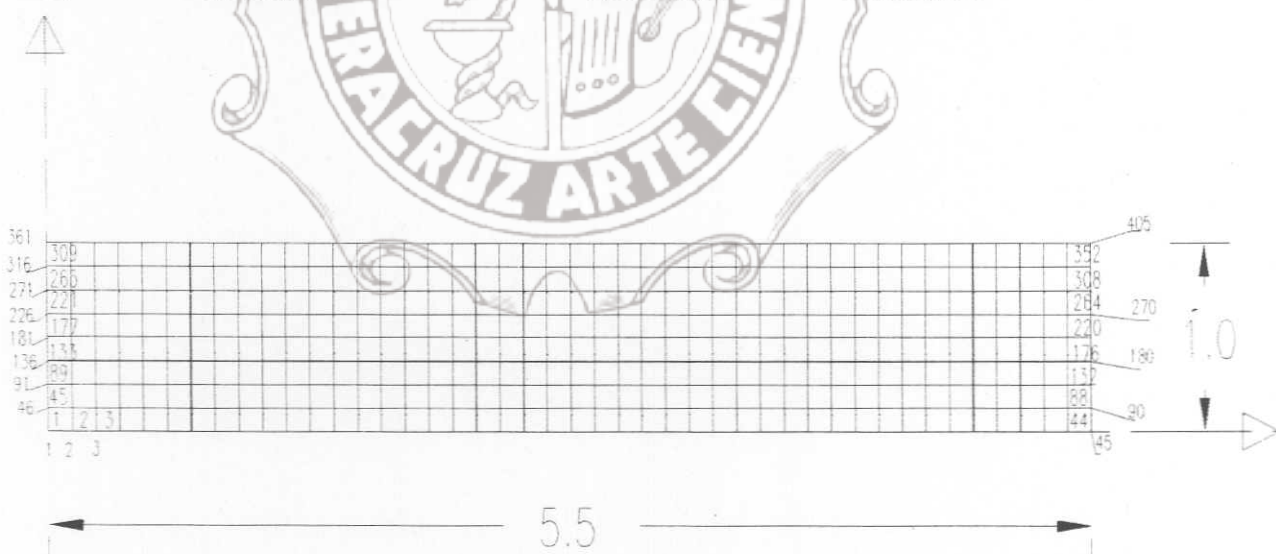


Fig. 5.3.5.2) Malla de problema 52SRE.

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

### ARCHIVO DE DATOS, QUINTO EJEMPLO, MALLA 2 :

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN (52SRE.DAT). SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA. (1/2 DE ÁREA) DE 15 CM DE LARGO Y 1 CM DE ANCHO, GENERANDO MALLA. MALLA DE ELEMENTOS RECTANGULARES, CON 405 NUDOS Y 352 ELEMENTOS.

```

405 352 1 0 1 0 1
1. 1. 0. 2790.
1 4
44 8
0.0 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125
    .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125
    .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125
    .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125
0.0 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125 .125
0
 1 0.  2 0.  3 0.  4 0.  5 0.  6 0.  7 0.  8 0.  9 0. 10 0. 11 0. 12 0. 13 0.
14 0. 15 0. 16 0. 17 0. 18 0. 19 0. 20 0. 21 0. 22 0. 23 0. 24 0. 25 0.
26 0. 27 0. 28 0. 29 0. 30 0. 31 0. 32 0. 33 0. 34 0. 35 0. 36 0. 37 0.
38 0. 39 0. 40 0. 41 0. 42 0. 43 0. 44 0. 45 0. 90 0. 135 0. 180 0.
225 0. 270 0. 315 0. 360 0. 361 0. 362 0. 363 0. 364 0. 365 0. 366 0.
367 0. 368 0. 369 0. 370 0. 371 0. 372 0. 373 0. 374 0. 375 0. 376 0.
377 0. 378 0. 379 0. 380 0. 381 0. 382 0. 383 0. 384 0. 385 0. 386 0.
387 0. 388 0. 389 0. 390 0. 391 0. 392 0. 393 0. 394 0. 395 0. 396 0.
397 0. 398 0. 399 0. 400 0. 401 0. 402 0. 403 0.
404 0. 405 0.
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

### RESUMEN DE RESULTADOS, QUINTO EJEMPLO, MALLA 2 (52SRE.) :

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
5	.50000E+00	.00000E+00
6	.62500E+00	.00000E+00
50	.50000E+00	.12500E+00
51	.62500E+00	.12500E+00
179	.53750E+01	.37500E+00
180	.55000E+01	.37500E+00
224	.53750E+01	.50000E+00
225	.55000E+01	.50000E+00

DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
5	1	5	6 51 50
176	1	179 180	225 224

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

5 .00000E+00 6 .00000E+00 180 .00000E+00 225 .00000E+00

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI

4	.00000E+00	5	.00000E+00	6	.00000E+00
49	.15258E+03	50	.15258E+03	51	.15258E+03
178	.17725E+03	179	.10498E+03	180	.00000E+00
223	.18724E+03	224	.11031E+03	225	.00000E+00

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
5	NODO 5	.12206E+04	.00000E+00
	CENTRO	.12206E+04	-.61035E-04
	NODO 51	.12206E+04	-.12207E-03
176	NODO 179	.42619E+02	.83987E+03

CENTRO .21310E+02 .86118E+03  
 NODO 225 ..00000E+00 .88249E+03

VOL.BAJO(PHI) PARA LA SECCIÓN = .23730E+04  
 ELEMENTO TAU(ZY)MAX ELEMENTO TAU(ZX)MAX VOL(PHI)  
 176 .8825E+03 5 .1221E+04 .2373E+04

### ARCHIVO DE DATOS, QUINTO EJEMPLO, MALLA 3 :

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (54SRE.DAT)  
 SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA, 252 NUDOS, 440 ELEMENTOS (TRIANG.)

(1/4 área).	101 120 1 1 3 43 65 64
252 440 1 0 1 0 2	121 140 1 1 3 64 65 86
1. 1. 0. 2790.	141 160 1 1 3 64 86 85
0 3	161 180 1 1 3 85 86 107
440 252	181 200 1 1 3 85 107 106
12	201 220 1 1 3 106 107 128
1 21 1 0.0 0.000 5.5 0.0 1	221 240 1 1 3 106 128 127
22 42 1 0.0 0.025 5.5 0.025 1	241 260 1 1 3 127 128 149
43 63 1 0.0 0.05 5.5 0.05 1	261 280 1 1 3 127 149 148
64 84 1 0.0 0.1 5.5 0.1 1	281 300 1 1 3 148 149 170
85 105 1 0.0 0.15 5.5 0.15 1	301 320 1 1 3 148 170 169
106 126 1 0.0 0.20 5.5 0.20 1	321 340 1 1 3 169 170 191
127 147 1 0.0 0.25 5.5 0.25 1	341 360 1 1 3 169 191 190
148 168 1 0.0 0.30 5.5 0.30 1	361 380 1 1 3 190 191 212
169 189 1 0.0 0.35 5.5 0.35 1	381 400 1 1 3 190 212 211
190 210 1 0.0 0.40 5.5 0.40 1	401 420 1 1 3 211 212 233
211 231 1 0.0 0.45 5.5 0.45 1	421 440 1 1 3 211 233 232
232 252 1 0.0 0.5 5.5 0.5 1	0
22	1 0. 2 0. 3 0. 4 0. 5 0. 6 0.
1 20 1 1 3 1 2 23	7 0. 8 0. 9 0. 10 0. 11 0. 12 0.
21 40 1 1 3 1 23 22	13 0. 14 0. 15 0. 16 0. 17 0.
41 60 1 1 3 22 23 44	18 0. 19 0. 20 0. 21 0. 42 0.
61 80 1 1 3 22 44 43	63 0. 84 0. 105 0. 126 0. 147 0.
81 100 1 1 3 43 44 65	168 0. 189 0. 210 0. 231 0. 252 0.
	0

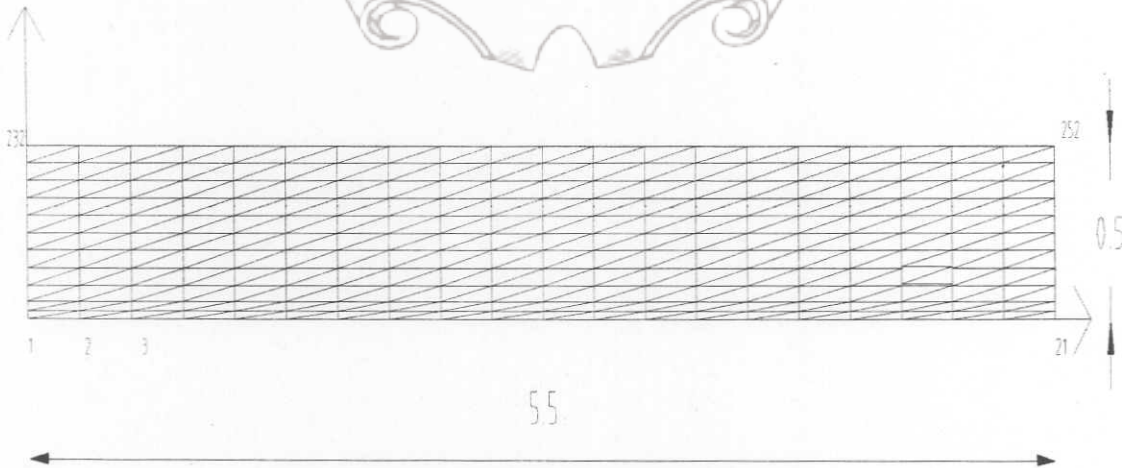


Fig. 5.3.5.3) Malla de problema 54SRE.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana



**RESUMEN DE RESULTADOS, QUINTO EJEMPLO, MALLA 3 (54SRE.):**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN, (54SRE.DAT)

SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA, 252 NUDOS, 440 ELEMENTOS (TRIANG.)

(1/4 área).

NP = 252  
 NE = 440  
 ITYP = 1  
 IPLVL = 0  
 MESH = 2

**COEFICIENTES DE ECUACIONES MATERIAL**

SET	DX	DY	P	Q
1	.10000E+01	.10000E+01	.00000E+00	.27900E+04

**COORDENADAS NODALES**

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
2	.27500E+00	.00000E+00
21	.55000E+01	.00000E+00
22	.00000E+00	.25000E-01
23	.27500E+00	.25000E-01
42	.55000E+01	.25000E-01
228	.46750E+01	.45000E+00
229	.49500E+01	.45000E+00
230	.52250E+01	.45000E+00
231	.55000E+01	.45000E+00
250	.49500E+01	.50000E+00
251	.52250E+01	.50000E+00
252	.55000E+01	.50000E+00

**DATOS DE LOS ELEMENTOS**

NEL	NMTL	NÚMERO	NODO
20	1	20	21 42
21	1	1	23 22
439	1	229	251 250
440	1	230	252 251

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	CENTRO	.13566E+04	.00000E+00
2	CENTRO	.13582E+04	.00000E+00
20	CENTRO	.00000E+00	.00000E+00
21	CENTRO	.13624E+04	.53303E+00
439	CENTRO	.53541E+02	.31661E+03
440	CENTRO	.34210E+02	.70756E+03

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN= .11945E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
440	.7076E+03	21	.1362E+04	.1194E+04

Los valores teóricos son obtenidos usando las ecuaciones (2.7.2) para el esfuerzo máximo y la (2.7.d) para el momento torsionante. El valor que se ocupa del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/\text{cm} = .00017453 \text{ rad/cm}$ ).

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

De lo anterior se tiene que:

$$M_t = -\frac{G\theta a^3 b}{3} = \frac{1396(1)^3(11)}{3} = 5118.66 \quad , \quad \tau_{\max} = \frac{3 Mt}{a^2 b} = 1396$$

**Valores resultantes de la primera corrida con 51SRE.DAT:**

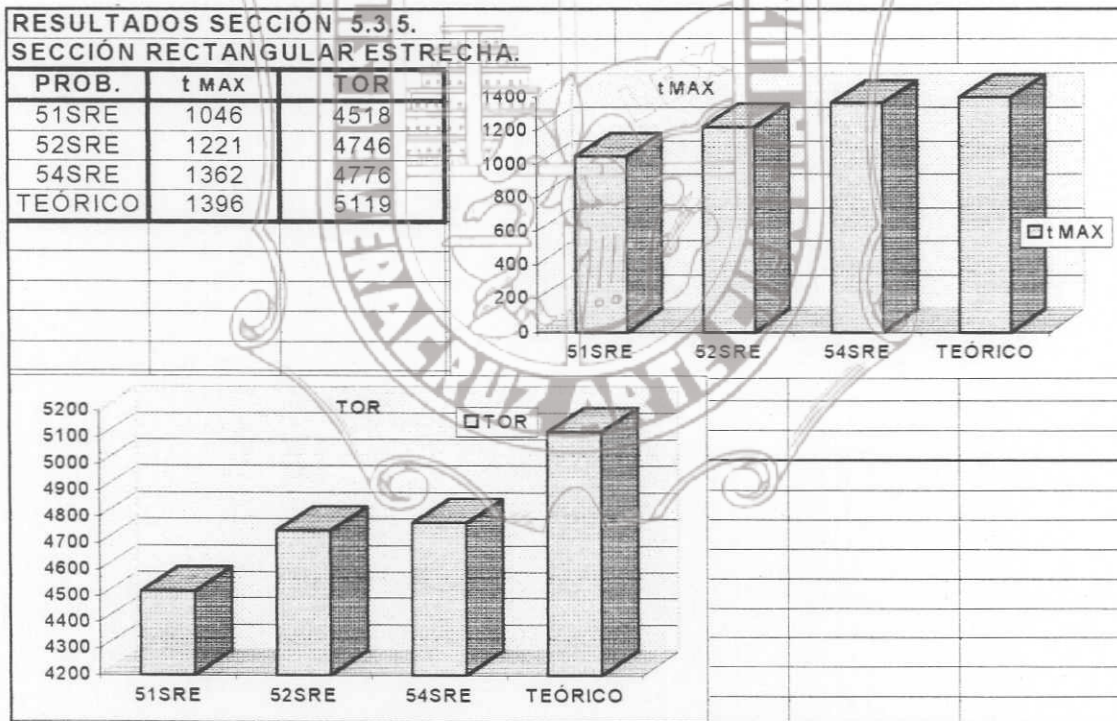
ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
44	.7659E+03	1	.1046E+04	(.2259E+04)*2=4518

**Valores resultantes de la segunda corrida con 52SRE.DAT:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
176	.8825E+03	5	.1221E+04	(.2373E+04)*2=4746

**Valores resultantes de la segunda corrida con 54SRE.DAT:**

ELEMENTO	TAU(ZY)MAX	ELEMENTO	TAU(ZX)MAX	VOL(PHI)
440	.7076E+03	21	.1362E+04	(.1194E+04)*4=4776



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 5.3.6.- SECCIÓN " I " PERFILES LAMINADOS.

La sección I que se resolverá es de 11cm de base o patín y 1 cm de espesor tanto en alma como en patín, además de tener un peralte de 15 cm. Se aprovechará su simetría en el ejemplo dos y se analizará, sólo un cuarto de su sección, la primera malla es de 140 elementos, rectangulares y 213 nodos, la segunda es de 193 nodos y 140 elementos rectangulares.

#### ARCHIVO DE DATOS, SEXTO EJEMPLO, MALLA 1 :

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TORSIÓN POR ELEMENTO FINITO.  
 SECCIÓN Y. DE 15CM DE PERALTE , 11CM DE PATÍN Y 1CM DE ESPESOR,  
 GENERANDO MALLA .MALLA DE ELEMENTOS RECTANGULARES, CON 213 NUDOS Y 140 ELEMENTOS.

213	140	1	0	1	0	2
1.	1.	0.	2790.			
1	4					
140	213					
31						
1	23	1	0.0	0.0	11.0	.0 1
24	46	1	0.0	.5	11.0	.5 1
47	69	1	0.0	1.0	11.0	1.0 1
70	72	1	5.0	1.5	6.0	1.5 1
73	75	1	5.0	2.0	6.0	2.0 1
76	78	1	5.0	2.5	6.0	2.5 1
79	81	1	5.0	3.0	6.0	3.0 1
82	84	1	5.0	3.5	6.0	3.5 1
85	87	1	5.0	4.0	6.0	4.0 1
88	90	1	5.0	4.5	6.0	4.5 1
91	93	1	5.0	5.0	6.0	5.0 1
94	96	1	5.0	5.5	6.0	5.5 1
97	99	1	5.0	6.0	6.0	6.0 1
100	102	1	5.0	6.5	6.0	6.5 1
103	105	1	5.0	7.0	6.0	7.0 1
106	108	1	5.0	7.5	6.0	7.5 1
109	111	1	5.0	8.0	6.0	8.0 1
112	114	1	5.0	8.5	6.0	8.5 1
115	117	1	5.0	9.0	6.0	9.0 1
118	120	1	5.0	9.5	6.0	9.5 1
121	123	1	5.0	10.0	6.0	10.0 1
124	126	1	5.0	10.5	6.0	10.5 1
127	129	1	5.0	11.0	6.0	11.0 1
130	132	1	5.0	11.5	6.0	11.5 1
133	135	1	5.0	12.0	6.0	12.0 1
136	138	1	5.0	12.5	6.0	12.5 1
139	141	1	5.0	13.0	6.0	13.0 1
142	144	1	5.0	13.5	6.0	13.5 1
145	167	1	0.0	14.0	11.0	14.0 1
168	190	1	0.0	14.5	11.0	14.5 1
191	213	1	0.0	15.0	11.0	15.0 1
8						
1	22	1	1	4	1	2 25 24
23	44	1	1	4	24	25 48 47
45	46	1	1	4	57	58 71 70
47	93	2	3	4	70	71 74 73
48	94	2	3	4	71	72 75 74
95	96	1	1	4	142	143 156 155
97	118	1	1	4	145	146 169 168
119	140	1	1	4	168	169 192 191

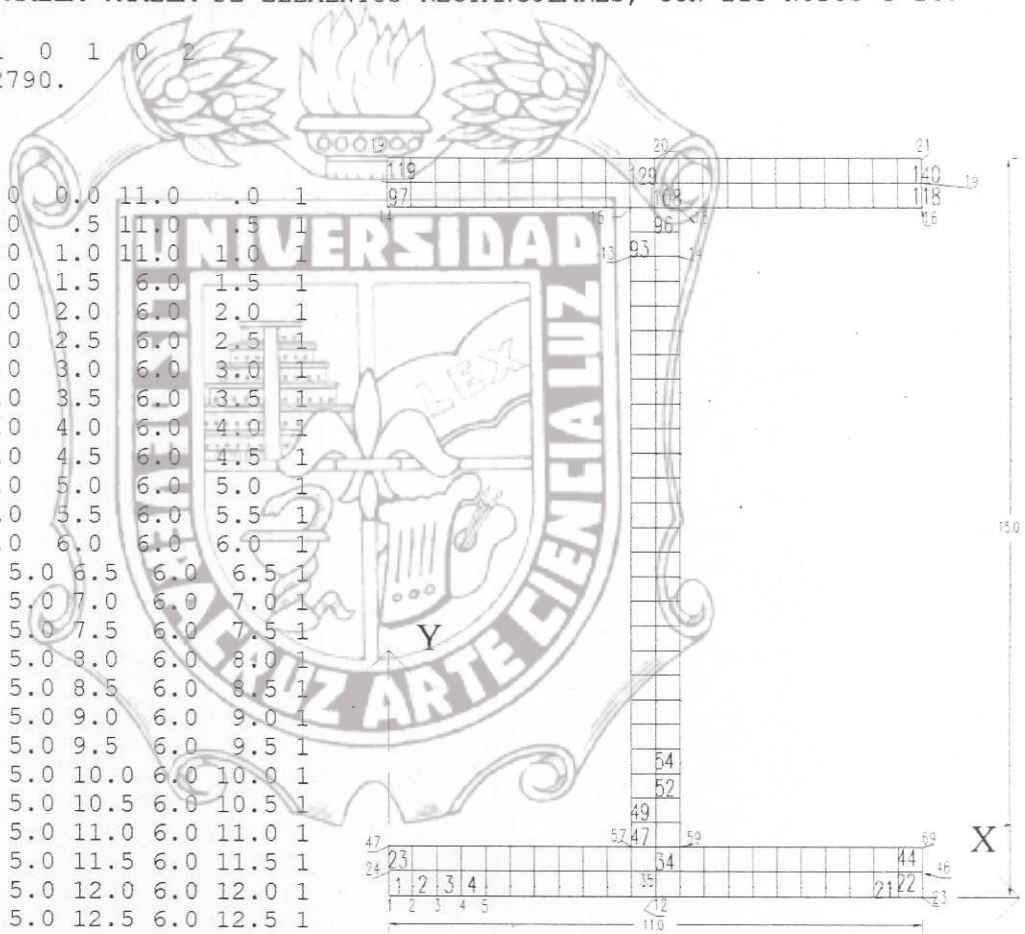


Fig. 5.3.6.1) Malla de problema 61SI.

0  
 1 0. 2 0. 3 0. 4 0. 5 0. 6 0. 7 0. 8 0. 9 0. 10 0. 11 0. 12 0. 13 0.  
 14 0. 15 0. 16 0. 17 0. 18 0. 19 0. 20 0. 21 0. 22 0. 23 0. 24 0. 46 0.  
 47 0. 48 0. 49 0. 50 0. 51 0. 52 0. 53 0. 54 0. 55 0. 56 0. 57 0. 59 0.  
 60 0. 61 0. 62 0. 63 0. 64 0. 65 0. 66 0. 67 0. 68 0. 69 0. 70 0. 72 0.  
 73 0. 75 0. 76 0. 78 0. 79 0. 81 0. 82 0. 84 0. 85 0. 87 0.88 0. 90 0.  
 91 0. 93 0. 94 0. 96 0. 97 0. 99 0. 100 0. 102 0. 103 0. 105 0. 106 0.  
 108 0. 109 0. 111 0. 112 0. 114 0. 115 0. 117 0. 118 0. 120 0. 121 0.  
 123 0. 124 0. 126 0. 127 0. 129 0. 130 0. 132 0. 133 0. 135 0. 136 0.  
 138 0. 139 0. 141 0. 142 0. 144 0. 145 0. 146 0. 147 0. 148 0. 149 0.  
 150 0. 151 0. 152 0. 153 0. 154 0. 155 0. 157 0. 158 0. 159 0. 160 0.  
 161 0. 162 0. 163 0. 164 0. 165 0. 166 0. 167 0. 168 0. 190 0. 191 0.  
 192 0. 193 0. 194 0. 195 0. 196 0. 197 0. 198 0. 199 0. 200 0. 201 0.  
 202 0. 203 0. 204 0. 205 0. 206 0. 207 0. 208 0. 209 0. 210 0. 211 0.  
 212 0. 213 0.  
 0  
 0

### RESUMEN DE RESULTADOS, SEXTO EJEMPLO, MALLA 1:

COORDENADAS NODALES

NODO	X	Y
11	.50000E+01	.00000E+00
12	.55000E+01	.00000E+00
13	.60000E+01	.00000E+00
33	.45000E+01	.50000E+00
34	.50000E+01	.50000E+00
35	.55000E+01	.50000E+00
56	.45000E+01	.10000E+01
57	.50000E+01	.10000E+01
58	.55000E+01	.10000E+01
100	.50000E+01	.65000E+01
178	.50000E+01	.14500E+02
179	.55000E+01	.14500E+02
180	.60000E+01	.14500E+02
201	.50000E+01	.15000E+02
202	.55000E+01	.15000E+02
203	.60000E+01	.15000E+02

#### DATOS DE LOS ELEMENTOS

NEL	NMTL	NÚMERO NODO
11	1	11 12 35 34
12	1	12 13 36 35
33	1	34 35 58 57
129	1	178 179 202 201
130	1	179 180 203 202

EL ANCHO DE BANDA ES 25 EN EL ELEMENTO 1

VALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI

11	.00000E+00
12	.00000E+00
56	.00000E+00
57	.00000E+00
201	.00000E+00
202	.00000E+00
203	.00000E+00

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

CANTIDADES CALCULADAS

VALORES NODALES DE PHI					
11	.00000E+00	12	.00000E+00	13	.00000E+00
34	.41727E+03	35	.42392E+03	36	.41727E+03
57	.00000E+00	58	.46430E+03	178	.41727E+03
179	.42392E+03	180	.41727E+03	201	.00000E+00
202	.00000E+00	203	.00000E+00		

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
11	NODO 11	.83454E+03	.00000E+00
	CENTRO	.84119E+03	-.66464E+01
	NODO 35	.84784E+03	-.13293E+02
12	NODO 12	.84784E+03	.00000E+00
	CENTRO	.84119E+03	.66464E+01
	NODO 36	.83454E+03	.13293E+02
33	NODO 34	-.83454E+03	-.13293E+02
	CENTRO	-.37689E+03	-.47094E+03
	NODO 58	.80761E+02	-.92860E+03
129	NODO 178	-.83454E+03	-.13293E+02
	CENTRO	-.84119E+03	-.66464E+01
	NODO 202	-.84784E+03	.00000E+00

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN = .12295E+05

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
33	-.9286E+03	129	.8478E+03	.1229E+05

**ARCHIVO DE DATOS, SEXTO EJEMPLO, MALLA 2:**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN (62SI DAT) SECCIÓN I (1/4 DE ÁREA)  
 DE 15CM DE PERALTE, 11CM DE PATÍN Y 1CM DE ESPESOR, GENERANDO MALLA .  
 MALLA DE ELEMENTOS RECTANGULARES, CON 193 NUDOS Y 140 ELEMENTOS.

193	140	1	0	1	0	2
1.	1.	0.	2790.			
1	4					
140	193					
31						
1	23	1	0.0	0.0	5.5	.0 5.5
24	46	1	0.0	.25	5.5	.25 4.5
47	69	1	0.0	.5	5.5	.5 3.5
70	92	1	0.0	.75	5.5	.75 2.5
93	115	1	0.0	1.00	5.5	1.0 1
116	118	1	0.0	1.25	.5	1.25 1
119	121	1	0.0	1.5	.5	1.5 1
122	124	1	0.0	1.75	.5	1.75 1
125	127	1	0.0	2.0	.5	2.0 1
128	130	1	0.0	2.25	.5	2.25 1
131	133	1	0.0	2.5	.5	2.5 1
134	136	1	0.0	2.75	.5	2.75 1
137	139	1	0.0	3.0	.5	3.0 1
140	142	1	0.0	3.25	.5	3.25 1
143	145	1	0.0	3.5	.5	3.5 1
146	148	1	0.0	3.75	.5	3.75 1
149	151	1	0.0	4.0	.5	4.0 1
152	154	1	0.0	4.25	.5	4.25 1
155	157	1	0.0	4.5	.5	4.5 1
158	160	1	0.0	4.75	.5	4.75 1

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

161	163	1	0.0	5.0	.5	5.0	1						
164	166	1	0.0	5.25	.5	5.25	1						
167	169	1	0.0	5.5	.5	5.5	1						
170	172	1	0.0	5.75	.5	5.75	1						
173	175	1	0.0	6.0	.5	6.0	1						
176	178	1	0.0	6.25	.5	6.25	1						
179	181	1	0.0	6.5	.5	6.5	1						
182	184	1	0.0	6.75	.5	6.75	1						
185	187	1	0.0	7.0	.5	7.0	1						
188	190	1	0.0	7.25	.5	7.25	1						
191	193	1	0.0	7.5	.5	7.5	1						
8													
1	22	1	1	4	1	2	25	24					
23	44	1	1	4	24	25	48	47					
45	66	1	1	4	47	48	71	70					
67	88	1	1	4	70	71	94	93					
89	89	0	0	4	93	94	117	116					
90	90	0	0	4	94	95	118	117					
91	139	2	3	4	116	117	120	119					
92	140	2	3	4	117	118	121	120					
0													
1	0.	2	0.	3	0.	4	0.	5	0.	6	0.	7	0.
8	0.	9	0.	10	0.	11	0.	12	0.	13	0.		
14	0.	15	0.	16	0.	17	0.	18	0.	19	0.		
20	0.	21	0.	22	0.	23	0.	46	0.	69	0.		
92	0.	95	0.	96	0.	97	0.	98	0.	99	0.		
100	0.	101	0.	102	0.	103	0.	104	0.				
105	0.	106	0.	107	0.	108	0.	109	0.				
110	0.	111	0.	112	0.	113	0.	114	0.				
115	0.	118	0.	121	0.	124	0.	127	0.				
130	0.	133	0.	136	0.	139	0.	142	0.				
145	0.	148	0.	151	0.	154	0.	157	0.				
160	0.	163	0.	166	0.	169	0.	172	0.				
175	0.	178	0.	181	0.	184	0.	187	0.				
190	0.	193	0.										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

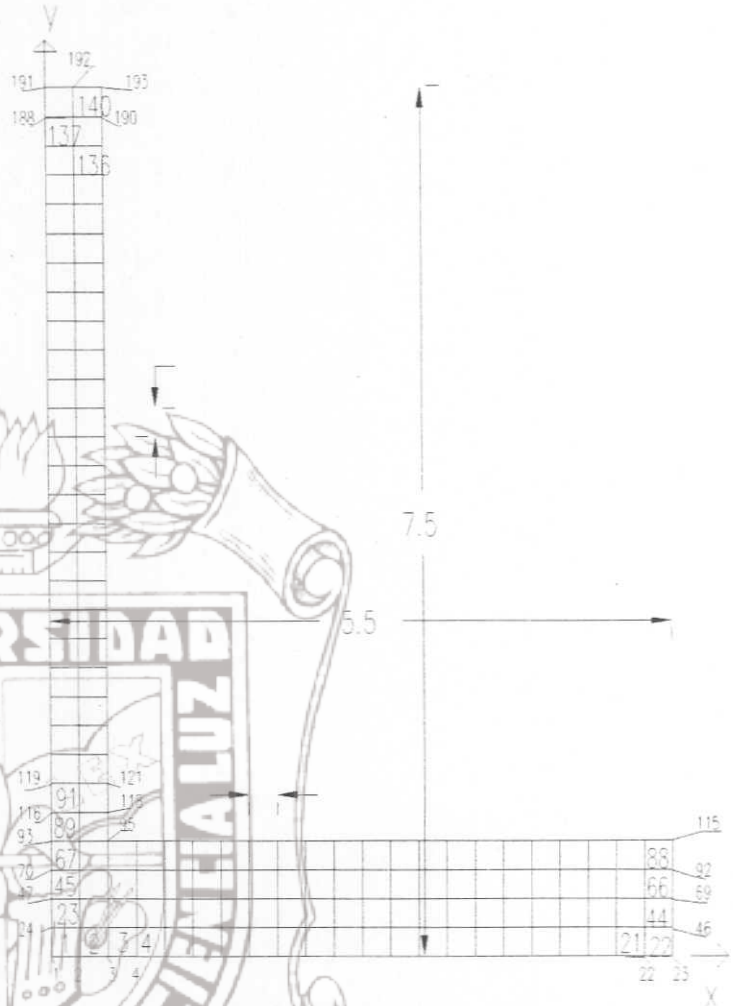


Fig. 5.3.6.2) Malla de problema 62SI.

**RESUMEN DE DATOS, SEXTO EJEMPLO, MALLA 2 :**

SOLUCIÓN A PROB. DE TORSIÓN (62SI.DAT) .SECCIÓN I (1/4 DE ÁREA)  
 DE 15CM DE PERALTE , 11CM DE PATÍN Y 1CM DE ESPESOR, GENERANDO MALLA .  
 MALLA DE ELEMENTOS RECTANGULARES, CON 193 NUDOS Y 140 ELEMENTOS.

NP = 193  
 NE = 140  
 ITYP = 1  
 IPLVL = 0  
 MESH = 2

COEFICIENTES DE ECUACIONES	MATERIAL			
SET	DX	DY	P	Q
1	.10000E+01	.10000E+01	.00000E+00	.27900E+04

**COORDENADAS NODALES**

NODO	X	Y
1	.00000E+00	.00000E+00
2	.42308E+00	.00000E+00
24	.00000E+00	.25000E+00
25	.40909E+00	.25000E+00
71	.35714E+00	.75000E+00
72	.70408E+00	.75000E+00

94	.25000E+00	.10000E+01
95	.50000E+00	.10000E+01
117	.25000E+00	.12500E+01
118	.50000E+00	.12500E+01

**DATOS DE LOS ELEMENTOS**

NEL	NMTL	NÚMERO NODO			
1	1	1	2	25	24
68	1	71	72	95	94
90	1	94	95	118	117

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	NODO 1	.13850E+04	.00000E+00
	CENTRO	.13552E+04	.17616E+02
	NODO 25	.13254E+04	.35232E+02
68	NODO 71	-.22967E+03	.44578E+03
	CENTRO	-.85435E+03	.89592E+03
	NODO 95	-.14790E+04	.13461E+04
90	NODO 94	.51416E+03	.18680E+04
	CENTRO	-.25708E+03	.16109E+04
	NODO 118	.00000E+00	.13538E+04

VOL. BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN= .40062E+04

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
90	.1868E+04	68	-.1479E+04	.4006E+04

Los valores teóricos son obtenidos usando las ecuaciones de la sección (2.10). El valor que se ocupa del módulo de elasticidad al cortante ( $G=8 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) será para un material de acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón y el ángulo de torsión por unidad de longitud ( $\theta = .01^\circ/\text{cm} = .00017453 \text{ rad/cm}$ ). De lo anterior se tiene que:

$$M_t = \frac{G\theta(2t^3b + c^3h)}{3} = \frac{1396(35)}{3} = 16,286.667,$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3 M_t(t)}{(2t^3b + c^3h)} = 1396$$

**Valores resultantes de la primera corrida con 61SL.DAT:**

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
33	-.9286E+03	129	-.8478E+03	.1229E+05

**Valores resultantes de la segunda corrida con 62SL.DAT:**

ELEMENTO	TAU (ZY) MAX	ELEMENTO	TAU (ZX) MAX	VOL (PHI)
90	.1868E+04	68	-.1479E+04	(.4006E+04)*4= 16024

Los resultados de las corridas del programa indican que los valores máximos de esfuerzos se encuentran en la unión entre alma y patín, estos valores aunque máximos, no se tomarán en cuenta en la comparación final, pues los valores máximos teóricos se calcularon para un máximo esperado en la mitad del patín sin tomar en consideración la concentración de esfuerzos en la unión patín-alma.

Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana

Los valores encontrados serán:

**Valores resultantes de la primera corrida con 61SI.DAT:**

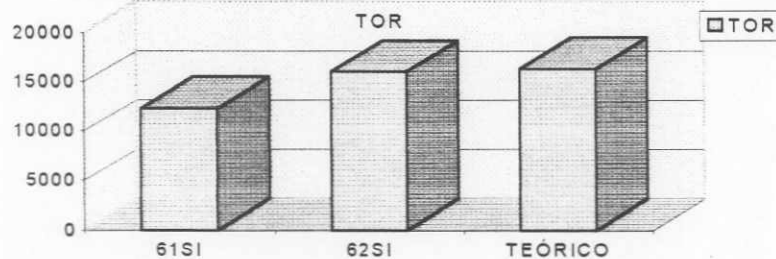
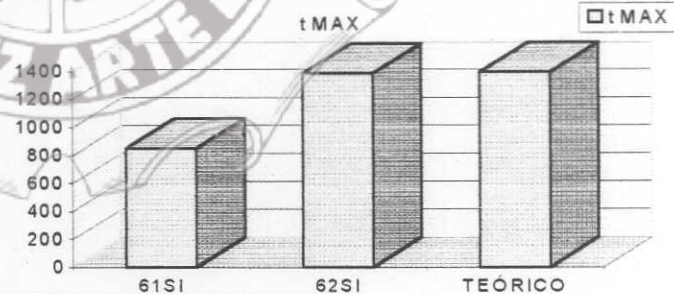
ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
11	NODO 11	.83454E+03	.00000E+00
	CENTRO	.84119E+03	-.66464E+01
	NODO 35	<b>.84784E+03</b>	-.13293E+02
12	NODO 12	<b>.84784E+03</b>	.00000E+00
	CENTRO	.84119E+03	.66464E+01
	NODO 36	.83454E+03	.13293E+02
129	NODO 178	-.83454E+03	-.13293E+02
	CENTRO	-.84119E+03	-.66465E+01
	NODO 202	<b>-.84784E+03</b>	.00000E+00
130	NODO 179	<b>-.84784E+03</b>	.13293E+02
	CENTRO	-.84119E+03	.66465E+01
	NODO 203	-.83454E+03	.00000E+00

**Valores resultantes de la segunda corrida con 62SI.DAT:**

ELEMENTO	POSICIÓN	TAU (ZX)	TAU (ZY)
1	NODO 1	<b>.13850E+04</b>	.00000E+00
	CENTRO	.13552E+04	.17616E+02
	NODO 25	.13254E+04	.35232E+02

**RESULTADOS SECCIÓN 5.3.6.  
SECCIÓN RECTANGULAR ESTRECHA.**

PROB.	t MAX	TOR
61SI	848	12290
62SI	1385	16024
TEÓRICO	1396	16287



Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana



**CONCLUSIONES :**

En el presente trabajo se presentó el problema de torsión y su efecto en barras de diferentes tipos de secciones, el problema se expuso desde sus fundamentos hasta su tratamiento por el método de elemento finito, estos principios sirvieron para elaborar un programa de computadora, con el que se resolvieron las secciones más comunes; para cada una de éstas se elaboraron dos o tres mallas, cada una con diferente número de elementos y de nodos, obteniendo resultados aproximados que muestran como el método converge a la solución teórica, el método de elemento finito por su naturaleza ofrece la ventaja de mostrar un panorama general del problema, al dar resultados en los nodos de una malla que abarca toda la sección, con esto podemos apreciar como varían los esfuerzos en toda la sección.

Se comprobó que los esfuerzos máximos son detectados con precisión por el programa, como un ejemplo, en la sección "I" (sección 5.3.6), se localizaron las concentraciones de esfuerzo en la unión alma-patin, en general en todas las secciones sometidas a torsión los esfuerzos máximos coincidieron con los teóricos, una ventaja más de la solución por elemento finito.

La exactitud de los resultados, tanto de los esfuerzos, como del momento torsionante, dependen de muchos factores, pero se ha detectado que son factores importantes el número de elementos, el tipo de elementos, su distribución y el número de nodos. Por ejemplo en el problema de torsión en una sección rectangular (sección 5.3.1), la primera malla que se utilizó es de tres elementos, dos triangulares y uno rectangular, la segunda malla es de 55 elementos, 10 triangulares y 45 rectangulares, la tercera malla es de 400 elementos, todos triangulares, en la primera malla tenemos un error aproximado del 32% en el esfuerzo y 12% en el momento torsionante, en la segunda malla tenemos un error aproximado del 7% en el esfuerzo y 1% en el momento torsionante, con lo que se comprueba que con más elementos tenemos mejor aproximación, en la tercera malla encontramos un error aproximado del 0.69% en el esfuerzo y 0.23% en el momento torsionante, con lo que los valores son casi los teóricos, esto se consiguió, ocupando mas elementos, pero lo verdaderamente importante es la distribución de los elementos; distribuyéndolos de tal manera que elementos mas pequeños estén en la parte de la sección donde se necesitaba mayor exactitud, encontramos mejores resultados, con lo que concluimos que donde se necesita conocer con mas exactitud los valores que arroja el programa, se necesita poner énfasis en la distribución de los elementos, ocupando para esa zona menor distancia entre los nodos, lo que nos da elementos mas pequeños, resultando valores mas exactos.

También se observó que si aumentamos el número de elementos a una malla la cual ha dado resultados aceptables, por ejemplo la segunda malla del problema en la sección rectangular, la aproximación se incrementa poco, contrariamente con el trabajo de preparación de datos para el programa, por lo que se concluye que el número de elementos debe de ser suficiente y se debe buscar una distribución adecuada, lo que nos dará la mejor aproximación.

En las secciones circulares, como la circular y la elíptica, se consiguió una aproximación muy buena, con sólo dos mallas para cada sección, con un número no muy grande de elementos y sin una distribución especial; contrariamente con los problemas rectangulares, donde se ocuparon, en general 3 mallas y la exactitud buscada sólo se consiguió con un número grande de elementos y buscando una distribución adecuada, esto señala el problema de alabeo que sufren las secciones rectangulares, por lo que se tiene que poner mayor énfasis en sus mallas, si se desean resultados con buena aproximación.

También se observó que una malla preferentemente burda, nos da buenos resultados si solamente nos interesan los valores nodales, en cambio si estamos interesados en cantidades relacionadas con las derivadas, necesitamos una malla fina de elementos lineales o varios elementos cuadráticos. Los elementos cuadráticos son elementos con niveles más altos de interpolación y mayor número de nodos, se ha encontrado en otros trabajos que elementos con mayor número de nodos dan una mejor aproximación, por lo que un problema con elementos de los llamados cuadráticos dará un mejor resultado con pocos elementos, representando menos trabajo de preparación de datos. En éste trabajo se ocuparon elementos lineales y bilineales, por su simpleza, pero una futura mejora del programa, sería incorporar elementos cuadráticos, con lo que se mejorará la exactitud de los resultados, ocupando menor número de elementos.

**APÉNDICE A.****DATOS DE ENTRADA PARA PROGRAMA "TOR.EXE":****A).- TÍTULO :**

Tres renglones de datos que describan el problema por resolver.

**B).- PARÁMETROS :**

- 1)- NP = Número de ecuaciones (número de nodos).
- 2)- NE = Número de elementos.
- 3)- NCOEF = Número de juegos de ecuaciones coeficientes 5 máximo.
- 4)- NDBC = Número de elemento con lados con condiciones de frontera.
- 5)- ITYP = Tipo de problema : 1)- torsión
- 6)- IPLVL = Impresión de matriz de rigidez y vector de carga para cada elemento.  
1) si 0) no.
- 7)- MESH = Tipo de Generación de malla .
  - 0).- No se desea generación de malla.
    - 1).- Generación ortogonal en X y en Y, elementos simples ortogonales.
    - 2).- Generación en líneas de nodos y elementos para malla mas complicados.

**C).- COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES :**

(EL NÚMERO DE JUEGOS DEBE SER = NCOEF).

- DX(I) = Propiedad del material en la dirección X.  
 DY(I) = Propiedad del material en la dirección Y.  
 P(I) = Coeficiente que multiplica a PHI en la ecuación diferencial.  
 Q(I) = Coeficiente constante en la ecuación diferencial.

**D).- COORDENADAS DE LOS NODOS GENERACIÓN DE MALLA.**

(SI MESH=0):

**01).- COORDENADAS DEL ELEMENTO:**

- DA).- Coordenadas en X de los nodos = XC().  
 DB).- Coordenadas en Y de los nodos = YC().

**02).- DATOS DEL ELEMENTO:**

- N = Número de elemento.  
 NMLT(N) = Entero que especifica el juego de ecuaciones.  
 NEL(N,1) = Número que corresponde al nodo I para este elemento.  
 NEL(N,2) = Número que corresponde al nodo J para este elemento.  
 NEL(N,3) = Número que corresponde al nodo K para este elemento.  
 NEL(N,4) = Número que corresponde al nodo M para este elemento.  
 (para el elemento rectangular NEL(N,4)=0).

(SI MESH = 1 0 SI MESH = 2.)

- IELTYP = Tipo de elemento.  
 0 = Triangulares.  
 1 = Rectangulares.

NPE = Nodos por elemento.

(SI MESH = 1)

- NX = Número de elementos en X.  
 NY = Número de elementos en Y.  
 X0,DX(I) = Coordenada global del primer nodo en X, y la longitud de espaciamiento de los elementos.  
 Y0,DY(I) = Coordenada global del primer nodo en Y, y la longitud de espaciamiento de los elementos en Y.

**(SI MESH = 2)**

NE = Número de elemento.  
 NP = Número de nodos.

NRECL = Número de líneas de nodos en la malla (respecto al eje X).

NOD1 = Primer nodo en la línea.

NODL = Último nodo en la línea.

NODINC = Incremento constante en el número de nodo en la línea .

X1 = Coordenada global X de NOD1.

Y1 = Coordenada global Y de NOD1.

XL = Coordenada global X de NODL.

YL = Coordenada global Y de NODL.

RATIO = La relación del primer elemento para el último elemento .

NRECEL = Número de líneas de elementos por ser leídos en la malla .

NEL1 = Primer elemento en la línea .

NELL = Último elemento en la línea.

IELINC = Incremento constante en el número de elemento en la línea .

NODINC = Incremento constante en el numero de nodo en la línea .

NPE = Número de nodos en cada elementos .

NODE(I) = Arreglo de conectividad del primer elemento en el renglón.

Para elementos especiales que no sigue ninguna relación con las líneas de nodos y elementos, se puede meter uno por uno de estos elementos especiales.

**E).- CONDICIONES DE FRONTERA.**

(EL NÚMERO DE VALORES DEBE SER=NDBC).

IDBC(I,1) - Número de elemento con condiciones de frontera.

IDBC(I,2) - Lado del elemento con condiciones de frontera.

DBC(I,1) - (coeficiente m)\*(longitud del lado).

DBC(I,2) - (coeficiente s)\*(longitud del lado).

**F) .- SUBROUTINA MODIFY.**

ENTRADA PARA VALORES NODALES DE FUERZA .

PARA PROBLEMAS DE CAMPO:

IB - Número de nodo.

BV -Valor.

PARA PROBLEMAS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS:

IB - Grados de libertad de la fuerza.

BV -Valor de la fuerza.

La entrada tanto de IB como BV es terminada cuando se encuentra un valor cero 0 para IB.

ENTRADA PARA VALORES NODALES PRESCRITOS .

PARA PROBLEMAS DE CAMPO:

IB - Número de nodo.

BV -Valores conocidos de  $\phi$  (phi).

PARA PROBLEMAS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS:

IB -Grados de libertad de los desplazamientos conocidos.

BV -El valor del desplazamiento.

La entrada tanto de IB como BV es terminada cuando se encuentra un valor cero 0 para IB.

APÉNDICE B.LISTADO EN FORTRAN DE PROGRAMA "TOR.EXE":

```

$DEBUG
INCLUDE 'FGRAPH.FI'
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'FGRAPH.FD'
PARAMETER (NRMAX=500, NCMAX=500, MAXELM=500, MAXNOD=700, MAXSPV=500
*   MAXSSV=100, MAXCNV=100, MAXNX=100, MAXNY=100)
COMMON/ELMATX/ESM(4,4),EF(4),X(4),Y(4),KL
COMMON/MATL/DXE,DYE,PE,QE
COMMON/HCV/IDBC(50,2),DBC(50,2),NDBC
COMMON/AV/A(19850),JGF,JGSM,NP,NBW
COMMON/TLE/TITLE(20)
COMMON/IPO/IN,IO
DIMENSION GLXY(MAXNOD,2),PX(MAXNX),PY(MAXNY)
DIMENSION NEL(MAXELM,9),NMTL(MAXELM),XC(MAXNOD),YC(MAXNOD)
DIMENSION NS(4),PHI(4),GDX(4),GDY(4)
DIMENSION DX(5),DY(5),P(5),Q(5),GRDC(5,2)
DIMENSION B(3),C(3),ICK(MAXELM),TITLE1(20),TITLE2(20),TITLE3(20)
DATA GRDC/-1.,-1.,1.,-1.,-1.,1.,1.,1.,-1.,-1./
DATA IN/60/,IO/61/,KT/62/,IFE/0/,VOL/0./
WRITE(*,*)'60=datos.(.DAT)/ 61=resul.(.RES)/ 62=grafica(.SCR)'
OPEN(IN,FILE='')
OPEN(IO,FILE='')
OPEN(KT,FILE='')
READ(IN,3) TITLE1
READ(IN,3) TITLE2
READ(IN,3) TITLE3
READ(IN,3) TITLE
READ(IN,*) NP,NE,NCOEF,NDBC,ITYP,IPLVL,MESH
WRITE(IO,5) TITLE1
WRITE(IO,5) TITLE2
WRITE(IO,5) TITLE3
IF(NE.GT.10) IPLVL=0
IF(IPLVL.GT.1) IPLVL=0

C
C C   COMPARACIÓN DE NP,NE,NDBC Y ITPY CON LOS VALORES EN
C C   LAS DIMENSIONES DE LAS SENTENCIAS.
C
C   ISTOP=0
C
C C   COMPARACIÓN DE NP
C C
C   IF(NP.LE.700) GO TO 600
WRITE(IO,10)
ISTOP=1

C
C C   COMPARACIÓN DE NE
C C
C   600 IF(NE.LE.500) GO TO 601
WRITE(IO,2)
WRITE(*,2)
ISTOP=1

C
C C   COMPARACIÓN DE NDBC
C C
C   601 IF(NDBC.LE.50) GO TO 602
WRITE(IO,47)
WRITE(*,47)
ISTOP=1

```

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

```

C
C
C   COMPARACIÓN DE ITYP
602 IF(ITYP.LE.5) GO TO 603
    WRITE(IO,101)
    ISTOP=1
C
C
C   COMPARACIÓN DE NCOEF
603 IF(NCOEF.LE.5) GO TO 109
    WRITE(IO,604)
    WRITE(*,604)
    ISTOP=1
109 IF(ISTOP.EQ.1) STOP
C
C
C   LECTURA DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES Y DE
C   LAS COORDENADAS MODALES Y DATOS MODALES DEL ELEMENTO
C   SI NO SE PIDE GENERACIÓN DE MALLA MESH=0
C
C   READ(IN,*) (DX(I),DY(I),P(I),Q(I),I=1,NCOEF)
C
C   LECTURA DE DATOS PARA LA GENERACIÓN DE MALLAS
C
C   IF(MESH.NE.0) THEN
C     READ(IN,*) IELTYP,NPE
C
C     IF(NPE.LE.4) THEN
C       IEL=1
C     ELSE
C       IEL=2
C     ENDIF
C   ENDIF
C
C   IF(MESH.NE.1) THEN
C     IF(MESH.EQ.0) THEN
C
C     LA MALLA NO PUEDE SER GENERADA POR EL PROGRAMA, LEE LOS DATOS
C     DE LA MALLA EN LAS SIGUIENTES SENTENCIAS
C
C     READ(IN,*) (XC(I),I=1,NP)
C     READ(IN,*) (YC(I),I=1,NP)
C     NID=0
C     DO 9 KK=1,NE
C     READ(IN,*) N,NMTL(KK),(NEL(N,I),I=1,4)
C     IF((N-1).NE.NID) THEN
C     WRITE(IO,17) N
C     WRITE(*,17) N
C     ENDIF
C   9  NID=N
C     ELSE
C
C     CUANDO LA MALLA SE GENERA PARA PROBLEMAS CON GEOMETRÍAS
C     MAS COMPLICADAS LLAMAR MSH2DGENERAL (EL CUAL LEE LOS DATOS PERTINENTES)
C
C     CALL MSH2DG(NEM,NNM,NEL,MAXELM,MAXNOD,GLXY)
C     ENDIF
C   ELSE
C
C     CUANDO LA MALLA ES GENERADA PARA DOMINIOS RECTANGULARES LLAMA A LA
C     SUBROUTINA MSH2DRECTANGULAR EL CUAL REQUIERE LOS SIGUIENTES DATOS
C
C     CALL MSH2DR(IEI,IELTYP,NX,NY,NPE,NNM,NEM,NEL,PX,PY,X0,Y0,
C     *          GLXY,MAXELM,MAXNOD,MAXNX,MAXNY)
C     ENDIF

```

```

IF (MESH.NE.0) THEN
NP=NNM
NE=NEM
DO 201 I=1,NP
XC(I)=GLXY(I,1)
201 YC(I)=GLXY(I,2)
DO 202 I=1,NE
202 NMTL(I)=1
ENDIF

C
C
C SALIDA DE TÍTULO Y PARÁMETROS.
C
C WRITE(IO,4) TITLE, NP, NE, ITYP, IPLVL, MESH
C
C SALIDA DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES.
C
C WRITE(IO,48)
C WRITE(IO,16) I, DX(I), DY(I), P(I), Q(I), I=1, NCOEF)
C
C SALIDA DE LAS COORDENADAS NODALES
C
C WRITE(IO,11)
C WRITE(IO,12) (I, XC(I), YC(I), I=1, NP)
C WRITE(,12) (I, XC(I), YC(I), I=1, NP)
C
C SALIDA DE LOS DATOS NODALES DEL ELEMENTO.
C
C WRITE(IO,8) TITLE
C DO 19 N=1, NE
C IF (NEL(N,4).EQ.0) WRITE(IO,7) N, NMTL(N), (NEL(N,I), I=1,3)
19 IF (NEL(N,4).NE.0) WRITE(IO,7) N, NMTL(N), (NEL(N,I), I=1,4)
C
C LLAMA A LA SUBROUTINA DE GRAFICACIÓN ANTES DE REVISAR VALORES,
C Y HACER CUALQUIER OTRO CÁLCULO, MAS QUE EL DE GENERACIÓN DE MALLA.
C
C CALL GRAFICA NEL, XC, YC, NP, NE, MAXELM, MAXNOD)
C
C LECTURA Y ESCRITURA DE LOS DATOS SOBRE CONDICIONES DE FRONTERA.
C
C IF (NDBC.EQ.0) GO TO 72
C WRITE(IO,49)
C DO 45 I=1, NDBC
C READ(IN,*) IDBC(I,1), IDBC(I,2), DBC(I,1), DBC(I,2)
45 WRITE(IO,71) IDBC(I,1), IDBC(I,2), DBC(I,1), DBC(I,2)
C
C ANÁLISIS DEL NÚMERO DE NODOS.
C
C INICIALIZACIÓN DE UN VECTOR DE COMPARACIÓN.
C
C 72 DO 500 I=1, NP
C 500 ICK(I)=0
C
C COMPARACIÓN PARA VER SI ALGÚN NODO EXCEDE EL NÚMERO NP.
C
C DO 501 I=1, NE
C KL=4
C IF (NEL(I,4).EQ.0) KL=3
C DO 502 J=1, KL
C K=NEL(I,J)
C ICK(K)=1
C 502 IF (K.GT.NP) WRITE(IO,503) J, I, NP
C 501 CONTINUE

```

```

C
C
C   COMPARACIÓN PARA VER SI LOS NÚMEROS DE NODOS HASTA NP ESTAN INCLUIDOS
C
C   DO 505 I=1, NP
C   IF (ICK(I).EQ.0) THEN
C   WRITE (IO, 506) I
C   WRITE (*, 506) I
505  ENDIF
C
C   CREACIÓN E INICIALIZACIÓN DEL VECTOR A .
C
C   CÁLCULO DEL ANCHO DE BANDA.
C
C   INBW=0
C   NBW=0
C   DO 20 KK=1, NE
C   KL=4
C   IF (NEL(KK, 4).EQ.0) KL=3
25  DO 25 I=1, KL
C   NS(I)=NEL(KK, I)
C   LK=KL-1
C   DO 21 I=1, LK
C   IJ=I+1
C   DO 21 J=IJ, KL
C   NB=IABS(NS(I)-NS(J))
C   IF (NB.EQ.0) THEN
C   WRITE (IO, 26) KK
C   WRITE (*, 26) KK
C   ENDIF
C   IF (NB.LE.NBW) GO TO 21
C   INBW=KK
C   NBW=NB
21  CONTINUE
20  CONTINUE
C   NBW=NBW+1
C   WRITE (IO, 27) NBW, INBW
C
C   CÁLCULO DE INDICADORES E INICIALIZACIÓN DEL VECTOR COLUMN A ( ).
C
C   JGF=NP
C   JGSM=JGF+NP
C   JEND=JGSM+NP*NBW
C   write(*,*) 'JEND=', JEND
C   IF (JEND.GT.19850) GO TO 22
C   DO 24 I=1, JEND
24  A(I)=0.0
C   GO TO 30
22  WRITE (IO, 23)
C   WRITE (*, 23)
C   GOTO 1000
C
C   GENERACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES .
C
C   DO 30 KK=1, NE
C   KL=4
C   IF (NEL(KK, 4).EQ.0) KL=3
C
C   RECUPERACIÓN DE LAS COORDENADAS Y NÚMERO DE LOS NODOS.
C
C   DO 31 I=1, KL
C   NS(I)=NEL(KK, I)
C   J=NS(I)
C   X(I)=XC(J)
31  Y(I)=YC(J)

```



C  
C  
C

COEFICIENTES DE LOS ELEMENTOS.

```

II=NMTL(KK)
DXE=DX(II)
DYE=DY(II)
PE=P(II)
QE=Q(II)

```

C  
C  
C

CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO Y VECTOR DE FUERZA.

CALL ELSTMF(KK,IPLVL)

C  
C  
C

PROCEDIMIENTO DIRECTO DE RIGIDEZ.

```

DO33I=1,KL
II=NS(I)
A(JGF+II)=A(JGF+II)+EF(I)
DO34J=1,KL
JJ=NS(J)+1-II
IF(JJ.LE.0) GO TO 34
J1=JGSM+(JJ-1)*NP+II-(JJ-1)*(JJ-2)/2
A(J1)=A(J1)+ESM(I,J)
34 CONTINUE
33 CONTINUE
32 CONTINUE

```

C  
C  
C  
C

MODIFICACIÓN Y SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y SALIDA DE LOS VALORES NODALES CALCULADOS.

```

WRITE(IO,62) TITLE
CALL MODIFY(IFE)
CALL DCMFBD
CALL SLVBD

```

C  
C  
C

SALIDA DE LOS VALORES CALCULADOS.

```

WRITE(IO,65)
WRITE(IO,66) (I,A(I),I=1,NP)

```

C  
C  
C

EVALUACIÓN DEL VOLUMEN BAJO LA PHI SUPERFICIE Y LOS GRADIENTES DE LOS ELEMENTOS

C  
C  
C

COMENZANDO EL CICLO EN LOS ELEMENTOS.

```

ILINE=0
DO83KK=1,NE
IF(ILINE.GT.0) GO TO 110

```

C  
C  
C

SALIDA DE LOS ENCABEZADOS DE GRADIENTE.

```

WRITE(IO,43) TITLE
IF(ITYP.EQ.1) WRITE(IO,44)
IF(ITYP.NE.1.AND.ITYP.NE.5) WRITE(IO,147)
IF(ITYP.EQ.5) WRITE(IO,146)

```

C  
C  
C

INCREMENTO DE LA LÍNEA DE CONTEO.

```

110 KL=4
IF(NEL(KK,4).EQ.0) KL=3
IF(KL.EQ.4) ILINE=ILINE+4
IF(KL.EQ.3) ILINE=ILINE+2
IF(ILINE.GT.50) ILINE=0

```

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

C  
C  
C  
C

RECUPERACIÓN DE LAS COORDENADAS NODALES ,EL NÚMERO DE NODO  
Y LOS VALORES NODALES DE PHI

SP=0.0  
DO40I=1, KL  
NS (I)=NEL (KK, I)  
J=NS (I)  
X (I)=XC (J)  
Y (I)=YC (J)  
PHI (I)=A (J)  
40 SP=SP+PHI (I)

C  
C  
C

COEFICIENTES DE LOS ELEMENTOS PARA LOS VALORES GRADIENTES.

II=NMTL (KK)  
DXE=DX (II)  
DYE=DY (II)

C  
C  
C

EVALUACIÓN DEL GRADIENTE DE LOS ELEMENTOS.

IF (KL.EQ.4) GO TO 51

C  
C  
C

ELEMENTO TRIANGULAR.

B (1)=Y (2)-Y (3)  
B (2)=Y (3)-Y (1)  
B (3)=Y (1)-Y (2)  
C (1)=X (3)-X (2)  
C (2)=X (1)-X (3)  
C (3)=X (2)-X (1)  
AR2=X (2)\*Y (3)+X (3)\*Y (1)+X (1)\*Y (2)-X (2)\*Y (1)-X (3)\*Y (2)-X (1)\*Y (3)  
GRADX=(B (1)\*PHI (1)+B (2)\*PHI (2)+B (3)\*PHI (3))/AR2  
GRADY=(C (1)\*PHI (1)+C (2)\*PHI (2)+C (3)\*PHI (3))/AR2

C  
C  
C

GRADX=DXE\*GRADX\*GRDC (ITYP, 1)  
GRADY=DYE\*GRADY\*GRDC (ITYP, 2)

SALIDA PARA TORSIÓN Y FLUJO DE CORRIENTES.

IF (ITYP.LE.2) WRITE (IO, 52) KK, GRADY, GRADX

C  
C  
C

SALIDA PARA EL FLUJO POTENCIAL, SUBTERRANEO Y TRASFERENCIA DE CALOR.

IF (ITYP.GE.3) WRITE (IO, 52) KK, GRADX, GRADY  
IF (ABS (GMX).LT.ABS (GRADX)) THEN  
GMX=GRADX  
KMAX=KK  
ENDIF  
IF (ABS (GMY).LT.ABS (GRADY)) THEN  
GMY=GRADY  
KMAX=KK  
ENDIF

C  
C  
C

CÁLCULO DEL VOLUMEN BAJO LA SUPERFICIE PHI DEL ELEMENTO.

VOL=VOL+SP\*AR2/6.0  
GOTO 83

C  
C  
C

ELEMENTO RECTANGULAR .

```

51 AA=Y(4)-Y(1)
  BB=X(2)-X(1)
  AR=AA*BB
  GDX(1)=(PHI(2)-PHI(1))/BB
  GDX(2)=(-PHI(1)+PHI(2)+PHI(3)-PHI(4))/(2.*BB)
  GDX(3)=(PHI(3)-PHI(4))/BB
  GDY(1)=(PHI(4)-PHI(1))/AA
  GDY(2)=(-PHI(1)-PHI(2)+PHI(3)+PHI(4))/(2.*AA)
  GDY(3)=(PHI(3)-PHI(2))/AA
  DO 82 I=1,3
  GDX(I)=DXE*GDX(I)*GRDC(ITYP,1)
82 GDY(I)=DYE*GDY(I)*GRDC(ITYP,2)

```

```

DO 777 I=1,3
IF (ABS(GMX).LT.ABS(GDX(I))) THEN
GMX=GDX(I)
KMAX=KK
ENDIF
IF (ABS(GMY).LT.ABS(GDY(I))) THEN
GMY=GDY(I)
KMAY=KK
ENDIF

```

```

777 CONTINUE
IF (ITYP.GE.3) GO TO 85

```

C  
C  
C

SALIDA PARA TORSIÓN Y FLUJO DE CORRIENTES.

```

WRITE(IO,53) KK,NS(1),GDY(1),GDX(1)
WRITE(IO,54) GDY(2),GDX(2)
WRITE(IO,55) NS(3),GDY(3),GDX(3)
GOTO 86

```

C  
C  
C

SALIDA PARA FLUJO POTENCIAL, SUBTERRANEO Y TRASFERENCIA DE CALOR.

```

85 WRITE(IO,53) KK,NS(1),GDX(1),GDY(1)
  WRITE(IO,54) GDX(2),GDY(2)
  WRITE(IO,55) NS(3),GDX(3),GDY(3)

```

C  
C  
C

CÁLCULO DEL VOLUMEN BAJO EL ELEMENTO.

```

86 VOL=VOL+SP*AR/4.0
83 CONTINUE

```

C  
C  
C

WRITE(\*,\*) 'KMAX,GMX,KMAY,GM=' ,KMAX,GMX,KMAY,GMY

C  
C  
C

SALIDA DEL VALOR INTEGRAL.

```

VOL=VOL*2
IF (ITYP.EQ.1) WRITE(IO,56) VOL

```

C  
C  
C  
C

SALIDA DE LOS VALORES COORDENADOS, HACIA UN ARCHIVO (.SCR), PARA GRAFICAR EN AutoCad.

```

DO 200 N=1,NE
  WRITE(KT,213)
  DO 100 I=1,4
  KX=NEL(N,I)
  IF (KX.EQ.0) GO TO 100
  IF ((XC(KX).LT.1.).AND.(YC(KX).LT.1.)) THEN
    WRITE(KT,212)XC(KX),YC(KX)
    GO TO 100
  ENDIF

```

```

IF ((XC(KX).GE.10.).AND.(YC(KX).GE.10.)) THEN
  WRITE(KT,218)XC(KX),YC(KX)
  GO TO 100
ENDIF
IF ((XC(KX).GE.1.).AND.(XC(KX).LT.10.)) THEN
  IF ((YC(KX).GE.1.).AND.(YC(KX).LT.10.)) WRITE(KT,215)XC(KX),YC(KX)
  IF (YC(KX).LT.1.) WRITE(KT,216)XC(KX),YC(KX)
  IF (YC(KX).GE.10.) WRITE(KT,222)XC(KX),YC(KX)
GO TO 100
ENDIF
IF ((XC(KX).GE.10.).AND.(YC(KX).LT.1.)) WRITE(KT,219)XC(KX),YC(KX)
IF ((XC(KX).LT.1.).AND.(YC(KX).GE.10.)) WRITE(KT,220)XC(KX),YC(KX)
IF ((YC(KX).GE.1.).AND.(YC(KX).LT.10.)) THEN
  IF (XC(KX).LT.1.) WRITE(KT,217)XC(KX),YC(KX)
  IF (XC(KX).GE.10.) WRITE(KT,221)XC(KX),YC(KX)
GO TO 100
ENDIF
100 CONTINUE
200 WRITE(KT,214)
CONTINUE

C
C
C LLAMADO A LA SUBROUTINA GRAFICA, LA CUAL GRAFICA LOS ELEMENTOS
C DEL PROBLEMA. (LA SUBROUTINA SE PUEDE LLAMAR AL PRINCIPIO O AQUÍ,
C SÓLO QUE AQUÍ, CUALQUIER ERROR INPEDIRÍA VER LA GRÁFICA).
C
C CALL GRAFICA(NEL,XC,YC,NE,NE,KMAX,GMX,KMAY,GMY,VOL,
C ,MAXELM,MAXNOD)
C
C SALIDA EN LA PANTALLA DE DATOS MAXIMOS EN LA MALLA.
C
C WRITE(*,111)
C WRITE(*,112) KMAX,GMX,KMAY,GMY,VOL
C WRITE(IO,111)
C WRITE(IO,112) KMAX,GMX,KMAY,GMY,VOL
C
C
C REGRESA AL MODO NORMAL DE MONITOR
C
1000 CONTINUE
READ(*,*) ! Wait for ENTER key to be pressed
dummy = setvideomode($DEFAULTMODE)

STOP

```

```

2 FORMAT(10X,30HEL No DE ELEMENTOS EXCEDE 500/
* 10X,16HINPUT TERMINA )
3 FORMAT(20A4)
4 FORMAT(1H1//10X,20A4/10X,5HNP = ,I5/10X,5HNE = ,I5
* /10X,8HITYP = ,I2/10X,8HIPLVL = ,I2
* /10X,8HMESH = ,I2)
5 FORMAT(10X,20A4)
7 FORMAT(15X,I3,5X,I3,2X,4I4)
8 FORMAT(1H1///10X,20A4//10X,22HDATOS DE LOS ELEMENTOS/15X,
* 3HNEL,4X,4HNMTL,4X,12H NÚMERO NODO)

10 FORMAT(10X,30HEL NÚMERO DE NODOS EXCEDE 700/
* 10X,16HINPUT TERMINA )

```

```

11  FORMAT (//10X,19HCOORDENADAS NODALES/10X,
*      4HNODO,5X,1HX,14X,1HY)
12  FORMAT (10X,I4,2E15.5)
16  FORMAT (14X,I2,4E15.5)
17  FORMAT (10X,8HELEMENTO,I4,18HNO TIENE SECUENCIA)
23  FORMAT (10X,30HDIMENSION DE UN VECTOR EXCEDE )
26  FORMAT (/10X,8HELEMENTO,I3,18HTENEMOS 2 NODOS /
*      10X,25HCON EL MISMO NÚMERO NODO )
27  FORMAT (//10X,21HEL ANCHO DE BANDA ES ,I4,15H EN EL ELEMENTO,I4)
43  FORMAT (1H1///10X,20A4)
44  FORMAT (//10X,8HELEMENTO,4X,8HPOSICIÓN,7X,7HTAU (ZX),
*      8X,7HTAU (ZY))
47  FORMAT (10X,35HDATOS DE LAS CONDCIONES DE FRONTERA/
*      25HDIMENSIONES EXCEDEN DE 50/10X,
*      15HINPUT TERMINA )
48  FORMAT (//10X,26HCOEFICIENTES DE ECUACIONES/10X,
*      8HMATERIAL,13X,3HSET,8X,2HDX,13X,2HDY,
*      13X,1HP,14X,1HQ)
49  FORMAT (/10X,34HDERIVATIVE BOUNDARY CONDITION DATA /
*      15X,8HELEMENT,4X,4HLADO,7X,2HML,13X,2HSL)
52  FORMAT (/13X,I3,5X,6HCENTRO,2X,2E15.5)
53  FORMAT (/13X,I3,5X,4HNODO ,I4,2E15.5)
54  FORMAT (21X,6HCENTRO,2X,2E15.5)
55  FORMAT (21X,4HNODO ,I4,2E15.5)
56  FORMAT (//10X,30HVOL.BAJO (PHI) PARA LA SECCIÓN=,E15.5 //)
62  FORMAT (1H1//10X,20A4)
65  FORMAT (//10X,21HCANTIDADES CALCULADAS/
*      12X,22HVALORES NODALES DE PHI)
66  FORMAT (12X,I3,E14.5,3X,I3,E14.5,3X,I3,E14.5)
71  FORMAT (15X,I4,9X,I1,2E15.5)
101 FORMAT (10X,14HITYP EXCEDE 5 /10X,
*      15HINPUT TERMINADO)
111 FORMAT (6X,8HELEMENTO,3X,10HTAU (ZY)MAX,4X,8HELEMENTO,3X,
*      10HTAU (ZX)MAX,7X,8HVOL (PHI))
112 FORMAT (6X,I5,5X,E10.4,5X,I5,5X,E10.4,5X,E10.4)
147 FORMAT (//10X,8HELEMENTO,4X,8HPOSICIÓN,8X,6HVEL X
*      10X,6HVEL Y )
146 FORMAT (//10X,7HELEMENT,4X,8HPOSICIÓN,10X,4HQ X ,
*      11X,4HQ Y )
212 FORMAT (F6.5, ', ', F6.5)
213 FORMAT ('PLINE')
214 FORMAT ('CLOSE')
215 FORMAT (F6.4, ', ', F6.4)
216 FORMAT (F6.4, ', ', F6.5)
217 FORMAT (F6.5, ', ', F6.4)
218 FORMAT (F7.4, ', ', F7.4)
219 FORMAT (F7.4, ', ', F6.5)
220 FORMAT (F6.5, ', ', F7.4)
221 FORMAT (F7.4, ', ', F6.4)
222 FORMAT (F6.4, ', ', F7.4)
503 FORMAT (/10X,4HNODO,I4,11HDE ELEMENTO,I4,
*      13HEXCEDE NP = ,I4)
506 FORMAT (/10X,4HNODO,I4,15H DOES NOT EXIT )
604 FORMAT (10X,15HNCOEF EXCEDE 5/10X,
*      15HINPUT TERMINADO)
END

```

## SUBROUTINE ELSTMF(KK, IPLVL)

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)

COMMON/ELMATX/ESM(4,4),EF(4),X(4),Y(4),KL

COMMON/MATL/DXE,DYE,PE,QE

COMMON/HCV/IDBC(50,2),DBC(50,2),NDBC

DIMENSION ES(4,4),ET(4,4),EG(4,4)

DIMENSION B(3),C(3)

C

REAL LG

DATA ES/2.,-2.,-1.,1.,-2.,2.,1.,-1.,-1.,1.,2.,-2.,1.,-1.,-2.,2./

DATA ET/2.,1.,-1.,-2.,1.,2.,-2.,-1.,-1.,-2.,2.,1.,-2.,-1.,1.,2./

DATA EG/4.,2.,1.,2.,2.,4.,2.,1.,1.,2.,4.,2.,2.,1.,2.,4./

IO=61

IF(KL.EQ.4) GO TO 2

C

C

C

ELEMENTOS LINEALES TRIANGULARES SIN LAS CONDICIONES  
DE FRONTERA

B(1)=Y(2)-Y(3)

B(2)=Y(3)-Y(1)

B(3)=Y(1)-Y(2)

C(1)=X(3)-X(2)

C(2)=X(1)-X(3)

C(3)=X(2)-X(1)

AR2=X(2)\*Y(3)+X(3)\*Y(1)+X(1)\*Y(2)-X(2)\*Y(1)

\* -X(3)\*Y(2)-X(1)\*Y(3)

IF(ABS(AR2).LT.0.0001) GO TO 5

DO 1I=1,3

EF(I)=QE\*AR2/6

DO 1J=1,3

A=1.0

IF(I.EQ.J) A=2.0

1 ESM(I,J)=((DXE\*B(I)\*B(J)+DYE\*C(I)\*C(J))/(AR2\*2.))+  
\* A\*PE\*AR2/24.

IF(NDBC.EQ.0) GOTO 7

GO TO 4

C

C

C

ELEMENTOS RECTANGULARES BILINEALES SIN LAS CONDICIONES  
DE FRONTERA.

2 AA=Y(4)-Y(1)

BB=X(2)-X(1)

AR=AA\*BB

IF(ABS(AR).LT.0.0001) GO TO 5

DO 3 I=1,4

EF(I)=QE\*AR/4.

DO 3 J=1,4

3 ESM(I,J)=DXE\*AA\*ES(I,J)/(6.\*BB)+DYE\*BB\*ET(I,J)/(6.\*AA)+  
\* PE\*AR\*EG(I,J)/36.

4 IF(NDBC.EQ.0) GO TO 7

C

C

C

CONDICIONES DE FRONTERA

DO 11I=1,NDBC

IF(IDBC(I,1).NE.KK) GO TO 11

J=IDBC(I,2)

K=J+1

IF(J.EQ.KL) K=1

EF(J)=EF(J)+DBC(I,2)/2.

EF(K)=EF(K)+DBC(I,2)/2.

ESM(J,J)=ESM(J,J)+DBC(I,1)/3.

ESM(J,K)=ESM(J,K)+DBC(I,1)/6.

ESM(K,J)=ESM(J,K)

ESM(K,K)=ESM(K,K)+DBC(I,1)/3.

11 CONTINUE

```

C
C
C   SALIDA DE LAS MATRICES DE ELEMENTOS
C
7 IF(IPLVL.EQ.0) RETURN
  WRITE(IO,8) KK
  DO 9 I=1,KL
9  WRITE(IO,10) EF(I), (ESM(I,J),J=1,KL)
  RETURN
C
C
C   DIAGNÓSTICO DE LAS SALIDAS.
C
5 WRITE(IO,6) KK
  WRITE(*,6) KK
6 FORMAT(//10X,19HEL AREA DEL ELEM,I4,
*       20H ES MENOR QUE 0.0001/
*       10X,41HLOS NÚMEROS DE NODOS ESTAN EN DESORDEN /
*       10X,33HO LOS NODOS FORMAN UNA LÍNEA /
*       10X,20HEJECUCIÓN TERMINADA )
8 FORMAT(/10X,8HELEMENTO,I4/10X,16HVECTOR DE FUERZA,10X,
*       17HMATRIZ DE RIGIDEZ)
10 FORMAT(10X,E12.5,10X,4E13.6,10X,10X)
  STOP
  END

```

```

SUBROUTINE MODIFY(IFE)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON/AV/A(19850),JGF,JGSM,NP,NBW
DATA IN/60/,IO/61/

```

```

C
C
C   ENTRADA DE LOS VALORES NODALES DE FUERZA
C   PARA PROBLEMAS DE CAMPO.
C
  NIW=0
202 READ(IN,*) IB
  IF(IB.LE.0) GO TO 216
  IF(NIW.EQ.0.AND.IFE.EQ.0) WRITE(IO,200)
  IF(NIW.EQ.0.AND.IFE.EQ.1) WRITE(IO,201)
  NIW=1
  READ(IN,*) BV
  A(JGF+IB)=A(JGF+IB)+BV
  WRITE(IO,203) IB,BV
  GO TO 202

```

```

C
C
C   ENTRADA DE LOS VALORES NODALES PRESCRITOS,
C   PARA PROBLEMAS DE CAMPO.
C

```

```

216 NIW=0
209 READ(IN,*) IB
  IF(IB.LE.0) RETURN
  IF(NIW.EQ.0.AND.IFE.EQ.0) WRITE(IO,212)
  IF(NIW.EQ.0.AND.IFE.EQ.1) WRITE(IO,208)
  NIW=1
  READ(IN,*) BV

```

```

C
C
C   MODIFICACIÓN DE LA MATRIZ GLOBAL DE RIGIDEZ Y EL VECTOR GLOBAL
C   DE FUERZAS USANDO EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE COLUMNAS Y RENGLONES.
C

```

```

  K=IB-1
  DO 211 J=2,NBW
  M=IB+J-1
  IF(M.GT.NP) GO TO 210

```

```

IJ=JGSM+(J-1)*NP+IB-(J-1)*(J-2)/2
A(JGF+M)=A(JGF+M)-A(IJ)*BV
A(IJ)=0.0
210 IF(K.LE.0) GO TO 211
KJ=JGSM+(J-1)*NP+K-(J-1)*(J-2)/2
A(JGF+K)=A(JGF+K)-A(KJ)*BV
A(KJ)=0.0
K=K-1
211 CONTINUE
A(JGF+IB)=A(JGSM+IB)*BV
221 CONTINUE
WRITE(IO,203) IB,BV
GO TO 209

200 FORMAT(//10X,22HSOURCE AND SINK VALUES)
201 FORMAT(//10X,31HFUERZAS CONCENTRADAS Y MOMENTOS)
203 FORMAT(10X,I3,E15.5)
208 FORMAT(//10X,25HALORES CONOC. DE DESPLAZ)
212 FORMAT(//10X,32HALORES NODALES CONOCIDOS DE PHI)
END

```

**SUBROUTINE DCMPBD**

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON/AV/A(19850),JGF,JGSM,NP,NEW
IO=61

```

```

DESCOMPOSICIÓN DE UNA MATRIZ DE BANDA EN UNA FORMA
TRIANGULAR SUPERIOR USANDO ELIMINACIÓN GAUSSIANA.

```

```

NP1=NP-1
DO 226 I=1,NP1
MJ=I+NBW-1
IF(MJ.GT.NP) MJ=NP
NJ=I+1
MK=NBW
IF((NP-I+1).LT.NBW) MK=NP-I+1
ND=0
DO 225 J=NJ,MJ
MK=MK-1
ND=ND+1
NL=ND+1
DO 225 K=1,MK
NK=ND+K
JK=JGSM+(K-1)*NP+J-(K-1)*(K-2)/2
INL=JGSM+(NL-1)*NP+I-(NL-1)*(NL-2)/2
INK=JGSM+(NK-1)*NP+I-(NK-1)*(NK-2)/2
II=JGSM+I

```

```

ASEGURANDO QUE NO EXISTA DIVISIÓN ENTRE 0

```

```

IF(A(II).LE.0.0) A(II)=1

```

```

225 A(JK)=A(JK)-A(INL)*A(INK)/A(II)
226 CONTINUE
RETURN
END

```

C  
C  
C  
C  
C

C  
C  
C  
C  
C



## SUBROUTINE SLVBD

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON/AV/A(19850),JGF,JGSM,NP,NBW
NP1=NP-1

```

C  
C  
C

DESCOMPOSICIÓN DEL VECTOR GLOBAL DE FUERZA.

```

DO 250 I=1,NP1
MJ=I+NBW-1
IF(MJ.GT.NP) MJ=NP
NJ=I+1
L=1
DO 250 J=NJ,MJ
L=L+1

```

```

250 IL=JGSM+(L-1)*NP+L-(L-1)*(L-2)/2
A(JGF+J)=A(JGF+J)-A(IL)*A(JGF+I)/A(JGSM+I)

```

C  
C  
C  
C

SUSTITUCIÓN RETRÓGRADA (HACIA ATRÁS) PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS VALORES NODALES.

```

A(NP)=A(JGF+NP)/A(JGSM+NP)
DO 252 K=1,NP1
I=NP-K
MJ=NBW
IF((I+NBW-1).GT.NP) MJ=NP-I+1
SUM=0.0

```

```

DO 251 J=2,MJ
N=I+J-1
IJ=JGSM+(J-1)*NP+I-(J-1)*(J-2)/2
251 SUM=SUM+A(IJ)*A(N)
252 A(I)=(A(JGF+I)-SUM)/A(JGSM+I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GRAFICA(NEL,XC,YC,NP,NE,MAXELM,MAXNOD)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C  
C  
C

SUBROUTINA QUE CONTROLA DATOS QUE GRAFICAN ELEMENTOS F.

```

LOGICAL fourcolors
EXTERNAL fourcolors

```

```

COMMON/IPO/IN,IO
DIMENSION NEL(MAXELM,9),XC(MAXNOD),YC(MAXNOD)

```

```

XCMAx=0
YXMAx=0
DO 57 K=1,NP
IF(XCMAx.LT.XC(K)) XCMAx=XC(K)
57 IF(YCMAx.LT.YC(K)) YCMAx=YC(K)
IF(fourcolors()) THEN
CALL VENTANA(NEL,XC,YC,NE,XCMAx,YCMAx,MAXELM,MAXNOD)
ELSE
WRITE(*,*) ' ESTE PROGRAMA REQUIERE UN CGA, EGA, O',
* ' VGA graphics card.'
END IF
END

```

```

C
C C
C
LOGICAL FUNCTION fourcolors()

FOURCOLORS - Function QUE ESSCOGE EL MODO GRAFICO.

INCLUDE 'FGRAPH.FD'
INTEGER*2 dummy
RECORD /videoconfig/ screen
COMMON screen

C
C C
C
ESCOGE EL MÁXIMO NÚMERO DISPONIBLE DE COLORES.

CALL getvideoconfig( screen )
SELECT CASE( screen.adapter )
CASE( $CGA, $OCGA )
dummy = setvideomode( $MRES4COLOR )
CASE( $EGA, $OEGA )
dummy = setvideomode( $ERESCOLOR )
CASE( $VGA, $OVGA )
dummy = setvideomode( $VRES16COLOR )
CASE DEFAULT
dummy = 0
END SELECT
CALL getvideoconfig( screen )
fourcolors = .TRUE.
IF( dummy.EQ. 0 ) fourcolors = .FALSE.
END

SUBROUTINE VENTANA(NEL, XC, YC, NE, XCMAX, YCMAX, MAXELM, MAXNOD)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)

C
C C
C
THREEGRAPHS - subroutine QUE DESPLIEGA LA GRAFICA.

INCLUDE 'FGRAPH.FD'
INTEGER*2 dummy, halfx, halfy
INTEGER*2 xwidth, yheight, cols, rows
CHARACTER*8 str
RECORD /videoconfig/ screen
RECORD /rccoord/ curpos
COMMON screen
DIMENSION NEL(MAXELM, 9), XC(MAXNOD), YC(MAXNOD)
COMMON/IPO/IN, IO
CALL clearscreen( $GCLEARSCREEN )
xwidth = screen.numpixels
yheight = screen.numpixels
cols = screen.numtextcols
rows = screen.numtextrows
halfx = xwidth / 2
halfy = (yheight / rows) * (rows / 2)
PARX= XCMAX+(XCMAX/5)
PARY= YCMAX+(YCMAX/5)

C
C C
C
window

CALL setviewport( 0, 0, (xwidth-1), (yheight-1) )
CALL settextwindow( 1, 1, rows, cols )

```

```

CALL settextposition( 2,5, curpos )
dummy = settextcolor( 15)
WRITE (str, '(I2)')
CALL outtext( '* INSTITUTO DE INGENIERIA * * UNIVERSIDAD
* VERACRUZANA * '// str )
dummy = setwindow(.TRUE.,-PARX/5,-PARY/5, PARX, PARY)
dummy = rectangle( $GBORDER, 10, 10, (xwidth-10), (yheight-10) )

```

C

```

CALL MALLA (NEL, XC, YC, NE, XCMAX, MAXELM, MAXNOD)
dummy = rectangle( $GBORDER, 0, 0, (xwidth-1), (yheight-1) )
c READ (*,*) ! Wait for ENTER key to be pressed
c dummy = setvideomode( $DEFAULTMODE )

```

END

```

SUBROUTINE MALLA (NEL, XC, YC, NE, XCMAX, MAXELM, MAXNOD)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C  
C  
C

```

GRIDSHAPE - ESTA SUBROUTINA GRAFICA LOS DATOS.

```

```

INCLUDE 'FGRAPH.FD'
INTEGER*2 dummy, i
CHARACTER*8 str
RECORD /videoconfig/ screen
RECORD /wxycoord/ wxy
RECORD /rccoord/ curpos
RECORD /xycoord/ xy
COMMON screen
DIMENSION NEL (MAXELM, 9), XC (MAXNOD), YC (MAXNOD)
COMMON/IPO/IN, IO

```

C  
C  
C  
C

```

CICLO PARA IMPRIMIR MALLA Y RESULTADOS EN PANTALLA.

```

```

CICLO QUE IMPRIME EN LA PANTALLA EL NÚMERO DE ELEMENTO

```

```

IF (NE.GT.10) GOTO 6
DO 5 N=1, NE
  KXC=NEL(N,1)
  KYC=NEL(N,2)
  KZC=NEL(N,3)
  CX=XC(KXC)+(XC(KYC)-XC(KXC))/2.
  CY=YC(KXC)+(YC(KZC)-YC(KXC))/6.
  CALL getviewcoord_w( CX, CY, xy )
  jzx=xy.xcoord
  jzy=xy.ycoord
  colc= INT2(jzx*80./639.)
  rowc= INT2(jzy*30./479.)
  CALL settextposition( rowc,colc, curpos )
  dummy = settextcolor( 15)
  WRITE (str, '(I2)') N
  CALL outtext( '# '// str )
5  READ (*,*) ! Wait for ENTER key to be pressed
6  CONTINUE

```

C  
C  
C  
C

```

CICLO QUE IMPRIME EN LA PANTALLA EL NÚMERO DE NODO
Y LOS ELEMENTOS DE LA MALLA .

```

```

DO 20 N=1, NE
IF (NE.GT.10) GOTO 8
  READ(*,*) ! WAIT FOR ENTER
8  continue

```

```

DO 10 I=1,4
KX=NEL(N,I)
KY=NEL(N,I+1)
IF (KX.EQ.0) KX=NEL(N,1)
x=XC(KX)
y=YC(KX)
IF (KY.EQ.0) KY=NEL(N,1)
x2=XC(KY)
y2=YC(KY)
z=xcmax/100
dummy = setcolor( 14 )
CALL moveto_w( x , y , wxy)
dummy = setcolor( 15 )
dummy = ellipse_w( $GFILLINTERIOR, x-z , y-z , x+z , y+z )
IF(NE.GT.60) GOTO 800
CALL getviewcoord_w( x , y , xy )
zx=xy.xcoord
zy=xy.ycoord
col= INT2(zx*80./639.)
row= INT2(zy*30./479.)
CALL settextposition( row,col, curpos )
KKX=KX
IF(KX.GT.15) KKX=12
dummy = settextcolor( KKX)
WRITE (str, '(I3)' , KX)
CALL outtext( 'nod' //str )
800  NJ=N
    IF (N.GT.15) NJ=2
    dummy = setcolor( NJ)
    dummy = lineto_w( x2, y2 )
10  CONTINUE
20  CONTINUE
13  FORMAT('ZX, ZY = ',10X,2E15.5)
    dummy = setcolor( 2 )

C
C  SALIDA EN LA PANTALLA DE DATOS MÁXIMOS EN LA MALLA
C  (SÓLO SI SE PIDE GRÁFICA AL FINAL DE PROGRAMA PRINCIPAL)
C

C
C  CALL settextposition( 27,4, curpos )
C
C  WRITE(*,1)
C  WRITE(*,2)  KMAX,GMX, KMAY, GMY, VOL
C  WRITE(IO,1)
C  WRITE(IO,2)  KMAX,GMX, KMAY, GMY, VOL
1  format(6x,8HELEMENTO,3X,9HTAU(X)MAX,4X,8HELEMENTO,3X,9HTAU(Y)MAX,
*      7X,6HTORQUE)
2  format(6x,15,5X,E10.4,5X,15,5X,E10.4,5X,E10.4)
C
C
END

```

SUBROUTINE CNCTVT (NELEM, NODES, MAXELM, MAXNOD, GLXY)

```

C -----
C  GENERA ARREGLO DE CONECTIVIDAD NODAL, PARA UN ESPECÍFICO TIPO DE MALLA
C
C  NEL1 = PRIMER ELEMENTO EN EL RENGLÓN DEL ELEMENTO
C  NELL = ÚLTIMO ELEMENTO EN EL RENGLÓN DEL ELEMENTO
C  IELINC = INCREMENTO DEL ELEMENTO AL SIGUIENTE EN EL RENGLÓN

```

C NODINC = INCREMENTO NODAL DE UN NODO AL SIGUIENTE  
 C NPE = NÚMERO DE NODOS POR ELEMENTO  
 C NODE(I) = NÚMERO GLOBAL DE NODO CORRESPONDIENTE A LOS NODOS LOCALES DEL  
 C PRIMER ELEMENTO EN EL RENGLÓN

```

-----
C
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      COMMON/IPO/IN,IO
C      DIMENSION NODES (MAXELM,9) , GLXY (MAXNOD,2) , NODE (9)
C
C      LEE DATOS DEL ELEMENTO
C
C      READ (IN,*) NRECEL
C      DO 30 IREC=1,NRECEL
C      READ (IN,*) NELL1,NELL,IELINC,NODINC,NPE,(NODE(I),I=1,NPE)
C      WRITE (*,*) NELL1,NELL,IELINC,NODINC,NPE,(NODE(I),I=1,NPE)
C      IF (IELINC.LE.0) IELINC=1
C      IF (NODIC.LE.0) NODIC=1
C      IF (NELL.LE.NELL1) NELL=NELL1
C      IF (NELL.GT.NELEM) THEN
C          WRITE (6,60)
C          STOP
C      ELSE
C          NINC=-1
C          DO 20 N=NELL1,NELL,IELINC
C              NINC=NINC+1
C              DO 10 M=1,NPE
C                  NODES (N,M)=NODE (M)+NINC*NODINC
C          20 CONTINUE
C          ENDIF
C      30 CONTINUE
C      DO 50 N=1,NELEM
C          SUMX=0.0
C          SUMY=0.0
C          NEN=NPE
C          IF (NEN.NE.4) THEN
C              DO 40 M=5,NEN
C                  MM=NODES (N,M)
C                  IF (M.NE.9 .OR. M.NE.6) THEN
C                      M4=NODES (N,M-4)
C                      M3=NODES (N,M-3)
C                      IF (M.EQ.8) M3=NODES (M,1)
C                      IF (GLXY (MM,1) .EQ.1.E20)
C                          * GLXY (MM,1) = .5* (GLXY (M4,1) +GLXY (M3,1))
C                      IF (GLXY (MM,2) .EQ.1.E20)
C                          * GLXY (MM,2) = .5* (GLXY (M4,2) +GLXY (M3,2))
C                      IF (NEN.NE.8) THEN
C                          SUMX=SUMX+GLXY (M4,1)
C                          SUMY=SUMY+GLXY (M4,2)
C                      ENDIF
C                  ELSE
C                      IF (GLXY (MM,1) .EQ.1.E20) GLXY (MM,1) = .25*SUMX
C                      IF (GLXY (MM,2) .EQ.1.E20) GLXY (MM,2) = .25*SUMY
C                  ENDIF
C          40 CONTINUE
C          ENDIF
C      50 CONTINUE
C      60 FORMAT (/, 'MSG from cncvt:EL NÚMERO DE ELEMENTOS EXCEDE EL MAX.')
```

SUBROUTINE MSH2DG (NELEM, NNODE, NODES, MAXELM, MAXNOD, GLXY)

```

C
C-----
C GENERA PUNTOS DE COORDENADAS NODALES PARA ESPECÍFICOS TIPOS DE MALLAS
C
C NOD1 = PRIMER NÚMERO DE NODO EN EL SEGMENTO DE LÍNEA
C NODL = ÚLTIMO NÚMERO DE NODO EN EL SEGMENTO DE LÍNEA
C NODINC = INCREMENTO NODAL DE UN NODO AL SIGUIENTE A LO LARGO DE LA LÍNEA
C X1,Y1 = COORDENADAS GLOBALES DEL PRIMER NODO EN LA LÍNEA
C XL,YL = COORDENADAS GLOBALES DEL ÚLTIMO NODO EN LA LÍNEA
C RATIO = LA RELACIÓN 1 DEL PRIMER ELEMENTO AL ÚLTIMO ELEMENTO
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      COMMON/IPO/IN,IO
C      DIMENSION GLXY(MAXNOD,2)
C      READ(IN,*) (NELEM,NNODE)
C      DO 10 I=1,NNODE
C      GLXY(I,1)=1.E20
10  GLXY(I,2)=1.E20
C
C LEER EL NÚMERO DE LOS REGISTROS (SEGMENTOS DE LÍNEA Y DATOS EN CADA LÍNEA
C
C      READ(IN,*) NRECL
C      DO 30 IREC=1,NRECL
C      READ(IN,*) NOD1,NODL,NODINC,X1,Y1,XL,YL,RATIO
C      IF(NODL.LT.NOD1) NODL = NOD1
C      IF(NODL.NE.NOD1) THEN
C          IF(NODINC.LE.0) NODINC = 1
C          IF(RATIO.LE.0.0) RATIO = 1.0
C          NODIF = (NODL-NOD1)/NODINC
C          XL1=XL-X1
C          YL1=YL-Y1
C          GLXY(NOD1,1) = X1
C          GLXY(NOD1,2) = Y1
C          ALNGTH=DSQRT(XL1*XL1+YL1*YL1)
C          ALINC=(2.0*ALNGTH/NODIF)*RATIO/(RATIO+1.0)
C          ALRAT=ALINC/RATIO
C          IF(NODIF.NE.1) DEL=(ALINC-ALRAT)/(NODIF-1)
C          IF(NODIF.EQ.1) DEL=0.0
C          SUM=0.0
C          I=-1
C          DO 20 N=1,NODIF
C          I=I+1
C          SUM=SUM+ALINC-I*DEL
C          NI = (NOD1+N) *(NODINC)
C          GLXY(NI,1)=X1+XL1*SUM/ALNGTH
C          GLXY(NI,2)=Y1+YL1*SUM/ALNGTH
20  CONTINUE
C      ENDIF
30  CONTINUE
C      CALL CNCTVT (NELEM, NODES, MAXELM, MAXNOD, GLXY)
C
C      RETURN
C      END

```

```
SUBROUTINE MSH2DR( IEL, IELTYP, NX, NY, NPE, NNM, NEM, NOD, DX, DY, X0, Y0,
*              GLXY, MAXNEM, MAXNNM, MAXNX, MAXNY)
-----
```

```
C
C LA SUBROUTINA GENERA ARREGLOS [NOD] Y [GLXY] PARA DOMINIOS RECTANGULARES
C EL DOMINIO ES SUBDIVIDIDO EN NX SUBDIVISIONES A LO LARGO DE LA DIRECCION-X
C Y NY EN LA DIRECCION-Y . LAS SUBDIVISIONES DEFINEN ELEMENTOS RECTANGULARES
C DEL TIPO REQUERIDO. PARA UNA MALLA DE ELEMENTOS TRIANGULARES , LA
C SUBDIVISION DEFINEN DOS ELEMENTOS LINEALES CON SU DIAGONAL INCLINADA
C A LA DERECHA.
-----
```

```
C
C
```

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION NOD( MAXNEM, 9), GLXY( MAXNNM, 2), DX( MAXNX), DY( MAXNY)
COMMON/ IPO/ IN, IO
READ( IN, *) NX, NY
READ( IN, *) X0, (DX(I), I=1, NX)
READ( IN, *) Y0, (DY(I), I=1, NY)
NEX1 = NX+1
NEY1 = NY+1
NXX = IEL*NX
NYY = IEL*NY
NXX1 = NXX + 1
NYY1 = NYY + 1
NEM = NX*NY
IF( IELTYP.EQ.0) NEM=2*NX*NY
NNM=NXX1*NYY1
IF( NPE.EQ.8) NNM=NXX1*NYY1-NX*NY
IF( IELTYP.EQ.0) THEN
```

```
-----
C
C C C C C
C GENERA EL ARREGLO [NOD] :
```

```
-----
C ELEMENTOS TRIANGULARES
```

```

NX2=2*NX
NY2=2*NY
NOD(1,1) = 1
NOD(1,2) = IEL+1
NOD(1,3) = IEL*NXX1+IEL+1
IF( NPE.GT.3) THEN
    NOD(1,4) = 2
    NOD(1,5) = NXX1 + 3
    NOD(1,6) = NXX1 + 2
ENDIF
```

```

NOD(2,1) = 1
NOD(2,2) = NOD(1,3)
NOD(2,3) = IEL*NXX1+1
IF( NPE.GT.3) THEN
    NOD(2,4) = NOD(1,6)
    NOD(2,5) = NOD(1,3) - 1
    NOD(2,6) = NOD(2,4) - 1
ENDIF
```

```

K=3
DO 60 IY=1, NY
L=IY*NX2
M=(IY-1)*NX2
IF( NX.GT.1) THEN
    DO 30 N=K, L, 2
    DO 20 I=1, NPE
        NOD(N, I) = NOD( N-2, I) + IEL
20        NOD(N+1, I) = NOD( N-1, I) + IEL
30        CONTINUE
ENDIF
IF( IY.LT. NY) THEN
```

```

      DO 40 I=1,NPE
      NOD(L+1,I) = NOD(M+1,I)+IEL*NXX1
40    NOD(L+2,I) = NOD(M+2,I)+IEL*NXX1
      ENDIF
60    K=L+3
      ELSE

```

C  
C  
C

ELEMENTOS RECTANGULARES

```

      KO=0
      IF(NPE.EQ.9) KO=1
      NOD(1,1)=1
      NOD(1,2)=IEL + 1
      NOD(1,3)=NXX1+(IEL-1)*NEX1+IEL+1
      IF(NPE.EQ.9) NOD(1,3)=4*NX+5
      NOD(1,4)= NOD(1,3) - IEL
      IF(NPE.GT.4) THEN
        NOD(1,5) = 2
        NOD(1,6) = NXX1 + (NPE-6)
        NOD(1,7) = NOD(1,3) - 1
        NOD(1,8) = NXX1 + 1
        IF(NPE.EQ.9) THEN
          NOD(1,3)=NXX1+2
        ENDIF
      ENDIF
      IF(NY.GT.1) THEN
        M=1
        DO 110 N=2,NY
          L=(N-1)*NX+1
          DO 100 I=1,NPE
100    NOD(L,I)=NOD(M,I)+NXX1+(IEL-1)*NEX1+KO*NX
110    M=L
          ENDIF
          IF(NX.GT.1) THEN
            DO 140 NI=2,NX
              DO 120 I=1,NPE
                K1=IEL
                IF(I.EQ.6.OR.I.EQ.8) K1=1+K0
120    NOD(NI,I)=NOD(NI-1,I)+K1
                M=NI
                DO 140 NJ=2,NY
                  L=(NJ-1)*NX+NI
                  DO 130 J=1,NPE
130    NOD(L,J) = NOD(M,J)+NXX1+(IEL-1)*NEX1+KO*NX
140    M=L
                ENDIF
              ENDIF
            ENDIF
          ENDIF

```

C  
C  
C

GENERACIÓN DE LAS COORDENADAS GLOBALES DEL NODO , [GLXY]

```

      DX(NEX1)=0.0
      DY(NEY1)=0.0
      XC=X0
      YC=Y0
      IF(NPE.EQ.8) THEN
        DO 180 NI=1,NEY1
          I=(NXX1+NEX1)*(NI-1)+1
          J=2*NI-1
          GLXY(I,1)=XC
          GLXY(I,2)=YC
          DO 150 NJ=1,NX
            DELX=0.5*DX(NJ)
            I=I+1
            GLXY(I,1)=GLXY(I-1,1)+DELX
            GLXY(I,2)= YC
            I=I+1
            GLXY(I,1)=GLXY(I-1,1)+DELX

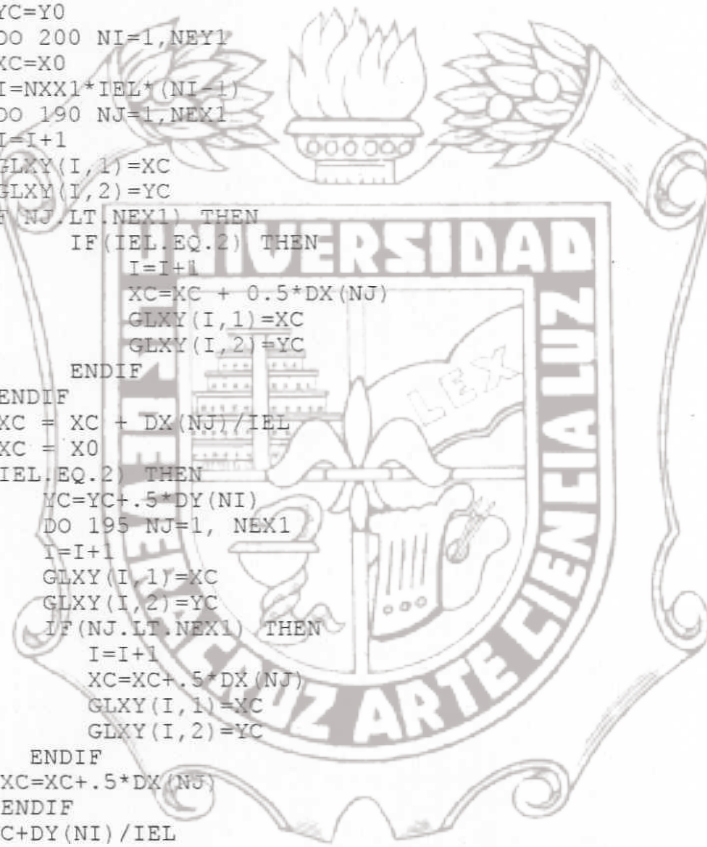
```



```

        GLXY(I,2)=YC
150  CONTINUE
        IF(NI.LE.NY) THEN
            I=I+1
            YC=YC+.5*DY(NI)
            GLXY(I,1)=XC
            GLXY(I,2)=YC
            DO 160 II=1,NX
            I=I+1
            GLXY(I,1)=GLXY(I-1,1)+DX(II)
160    GLXY(I,2)=YC
        ENDIF
180    YC=YC+.5*DY(NI)
        ELSE
            YC=Y0
            DO 200 NI=1,NEY1
            XC=X0
            I=NXX1*IEL*(NI-1)
            DO 190 NJ=1,NEX1
            I=I+1
            GLXY(I,1)=XC
            GLXY(I,2)=YC
            IF(NJ.LT.NEX1) THEN
                IF(IEL.EQ.2) THEN
                    I=I+1
                    XC=XC + 0.5*DX(NJ)
                    GLXY(I,1)=XC
                    GLXY(I,2)=YC
                ENDIF
190    XC = XC + DX(NJ)/IEL
            XC = X0
            IF(IEL.EQ.2) THEN
                YC=YC+.5*DY(NI)
                DO 195 NJ=1, NEX1
                I=I+1
                GLXY(I,1)=XC
                GLXY(I,2)=YC
                IF(NJ.LT.NEX1) THEN
                    I=I+1
                    XC=XC+.5*DX(NJ)
                    GLXY(I,1)=XC
                    GLXY(I,2)=YC
                ENDIF
195    XC=XC+.5*DX(NJ)
            ENDIF
200    YC=YC+DY(NI)/IEL
        ENDIF
        RETURN
    END

```



```

SUBROUTINE ECHO
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C  
C  
C

ESTA SUBRUTINA ESCRIBE LOS DATOS DE ENTRADA EN EL ARCHIVO DE SALIDA.

```

COMMON/IPO/IN,IO
DIMENSION AA(20)
WRITE (IO,40)
10 CONTINUE
READ (IN,30,END=20) AA
WRITE (IO,30) AA
GO TO 10
20 CONTINUE
REWIND (IN)
WRITE (IO,50)
RETURN
30 FORMAT (20A4)
40 FORMAT (5X, '*** ECHO DE LOS DATOS DE ENTRADA COMIENZA *** ',/)
50 FORMAT (5X, '*** ECHO DE LOS DATOS DE ENTRADA TERMINA *** ',/)
END

```

```

SUBROUTINE IMP (PW,N)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C  
C  
C  
C

ESTA SUBRUTINA IMPRIME CUALQUIER VECTOR QUE DESEE VISUALIZAR DEL PROGRAMA.

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION PW(5000)
WRITE (*,20)
WRITE (5,20)
C DO 5 J=1,N
WRITE (*,19) (PW(J),J=1,N)
WRITE (5,19) (PW(J),J=1,N)
C 5 CONTINUE
RETURN
19 FORMAT (6D10.3)
20 FORMAT (/, ' **** VECTOR **** ',/)
END

```

```

SUBROUTINE IMPM (SK,N)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C  
C  
C  
C  
C

ESTA SUBRUTINA IMPRIME CUALQUIER MATRIZ QUE DESEE VISUALIZAR DEL PROGRAMA.

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION SK(50,50)
WRITE (*,20)
WRITE (5,20)
DO 17 I=1,6
WRITE (*,19) ((SK(I,J)),J=1,N)
WRITE (5,19) ((SK(I,J)),J=1,N)
17 CONTINUE
RETURN
19 FORMAT (6D10.3)
20 FORMAT (/, ' **** MATRIZ **** ',/)
END

```

**BIBLIOGRAFÍA**

- BATHE KLAUS-JÜRGEN, WILSON EDWARD L., " *NUMERICAL METHODS IN THE FINITE ANALYSIS* ", PRENTICE-HALL, 1976.
- BRAINERD, GOLDBERG, ADAMS, " *PROGRAMMER'S GUIDE TO FORTRAN 90* ", McGRAW-HILL , 1990.
- COOK ROBERT D., " *CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS* ", SECOND EDITION , WILEY & SONS, INC. 1981.
- DE BUEN OSCAR, " *ESTRUCTURAS DE ACERO, COMPORTAMIENTO Y DISEÑO* ", LIMUSA ,1980.
- ELSGOLTZ L., " *ECUACIONES DIFERENCIALES Y CÁLCULO VARIACIONAL* ", SEGUNDA EDICION, EDITORIAL MIR, 1977.
- GALLAGHER RICHARD H. , " *FINITE ELEMENT ANALYSIS* ", PRENTICE-HALL, 1975.
- HAMMOND H., ROGERS B., CRITTENDERN B., " *INTRODUCCION AL FORTRAN 77 Y LA PC* ", McGRAW-HILL , 1990.
- HILDEBRAND FRANCIS B., " *METHODS OF APPLIED MATHEMATICS* ", SECOND EDITION, PRENTICE-HALL, 1965.
- KAPLAN WILFRED, " *CÁLCULO AVANZADO* ", COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, 1973.
- KENT DOROTHY, " *AUTOCAD REFERENCE GUIDE* ", SECOND EDITION, NEW RIDERS PUBLISHING, 1991.
- LÓPEZ FERNÁNDEZ J., BARTOLOMÉ LARRINAGA J.C., " *AUTOCAD AVANZADO* ", McGRAW-HILL , 1989.
- MALVERN LAWRENCE E. , " *INTRODUCTION TO THE MECHANICS OF A CONTINUOUS MEDIUM* ", PRENTICE-HALL, 1969.
- PARK R. y PAULAY T., " *ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO* " , LIMUSA, 1991.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

- PEÑA PARDO BONIFACIO C. A. "APUNTES DE ELEMENTO FINITO", 1993.
- PEÑA PARDO BONIFACIO C. A. "APUNTES DE MECÁNICA DE SÓLIDOS", 1993.
- POPOV EGOR P., "INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE SÓLIDOS", LIMUSA 1990.
- PRZEMIENIECKI. J.S. "THEORY OF MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS", McGRAW-HILL, 1968.
- REDDY. JOHN N. "AN INTRODUCTION TO THE FINITE ELEMENT METHOD", SECOND EDITION, McGRAW-HILL, 1984.
- SEGERLIND, LARRY J. "APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS", SECOND EDITION, WILEY & SONS, INC.
- SOKOLNIKOFF, IVAN STEPHEN. "MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY", SECOND EDITION 1956, McGRAW-HILL, REPRINT 1987.
- "THE MICROSOFT FORTRAN", MANUALES DE USUARIO, MICROSOFT 1991.
- TIMOSHENKO STEPHEN P. y GERE JAMES M., "MECÁNICA DE MATERIALES", A.I.D. 1979.
- TIMOSHENKO S. y GOODIER J. N., "TEORÍA DE LA ELASTICIDAD", SEGUNDA EDICIÓN EN ESPAÑOL, URMO, S.A. EDICIONES, 1975.
- TIMOSHENKO STEPHEN P., "RESISTENCIA DE MATERIALES", ESPASA-CALPE. S.A. SEGUNDA EDICIÓN EN ESPAÑOL 1976.
- ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., "THE FINITE ELEMENT METHOD", VOLUME 1. FOURTH EDITION, McGRAW-HILL, 1989.
- ZILL DENNIS G., "ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES", SEGUNDA EDICIÓN, EDITORIAL IBEROAMERICA, 1988.