



**UNIVERSIDAD VERACRUZANA**

**INSTITUTO DE INGENIERIA**

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

***“Análisis Estructural de  
Pavimentos Rígidos por  
el Método de Elemento  
Finito”***

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN INGENIERIA DE ESTRUCTURAS

PRESENTA:

*Ing. Silvia E. Prieto Loya*

H. VERACRUZ, VER.

ABRIL DE 1999



UNIVERSIDAD VERACRUZANA  
INSTITUTO DE INGENIERIA

H. Veracruz, Ver., a 11 de Marzo de 1999  
DI144/99

Al candidato al Grado:  
**ING. SILVIA EUGENIA PRIETO LOYA**  
PRESENTE:

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a Usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso la M.I. Guadalupe Riquer Trujillo, para que lo desarrolle como tesis, para obtener el Grado de Maestra en Ingeniería de Estructuras:

TEMA:

**"ANALISIS ESTRUCTURAL DE PAVIMENTOS RIGIDOS POR EL METODO DE ELEMENTO FINITO"**

- Introducción
- Antecedentes
- Objetivos
- I.- Conceptos Generales
- II.- Estudios Preliminares
- III.- Idealización de la Estructura
- IV.- Desarrollo del Programa de Computación por el Método de Elemento Finito
- Conclusiones y Recomendaciones
- Bibliografía

Sin otro particular, me es grato quedar de Usted como su atento y seguro servidor.

ATENTAMENTE  
"LIS DE VERACRUZ: ARTE, CIENCIA, LUZ"

  
DR. ENRIQUE A. MORALES GONZALEZ  
DIRECTOR

EMG/ncl\*.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## AGRADECIMIENTOS:

*Gracias Señor, por darme fortaleza en los momentos cuando estuve lejos de mi familia y me acompañaste mostrándome el camino y por darme la oportunidad de demostrarme a mi misma que las cosas se logran con perseverancia y ahínco.*

*Gracias a mis padres por su apoyo incondicional, por creer en mi siempre, y por darme su ejemplo y el mejor tesoro: la educación.*

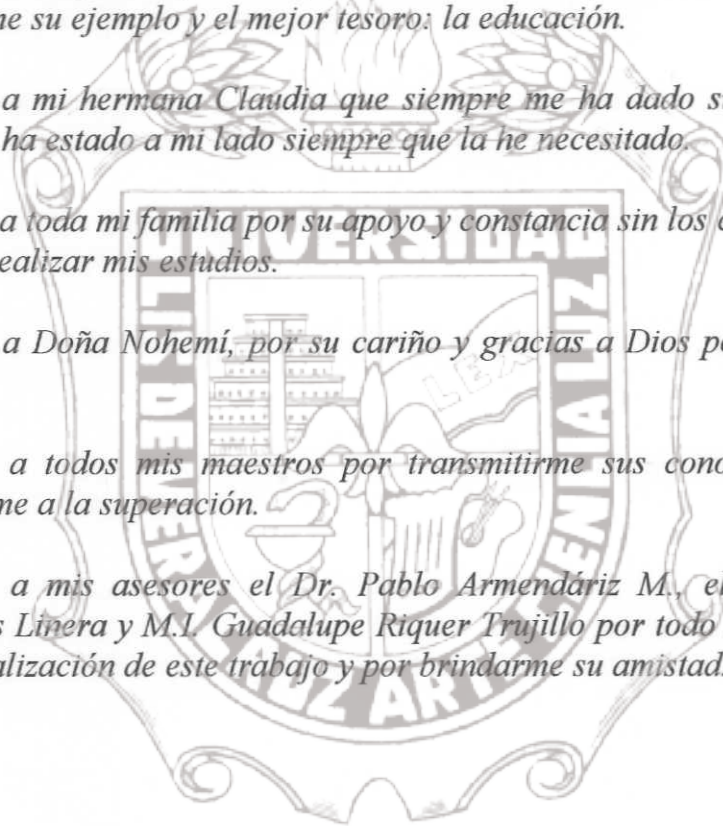
*Gracias a mi hermana Claudia que siempre me ha dado su confianza y su cariño y ha estado a mi lado siempre que la he necesitado.*

*Gracias a toda mi familia por su apoyo y constancia sin los cuales no habría podido realizar mis estudios.*

*Gracias a Doña Nohemí, por su cariño y gracias a Dios por ponerla en mi camino.*

*Gracias a todos mis maestros por transmitirme sus conocimientos y por motivarme a la superación.*

*Gracias a mis asesores el Dr. Pablo Armendáriz M., el M.I. Francisco Williams Linera y M.I. Guadalupe Riquer Trujillo por todo su valioso apoyo en la realización de este trabajo y por brindarme su amistad.*



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## DEDICATORIA:

*Dedico este trabajo a mis padres, que siempre me han apoyado y me han dado su confianza y su amor y que merecen los logros que he obtenido porque sin ellos no tendría ninguno.*

*Por alentarme para seguir siempre adelante con su ejemplo, su sabiduría y su comprensión.*

*Gracias!!!*

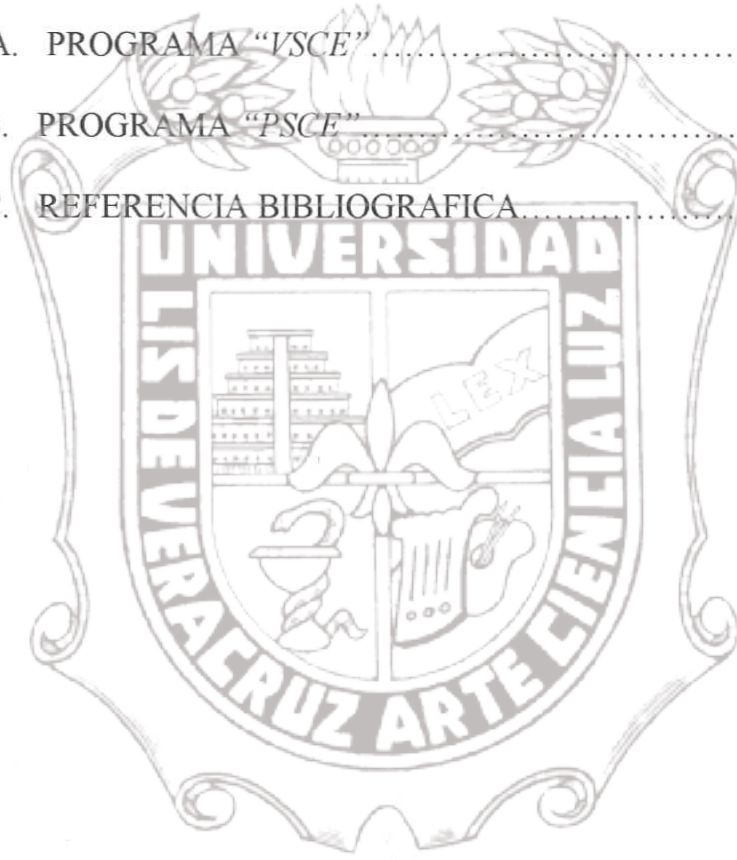


## INDICE:

INTRODUCCION.....	1
ANTECEDENTES.....	3
OBJETIVOS.....	6
CAPITULO I. CONCEPTOS GENERALES.....	7
1.1. Materiales.....	7
1.1.1. Fuentes.....	7
1.1.2. Agregados Gruesos.....	7
1.1.3. Agregados Finos.....	8
1.1.4. Agua.....	8
1.1.5. Cemento.....	9
1.1.6. Aditivos.....	9
1.1.7. Muestreo.....	10
1.2. Estado del Arte.....	10
1.2.1. Diseño de Pavimentos de Concreto.....	10
1.2.2. Fundamentos del Diseño de Pavimentos de Concreto.....	11
1.3. Control de Grietas en los Pavimentos de Concreto.....	12
1.3.1. Tipos de Juntas para Pavimentos de Concreto.....	12
1.3.2. Juntas Longitudinales.....	13
1.3.3. Juntas Transversales de Contracción.....	13
1.3.4. Juntas Transversales de Construcción.....	14
1.3.5. Juntas Transversales de Expansión.....	14
1.3.6. Material para Sellar Juntas.....	15
1.3.7. Curado.....	15
1.4. Fallas en los Pavimentos de Concreto.....	16
1.4.1. Tipos de Fallas.....	17
CAPITULO II. ESTUDIOS PRELIMINARES.....	20
2.1. Características de la Sección Transversal.....	20
2.1.1. Capa Subrasante.....	21
2.1.2. Capa Sub-base.....	21
2.1.3. Base.....	22
2.1.4. Losa de Concreto.....	22
2.2. Tipos de Pavimento de Concreto.....	23
2.2.1. Pavimento de Concreto Simple con Juntas.....	23

2.2.2. Pavimento de Concreto Reforzado con Juntas.....	23
2.2.3. Pavimento de Concreto Continuamente Reforzado.....	23
2.2.4. Pavimento de Concreto Preesforzado.....	24
2.3. Parámetros Representativos del Suelo.....	24
2.3.1. Conceptos Fundamentales.....	25
2.3.2. Métodos de Análisis Destructivos.....	27
2.3.3. Métodos de Análisis No Destructivos.....	27
2.4. Patrones de Fallas.....	30
2.5. Pruebas de Laboratorio.....	35
2.5.1. Pruebas Destructivas.....	35
2.5.2. Pruebas No Destructivas.....	35
2.6. Esfuerzos y Deflexiones en Pavimentos Rígidos.....	39
2.6.1. Gradientes Térmicos.....	39
2.6.2. Esfuerzos por Cargas de Tráfico.....	41
2.6.3. Esfuerzos Debidos a Fricción.....	42
2.6.4. Cambios Volumétricos en el Concreto.....	42
2.6.5. Transmisión de Cortante por Fricción entre Losas.....	42
<b>CAPITULO III. IDEALIZACION DE LA ESTRUCTURA.....</b>	<b>44</b>
3.1. Flexión de Placas.....	44
3.1.1. Ecuación Diferencial de la Flexión de Placas.....	44
3.1.2. Flexión de una Placa sobre Cimentación Elástica.....	47
3.2. Elemento Finito.....	49
3.2.1. Formulación de Placas en Elemento Finito.....	49
3.2.2. Condiciones de Equilibrio.....	50
3.2.3. Relaciones de Cinemática.....	54
3.2.4. Relaciones Constitutivas.....	56
3.2.5. Elemento Placa Rectangular.....	62
3.3. Flexión de Vigas.....	65
3.3.1. Ecuación Diferencial de la Flexión de Vigas.....	65
3.3.2. Cinemática.....	65
3.3.3. Ley Constitutiva.....	66
3.3.4. Equilibrio.....	66
3.3.5. Flexión de una Viga sobre Cimentación Elástica.....	71
<b>CAPITULO IV. DESARROLLO DEL PROGRAMA DE COMPUTACION POR EL METODO DE ELEMENTO FINITO.....</b>	<b>72</b>
4.1. Introducción.....	72
4.2. Método AASHTO para Pavimentos Rígidos.....	73
4.2.1. Descripción del Programa "PAS".....	76

4.3. Método PCA para Pavimentos Rígidos.....	76
4.3.1. Descripción del Programa "KENSLABS".....	78
4.4. Descripción del Programa "VSCE".....	90
4.4.1. Diagrama de Flujo.....	91
4.4.2. Lista de Símbolos.....	92
4.5. Descripción del Programa "PSCE".....	93
4.5.1. Diagrama de Flujo.....	93
4.5.2. Lista de Símbolos.....	96
4.6. Comparación de Resultados.....	97
 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	 105
 APENDICE A. PROGRAMA "VSCE".....	 110
 APENDICE B. PROGRAMA "PSCE".....	 118
 APENDICE C. REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.....	 130



## INTRODUCCION

La urbanización de una ciudad es un factor clave en el buen funcionamiento de la misma. Es por ello que no sólo una buena planeación debe llevarse a cabo, sino un mantenimiento constante y un control de calidad adecuado.

Comúnmente la selección de estrategias de pavimentación se realiza por el costo de construcción inicial, la mayoría de las veces sin involucrar el análisis técnico, lo que conlleva en muchas ocasiones a que los diseños no lleguen a su vida esperada o bien que durante ésta se tengan que realizar cuantiosas inversiones para mantener y rehabilitar la estrategia seleccionada.

Las alternativas que comúnmente se consideran para la construcción de pavimentos son la de *pavimento flexible (asfáltico)* y la de *pavimento rígido (hidráulico)*.

La mayoría de las vialidades urbanas en nuestro país están conformadas por pavimentos asfálticos que en general tienen un comportamiento adecuado a corto plazo y posteriormente requieren de actividades de mantenimiento que además de ser costosas originan frecuentes interrupciones del tránsito vehicular.

La problemática anterior aunada a los presupuestos limitados para la conservación de estas arterias hace cada vez más necesario el empleo de alternativas que proporcionen un mejor comportamiento a largo plazo con mantenimiento mínimo y que sean económicamente competitivas como lo son las técnicas de pavimentación con concreto hidráulico para la construcción de nuevos caminos y rehabilitación de pavimentos deteriorados.

El pavimento de concreto consiste en una mezcla relativamente rica de cemento, arena y agregado grueso tendida en una sola capa. Cuando se construye, diseña, supervisa y se da un control de calidad adecuado, tiene una vida útil prolongada y un costo de mantenimiento relativamente bajo.

Algunas veces, se presenta la necesidad de evaluar el estado en que se encuentran las calles de una ciudad con el propósito de saber si se requiere de una rehabilitación, o simplemente si ha cumplido su objetivo de funcionalidad y desempeño.



## Tesis de Maestría

Actualmente, en la ciudad de Chihuahua, Chih., se ha estado realizando una investigación a cerca de los pavimentos rígidos con el fin de caracterizar su comportamiento y emitir un manual técnico para su diseño, construcción y mantenimiento. El presente trabajo formó parte de esa investigación y tiene la finalidad de analizar los pavimentos de concreto hidráulico, existentes en dicha ciudad, por el método de elemento finito y comparar los resultados obtenidos con otros métodos existentes como se detalla mas adelante. Así como elaborar un programa de computación que utilice este método para modelar al pavimento como un medio sobre cimentación elástica y obtener sus respuestas cuando se somete a cargas. Este programa podrá servir para otras aplicaciones siempre y cuando se alimente con valores adecuados de las variables que intervienen en él.



## Tesis de Maestría ANTECEDENTES

<sup>(7)</sup>Se tiene el registro de una sección corta de camino de concreto cerca de Londres en 1828 y de una capa de cimentación de concreto para asfalto laminado en París en 1858. El concreto se ha utilizado como cimiento en New York en 1888. En Bellefontaine, Ohio, en 1889 (foto 1), se construyó una calle de concreto en dos capas y se marcó en cuadros tal como se hace en una banqueta. En 1909 los pavimentos de concreto comenzaron a salir del período de ensayo (foto 2), cuando en el Condado de Wayne, Michigan, se pavimentó la



Avenida Woodward, que conduce a Detroit. En ese año se tendieron 6.4 km de pavimentos de este tipo. Hacia el año de 1912 existía un cierto número de secciones en el Condado de Milwaukee, Wis., y el Departamento de Carreteras Estatal de California lo había adoptado como procedimiento de pavimentos. En ese año su uso aumentó y se construyeron 400 km. En 1913 esta cifra se duplicó y en 1914 se colocaron, aproximadamente, de 2,400 a 2,900 km.

Foto 1. Bellefontaine, Ohio, 1889

Al comienzo de la Primera Guerra Mundial (1914) el procedimiento de pavimentación con concreto hidráulico todavía se encontraba en una etapa de transición. El Departamento de Carreteras de California construyó un pavimento de concreto de 10 cm de espesor y de 4.58 mts de ancho. En 1917 Pennsylvania tomó como norma usar losas de 12.7 cm de espesor en el borde y de 17.8 cm en el centro. Las losas prefabricadas se empezaron a ensayar en Casper, Wyo., en 1920 y en California en Suisun en 1922 (foto 3).

En el Condado de Maricopa, Arizona, en 1918, se construyó, mediante una emisión de bonos de 8 millones de dólares, una gran cantidad de kilómetros de pavimentos de borde engrosado, muchos de los cuales todavía se encuentran dando un buen servicio.

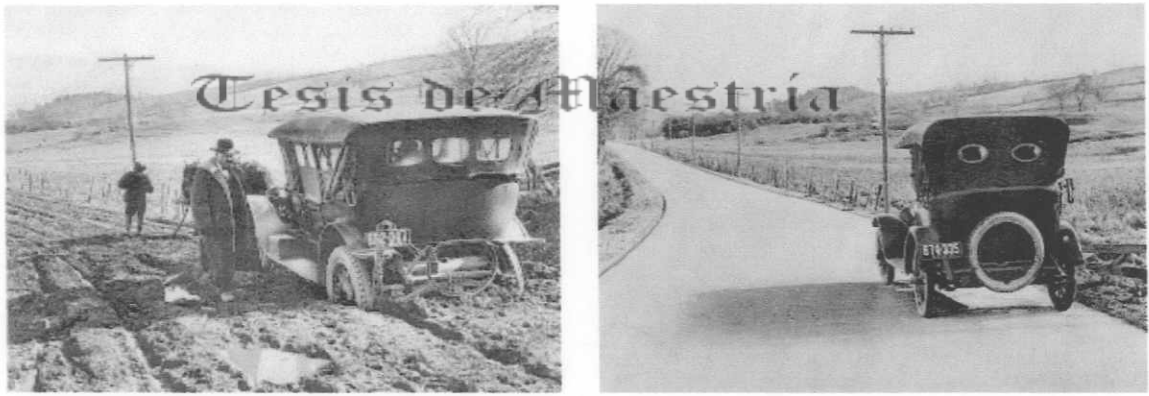


Foto 2. Antes y Después en New York, 1909.

Las pruebas realizadas en Bates, Ill., y en Pittsburg, Oregon, en 1920-22, probaron concienzudamente éste y otros diseños de pavimentos de concreto. Desde los primeros años de la década de 1920-1930, el concreto había sido aceptado como uno de los pavimentos de mejor calidad<sup>(7)</sup>.

Ningún otro tipo de pavimento ha dado lugar a tanto estudio como el de concreto. Quizá ningún otro uso del cemento ha avanzado tanto con el conocimiento de sus propiedades o en el arte de su aplicación como en el de la construcción de caminos.



Foto 3. California, 1922

Proyecto de Digitalización de Tesis  
 Responsable M. B. Alberto Pedro Lorandi Medina  
 Colaboradores: Estanislao Ferman García  
 M. B. Enrique Rodríguez Magaña

En el estado de Chihuahua se ha estado empleando la técnica de pavimentos rígidos desde 1986, a la fecha se han pavimentado mas de 3 millones de m<sup>2</sup> de calles con concreto hidráulico.

Sin embargo, en base a investigaciones recientes, se ha encontrado que un porcentaje considerable de los pavimentos construidos presentan fallas a los 2 ó 3 años de terminados, mientras que era de esperarse que su duración fuera de 20 ó 30 años.

No se cuenta con un reglamento para el diseño de pavimentos en cada estado de la República, sino que se toma en cuenta el procedimiento constructivo de otros reglamentos disponibles, es por ello que los parámetros y constantes que intervienen en el diseño pueden no ser los adecuados.

Esto puede provocar fallas serias o mal funcionamiento del pavimento; aunque intervienen muchos otros factores como control de calidad, condiciones ambientales críticas, mal proporcionamiento de materiales, etc.

Aún no se conoce con precisión a que son atribuibles éstas fallas, en el estado de Chihuahua se ha empleado el procedimiento estándar AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials), en el mejor de los casos, usando el Programa de Análisis de Pavimento (PAS) de la American Concrete Pavement Association, el cual es adecuado con respecto a las condiciones para las que fue diseñado pero no necesariamente a las de esta región. Aunque en la mayoría de los casos sólo se diseña en una forma empírica y en base a "prueba y error", por lo que no se tiene un avance tecnológico rápido sostenido, existe la posibilidad, en algunas regiones del estado, de volver a emplear el pavimento asfáltico.

Otro serio problema es la falta de cultura y preparación por parte del personal encargado del diseño, supervisión, construcción y control de calidad de los pavimentos.

### OBJETIVOS

El objetivo de esta tesis es evaluar y analizar estructuralmente los pavimentos rígidos existentes en el estado de Chihuahua, se pretende encontrar las causas que originaron las fallas antes mencionadas. Se usará el método de prueba no-destructivo (foto 4): *SASW* (*Spectral Analisis Surface Wave*) y también pruebas destructivas (foto 5), como se discutirán más adelante, se analizarán los pavimentos para conocer las propiedades de los mismos; de tal manera que los resultados obtenidos, sean el punto de partida para establecer los valores de los parámetros que se necesitarán en el desarrollo de un programa de computación para el análisis estructural de pavimentos rígidos por medio del método de *Elemento Finito* y así poder evaluar si el procedimiento empleado a la fecha es adecuado o no, mediante la comparación de los resultados obtenidos al aplicar el programa desarrollado contra los obtenidos por medio de otros programas disponibles.

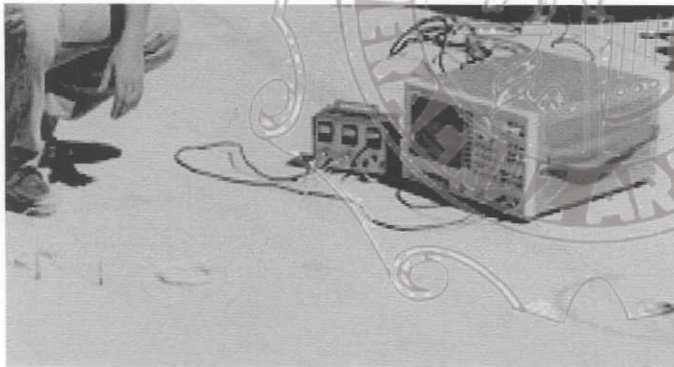


Foto 4. Prueba No Destructiva Aplicada al Pavimento

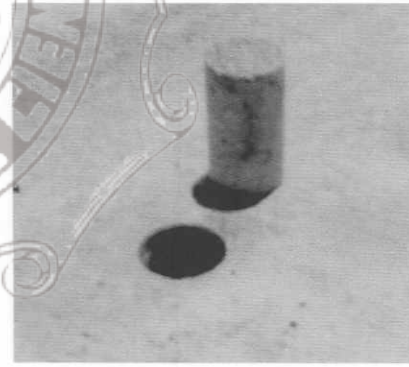


Foto 5. Prueba Destructiva Aplicada al Pavimento

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación realizado por la UACH, cuyo objetivo es caracterizar el comportamiento de los pavimentos rígidos en el estado de Chihuahua y elaborar un manual técnico así como promover su uso y aplicación.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Como ya se dijo antes, el concreto es una mezcla de materiales que si se construye y diseña apropiadamente tiene una vida útil prolongada y un comportamiento adecuado. Se debe tener cuidado especial en la selección de cada uno de los materiales y cumplir con ciertas normas de calidad. Con el fin de dar un marco de referencia para la evaluación estructural de los pavimentos rígidos en el estado de Chihuahua, a continuación se dan las características de los materiales utilizados en la construcción de los pavimentos de concreto hidráulico.

### 1.1. MATERIALES

#### 1.1.1. Fuentes

Los materiales deben proporcionarse únicamente por fuentes de suministro aprobadas, antes de iniciar los embarques, y emplearse sólo si los materiales cumplen con los requisitos de las especificaciones correspondientes. La base para aprobar dichas fuentes de suministro deben ser la capacidad para producir materiales de la calidad y en las cantidades requeridas. Los materiales incluidos en el concreto, que en general se utilizan en la construcción de carreteras, son los agregados gruesos, agregados finos, agua, cemento y uno o más aditivos.

#### 1.1.2. Agregados Gruesos

Los agregados deben cumplir con ciertos requisitos de calidad. Se deben estipular los límites deseados de granulometría para el proyecto, junto con las variaciones permisibles dentro de los límites de las especificaciones.

Los agregados deben manejarse y almacenarse de manera que se reduzca al mínimo la segregación, degradación, contaminación o mezcla de tipos y tamaños diferentes. Deben tener un contenido de humedad razonablemente uniforme en el momento de ponerlos en la mezcladora.

Los agregados gruesos que se utilizan con más frecuencia en el concreto son la piedra triturada y la grava. También pueden emplearse otros materiales inertes o la combinación de unos con otros.

Los requerimientos específicos en relación con los agregados gruesos, se pueden dividir en cinco grupos: sustancias nocivas, porcentaje de desgaste, solidez, peso por pie cúbico y granulometría.

### 1.1.3. Agregados Finos

La arena es el agregado fino que, por lo general, tiene mayor utilización en el concreto y está compuesta por granos fuertes y durables.

La limpieza de la arena que se desea utilizar, se puede controlar estableciendo requerimientos relativos a las cantidades máximas de varias clases de sustancias nocivas que pueden estar presentes. Con frecuencia se le da un énfasis particular al porcentaje máximo de "limo" (material que pasa la malla No. 200) que puede estar contenido en el agregado fino.

### 1.1.4. Agua

El agua que se usa en la mezcla o curado del concreto debe ser agua limpia, sin cantidades perjudiciales de aceite, sales, materias vegetales o de cualquier otra sustancia que sea dañina para el producto terminado. El agua proveniente de fuentes naturales, debe extraerse excluyendo sedimentaciones, lodos, zacates y otras materias extrañas. El agua no

potable sólo debe utilizarse si produce cubos de mortero con resistencias de 7 y de 28 días, iguales a las de muestras similares hechas con agua destilada.

### 1.1.5. Cemento

Debe especificarse el tipo o tipos de cementos que vayan a emplearse y deben cumplir con los requisitos de las especificaciones aplicables. Todo el cemento utilizado en un proyecto determinado debe provenir de la misma fuente de suministro, a no ser que las especificaciones permitan otra cosa.

### 1.1.6. Aditivos

Los aditivos pueden usarse para modificar las propiedades del concreto de manera que éste sea más adecuado para determinado fin. Su empleo para obtener características deseadas, debe basarse en evaluaciones apropiadas de sus efectos sobre combinaciones específicas de materiales y en consideraciones económicas. Algunos aditivos pueden mejorar la trabajabilidad y permitir un colado más fácil. Otros pueden acelerar el fraguado, permitiendo un acabado más temprano, el retiro de cimbras y una apertura de los carriles al tránsito, así como reducir el tiempo necesario de protección contra la congelación en clima frío. Otros pueden retardar el fraguado del concreto cuando no se desea un fraguado rápido. Muchos retardantes aceleran la obtención de resistencia una vez logrado el fraguado inicial.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana



### 1.1.7. Muestreo

Las muestras de materiales para su aceptación o rechazo deben tomarse cuidadosamente de acuerdo con procedimientos predeterminados. Deben pedírsele al productor muestras para inspección y pruebas preliminares.

Deben establecerse procedimientos adecuados para la toma de muestras, para que proporcionen la mayor información posible respecto a las propiedades promedio, así como a la naturaleza y extensión de la variabilidad de los materiales.

## 1.2. ESTADO DEL ARTE

### 1.2.1. Diseño de Pavimentos de Concreto

Las condiciones de las losas de pavimento de concreto están gobernadas por las propiedades del concreto empleado en el colado, así como de las capas de apoyo. El concreto, como otros materiales, se dilata o se contrae cuando la temperatura aumenta o disminuye. Se dilata al humedecerse y se contrae al secarse.

Los pavimentos de concreto varían de longitud según la hora del día, las estaciones y las variaciones del tiempo. Además, la variación de la temperatura diaria y de las estaciones, y la diferencia de humedad entre las partes superior e inferior de las losas, introducen una tendencia a curvarse. Otras complicaciones sobrevienen debido a que las capas de cimentación de las losas se deforman cuando los caminos se cargan y se recuperan, cuando menos parcialmente cuando las cargas son eliminadas.

Las consideraciones de diseño que son vitales para un desempeño satisfactorio y una larga vida de un pavimento de concreto son: apoyo razonablemente uniforme para el pavimento; la eliminación del bombeo mediante el uso de una capa de base delgada, con o sin tratamiento; juntas de diseño adecuado y un espesor que deberá soportar los esfuerzos provocados por la carga, dentro de límites de seguridad.

La resistencia a la flexión es uno de los factores importantes en el diseño del espesor del pavimento.

Otro factor de importancia es el soporte de la base o sub-base, el cual se mide por medio del módulo de reacción  $k$ . Y, por supuesto, el tránsito al cual estará sometido durante su vida de servicio. El número y magnitud de las cargas debidas al tránsito pesado resulta crítico.

### 1.2.2. Fundamentos del Diseño de Pavimentos de Concreto

El concreto simple es un material con una capacidad alta a la compresión, sin embargo su capacidad a la tensión es muy baja, para el caso del concreto reforzado se desprecia para fines de diseño, no así en el caso de pavimentos rígidos con concreto simple.

Una medida indirecta de la resistencia a la tensión del concreto es la resistencia a la tensión por flexión. Este parámetro es importante ya que la prueba a la tensión directa del concreto es difícil de efectuarse en el laboratorio. Los fundamentos del diseño de pavimentos de concreto son:

1. El agrietamiento ocasionado por los esfuerzos de flexión es casi inevitable en las losas de cualquier longitud grande. Los esfuerzos combinados en los bordes e interiores de las losas, para longitudes de alrededor de 20m, exceden en mucho la resistencia de fatiga del concreto simple. Esto se aplica para todos los espesores razonables de las losas, ya que los esfuerzos reducidos de las cargas, obtenidos mediante el incremento del espesor de la losa, son en gran medida anulados por los esfuerzos cuando la temperatura aumenta.

2. Para cargas constantes sobre las losas de longitudes razonables, los esfuerzos de carga y los esfuerzos totales disminuyen a medida que el espesor de la losa aumenta.

3. Para las condiciones establecidas de losas sencillas aisladas de espesor uniforme, los esfuerzos unitarios máximos ocurren en los ángulos o bordes de las losas, más bien que en el interior. Si existe una losa contigua es común, en el diseño corriente, el reducir estos

esfuerzos del borde y del ángulo instalando dispositivos de transmisión de carga que proporcionan apoyo para la sección cargada<sup>(7)</sup>.

### 1.3. CONTROL DE GRIETAS EN LOS PAVIMENTOS DE CONCRETO

En la práctica, las grietas que ocurren transversalmente, en ángulos rectos a la dirección del tráfico (falla transversal), se pueden clasificar en uno de los tres modos que siguen<sup>(7)</sup>:

1. En losas no reforzadas se presentan secciones débiles (juntas) a intervalos cercanos (alrededor de 5m). Las grietas debidas al cambio de temperatura y variación de humedad y otras causas, ocurrirán entonces en estas juntas.

2. Proveer refuerzo relativamente ligero en la losa y espaciar más las secciones débiles (juntas), generalmente en el rango de 12 a 20m (con extremos de 6 y 30m). Con este diseño se anticipa que algunas grietas finas aparezcan a intervalos, pero que el acero de refuerzo evitará que se abra. Los ajustes en la longitud de la losa debidos al cambio de temperatura y humedad y de otros factores, ocurrirán en las juntas.

3. Proveer con refuerzo pesado continuo y omitir por entero las juntas. Este procedimiento causa grietas finas que se desarrollan a intervalos tan pequeños que casi no hay movimiento de la losa con la variación de la temperatura y la humedad.

Comúnmente, las grietas a lo largo del pavimento (falla longitudinal) están controladas mediante alguna forma de junta en el punto de división entre los carriles de tránsito.

#### 1.3.1. Tipos de Juntas para Pavimentos de Concreto

Las juntas en los pavimentos de concreto se colocan para controlar los esfuerzos inducidos por los cambios volumétricos que pueden producirse debido a: 1) contracción debida a una disminución uniforme en la temperatura o una disminución en la humedad, 2) expansión debido a un aumento uniforme en la temperatura y 3) los efectos de alabeo en los

pavimentos debidos a un diferencial en la temperatura en sentido vertical o en la humedad de la losa.

### 1.3.2. Juntas Longitudinales

Una junta longitudinal es la que corre en forma continua a lo largo del pavimento. La junta divide un pavimento de dos carriles en dos secciones, siendo el ancho de cada uno, la del carril de tránsito. El propósito de las juntas longitudinales es simplemente el de controlar la magnitud de los esfuerzos del alabeo por temperatura en forma tal, que no se presente un agrietamiento longitudinal en el pavimento. En los pavimentos de dos carriles, por lo general, las dos losas se juntan por medio de barras de acero de enlace (pasajunta) que se extienden en forma transversal a través de la junta y que se espacian a determinados intervalos a lo largo de la longitud de la junta.

Las juntas longitudinales que se usan en los pavimentos de concreto son de diferentes tipos, las de uso más común se denominan "deformada" o "ranurada" y "plano debilitado".

### 1.3.3. Juntas Transversales de Contracción

Las juntas transversales de contracción se usan con dos propósitos, para controlar las grietas de la losa que resultan de la contracción y para relajar los esfuerzos provocados por alabeo. En la actualidad, el tipo de junta de contracción de mayor uso es la junta simulada. Cuando se presenta la contracción, se fractura la parte inferior de la losa en el plano debilitado y las pasajuntas y el entrelazamiento del agregado mantienen la integridad estructural de la junta.

La ranura en la parte superior del pavimento se forma frecuentemente por medio de un corte. La ranura se rellena después con cualquiera de ciertos materiales, entre los que se incluyen selladores líquidos o moldeados en el campo o sellos por compresión performados.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Las pasajuntas en este tipo de juntas no están adheridas al concreto en un lado del plano débil y se asegura su libertad de movimientos pintando o lubricando un extremo de la clavija, encerrando un extremo en un casquillo o por medio de algún otro método similar.

### 1.3.4. Juntas Transversales de Construcción

Estas juntas se pueden colocar al final del trabajo de un día o cuando el trabajo cesa debido a alguna otra causa. Si se detiene la construcción en la colocación de una junta transversal, la junta se puede instalar colocando concreto en uno de los lados y el otro lado protegido en forma apropiada, hasta que puedan continuarse las operaciones de construcción. Si una junta de construcción transversal cae dentro del tercer medio del intervalo regular de la junta, se hará una junta con barra de enlace. Esto evita que la junta se abra y que posiblemente cause agrietamiento "reflejo" del pavimento en el carril adyacente.

### 1.3.5. Juntas Transversales de Expansión

Las juntas de expansión que se utilizan en la actualidad son por lo regular de 3/4 a 1 pulg de ancho y atraviesan todo el espesor de la losa. El espacio de la junta se rellena con algún material compresible, elástico y que no haya sufrido extrusión. Por lo general, las pasajuntas se usan en juntas de expansión y su diámetro, espaciamiento y longitud, serán en general similares a los indicados para juntas de contracción. Las pasajuntas deben adecuarse para realizar su función de transferencia de carga y deben diseñarse y colocarse de tal manera que no interfieran con el funcionamiento apropiado de la junta. En cualquier momento en que se observa que existe el problema de corrosión salina, se pueden colocar pasajuntas recubiertas.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 1.3.6. Material para Sellar Juntas

Las juntas deben limpiarse con mucho cuidado, retirando toda la tierra y los desperdicios, sopleteando con aire comprimido o arena, o bien, con cepillo de alambre. Para el sellado se deben seguir las recomendaciones del fabricante.

El sellador debe aplicarse dentro de la abertura de la junta, de manera que el material no se derrame sobre las superficies expuestas del concreto. Debe quitarse de inmediato todo el material excedente sobre la superficie y limpiarse.

Se pueden utilizar determinadas resinas epóxicas para rellenar las juntas. Dichos materiales deben ser 100% sólidos, tener determinada dureza y elongación.

### 1.3.7. Curado

El curado de una losa de pavimento de concreto es necesario con el objeto de que el concreto pueda fraguar en forma adecuada. Debe tenerse en cuenta que el agua es absolutamente necesaria para que el cemento tenga una hidratación apropiada y que el fraguado del concreto no sea un proceso de secado. Por lo tanto, se deben dar los pasos necesarios para prevenir la pérdida de humedad del concreto durante el período de curado.

Los métodos más eficaces de curado para la mayoría de los concretos son aquellos en los que se utiliza agua, pero no siempre pueden ser los más prácticos.

Algunos materiales utilizados para el curado de un pavimento son: tela de yute mojado, membranas plásticas o papel impermeable, membranas aplicadas por aspersión, entre otros.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 1.4. FALLAS EN LOS PAVIMENTOS DE CONCRETO

El concreto es un material cuyas propiedades mecánicas son excelentes en compresión, sin embargo su capacidad a la tensión es muy baja. Un pavimento rígido es una estructura que consta de una carpeta (losa de concreto hidráulico), base (material granulado) y sub-base (material granulado). Cada una de estas capas tiene una función estructural, la carpeta tiene la función de dar una superficie confortable y durable para el tráfico vehicular y además el de transmitir las cargas de los vehículos a las capas inferiores. La carpeta puede ser de concreto simple adicionándole algunas veces fibra sintética o de acero con el fin de mejorar sus propiedades a la tensión, o bien con acero de refuerzo.

En la región la construcción de las losas es a base de concreto simple con acero de refuerzo en las juntas (pasajuntas), por lo que el agrietamiento será función de la capacidad del concreto a la tensión.

Las fallas en los pavimentos rígidos, se deben básicamente a dos causas:

a). Deterioro o deficiencia del pavimento en si, el cual es provocado por procesos de congelamiento y deshielo; uso de materiales poco durables; reacción alcali-silica de los agregados; escamas resultantes por el uso de sales para remover hielo y algunas otras causas.

Las fallas pueden ser también debidas a una alineación impropia de las juntas, alabeos, movimientos rotatorios y esfuerzos de expansión y contracción.

b). Deficiencias en la estructura de la base o en la subrasante; en estos casos, una sobrecarga puede ocasionar bombeo en el pavimento y flujo de material de base; fallas en las esquinas, juntas falladas y otros defectos. Cuando se efectúa una inspección al pavimento, es necesario distinguir entre estos dos tipos básicos de esfuerzos.

### 1.4.1. Tipos de Fallas

Las fallas en la losa del pavimento son grietas que se generan por diferentes causas. Con el fin de estudiar los distintos tipos de grietas y sus posibles causas a continuación se da una clasificación de las mismas:

#### I. GRIETAS

1. *Grietas de Durabilidad.*- Son debidas al uso de materiales no durables y/o condiciones climáticas. Son fácilmente distinguibles por grietas semicirculares del ancho de un cabello, que nacen en las juntas o en las orillas del pavimento.
2. *Grietas en Esquina.*- Pueden presentarse formando un pequeño triángulo en una esquina de la losa o bien en forma sensiblemente paralela a la diagonal de la losa. Pueden ser debidas a las cargas del tráfico que pasan sobre esquinas no apoyadas de las losas, o por un concreto pobre.
3. *Grietas Longitudinales.*- Pueden ser debidas a sobrepeso, pérdida de soporte en la base, mala construcción de juntas longitudinales o contracción de fraguado.
4. *Grietas Transversales.*- Debidas a sobrepeso o contracción por cambios de temperatura. Si son menores de 1.8m se pueden ignorar.

#### II. DEFICIENCIAS EN LAS JUNTAS

1. *Sello Longitudinal.*- Cuando las juntas longitudinales han perdido su sello, deben ser reparadas para evitar la penetración de agua dentro de la subrasante.
2. *Sello Transversal.*- Cuando las juntas transversales han perdido su sello.
3. *Desprendimiento de la junta Longitudinal.*- Es debido a una diferencia de nivel entre losas provocando una falla en la junta longitudinal.



4. *Desprendimiento de la Junta Transversal.*- La junta falla debido a una diferencia de niveles entre losas.

### III. DEFECTOS DE SUPERFICIE

1. *Superficies con Escamas, Costrosas, Grietas de Mapa .-* Debidas a la colocación del concreto demasiado “aguado”, acabados excesivos de la superficie, impurezas en los agregados o uso de productos químicos en la superficie. Pueden indicar un deterioro general del concreto sin embargo, desde el punto de vista estructural no causan graves efectos. Son grietas finas que se encuentran sólo en la superficie.
2. *Agregado Expuesto.*- Es un defecto de la superficie que ocurre cuando el pavimento se ha deslavado de tal manera que el agregado queda expuesto.
3. *Estallamiento de Superficie.*- Grieta, corte o astillamiento de la orilla de la losa cerca de las juntas. Debido a un excesivo esfuerzo en las juntas causado por la infiltración de material incompresible y subsecuente expansión o por sobrecarga del tráfico. También debido a la desintegración del concreto o un diseño pobre.

### IV. MISCELANEA

1. *Losas que se Botan.*- Se deben primordialmente a una excesiva expansión de las mismas durante tiempo de calor. Se fracturan desmoronándose a lo largo de la junta transversal o de la grieta.
2. *Grietas de Bombeo.*- Consiste en el movimiento de la losa causado por las cargas del tráfico y que ocasiona la expulsión de mezclas de agua, arena, arcilla y/o limo a través de las juntas longitudinales o transversales, a través de las grietas y/o a través de las orillas del pavimento.

# Tesis de Maestría

## CAPITULO I. CONCEPTOS GENERALES

---

3. *Deterioro de Parches en el Pavimento.*- Cuando se ha hecho un corte a través de toda la profundidad del pavimento y ha sido excavada la cama de cimentación, pueden aparecer grietas si no se tiene cuidado al poner el relleno de la zanja.
4. *Falla en la Junta Transversal.*- Diferencia en elevación a lo largo de la junta entre losas.
5. *Falla en la Junta Longitudinal.*- Diferencia en elevación a lo largo de la junta entre losas y/o guarnición.
6. *Separación en la Línea de Guarnición.*- Separación de la junta entre la orilla de la losa y la banquetta o guarnición.



Ya se ha descrito al pavimento de concreto en su forma y su desempeño. Sin embargo, antes de iniciar cualquier estudio se tomarán en cuenta los siguientes aspectos: tránsito vehicular, condiciones del terreno de apoyo, descripción y especificaciones de materiales para la fabricación del concreto y el diseño. En algunos países como Estados Unidos, Francia, España, entre otros, desde hace muchos años se han venido construyendo pavimentos rígidos de acuerdo a normas o reglamentos que garantizan una vida útil de 30 años o más. El estado del arte en el diseño, construcción, supervisión y control de calidad en estos países es muy avanzado, uno de los reglamentos más aceptado es el de la AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials). México no ha sido la excepción, actualmente se están haciendo esfuerzos importantes para la implementación de normas que garanticen la vida útil de los pavimentos rígidos. En el estado de Chihuahua en particular, una empresa importante, productora de cemento ha venido apoyando proyectos de investigación con el propósito de crear una normatividad para pavimentos rígidos. Como ya se dijo antes, no se cuenta con un reglamento ni un método estandarizado para el diseño, la construcción y la supervisión de los pavimentos. Se ha estado construyendo en base a experiencia, sin ningún estudio formal del comportamiento de los mismos.

### 2.1. CARACTERISTICAS DE LA SECCION TRANSVERSAL

Todas las secciones deberán estar dimensionadas de acuerdo con aforos de tránsito confiables que incluyan tipo, peso y características de los vehículos. La sección típica de un pavimento rígido está compuesta por: capa subrasante, capa sub-base, base y losa de concreto.

### 2.1.1. Capa Subrasante.

Es el terreno de cimentación del pavimento. Puede ser el suelo natural, debidamente recortado y compactado, o puede ser, debido a los requerimientos del diseño geométrico, cuando el suelo natural es deficiente, material seleccionado de relleno de buena calidad. En muchos casos en los que el subsuelo no es satisfactorio en su estado natural, se puede colocar una *base estabilizada* que consiste en adicionar limos (si es un suelo con alto índice de plasticidad), cemento, material bituminoso o compactación y así hacerlo apropiado para la construcción de la sub-base. Se listan a continuación varias razones para usar la estabilización:

1. Condiciones pobres del subsuelo
2. Material base indefinido
3. Finos abundantes
4. Humedad abundante
5. Remodelación de caminos viejos
6. Construcción de bases superiores.

Cada uno de estos factores son autodescriptibles respecto al propósito del proceso de estabilización.

### 2.1.2. Capa Sub-base.

Es una capa de materiales pétreos, de buena graduación, construida sobre la subrasante. Esta capa, al igual que la anterior, deberá cumplir ciertos requisitos de compactación y de calidad. Normalmente, la sub-base se construye cuando las especificaciones para pavimento son más exigentes. Razones para el uso de la sub-base:

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

1. Control de bombeo
2. Control de las heladas
3. Mejoramiento del drenaje
4. Facilidad de construcción

### 2.1.3. Base.

Constituye la capa intermedia entre la capa de rodamiento y la sub-base. Se compone de materiales pétreos con buena distribución granulométrica. Esta capa permite reducir los espesores de carpeta, dada su función estructural importante al reducir los esfuerzos cortantes que se transmiten hacia las capas inferiores. Además cumple una función drenante del agua atrapada dentro del cuerpo del pavimento.

### 2.1.4. Losa de Concreto.

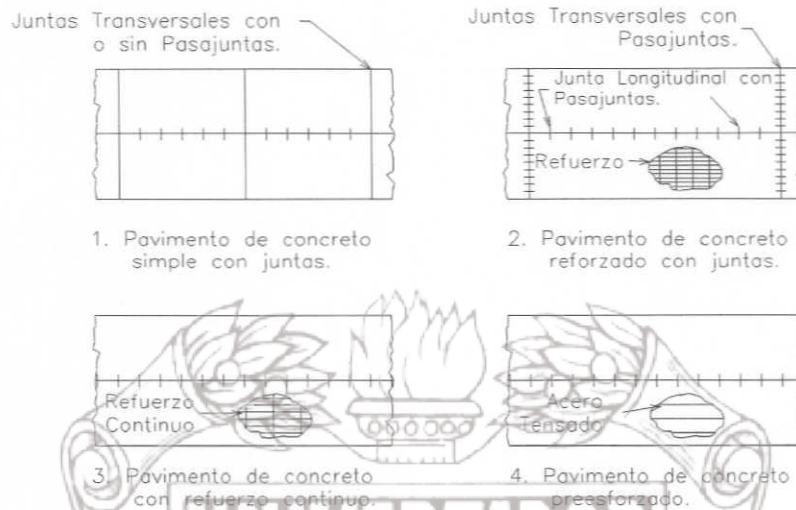
Superficie de rodamiento constituida por materiales endurecidos para transmitir minimizados los esfuerzos hacia las terracerías, comúnmente de concreto hidráulico. Constituye el área propiamente dicha por donde circulan los vehículos.



**Figura 2.1. Sección Típica de un Pavimento Rígido**

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 2.2. Tipos de Pavimento de Concreto:



**Figura 2.2. Tipos de Pavimento de Concreto**

**2.2.1. Pavimento de Concreto Simple con Juntas.** Estos pavimentos deben ser contruidos con juntas de contracción con un espaciamiento adecuado. Se pueden usar también pasajuntas y candados para asegurar una buena transferencia de carga. Conforme la separación de las juntas aumenta, incrementa el riesgo de que aparezcan grietas.

**2.2.2. Pavimento de Concreto Reforzado con Juntas.** El acero de refuerzo en forma de malla o barras entrelazadas permiten que se usen juntas a una mayor distancia. La cantidad de acero distribuido en estos pavimentos aumenta con el incremento de la separación de juntas y es diseñado para mantener en unión la losa después de que ocurren las grietas.

**2.2.3. Pavimento de Concreto Continuamente Reforzado.** La formación de grietas transversales a intervalos relativamente cerca es una característica distintiva de estos pavimentos. Estas grietas son detenidas por el refuerzo y no nos deben preocupar mientras estén uniformemente espaciadas. El tipo de falla que ocurre más frecuentemente en estos pavimentos es el estallamiento en la superficie del pavimento, este tipo de falla toma lugar entre dos grietas transversales paralelas o en la intersección de las grietas en forma de "Y".

La cantidad de acero de refuerzo debe ser diseñada para controlar el espaciamiento y ancho de las grietas y el máximo esfuerzo en el acero.

**2.2.4. Pavimento de Concreto Preesforzado.** Como es bien sabido, el concreto es débil a la tensión pero muy resistente a la compresión, el espesor del concreto requerido es gobernado por el módulo de ruptura, el cual varía con la fuerza de tensión del concreto. La preaplicación de un esfuerzo compresivo en el concreto reduce el esfuerzo de tensión causado por las cargas del tráfico y además disminuye el espesor de concreto requerido. El concreto pretensado tiene menos probabilidad de grietas y menos juntas transversales y por lo tanto requiere menos mantenimiento y tiene mayor vida útil. Los pavimentos de concreto colocados en compresión por medio de varillas de acero altamente tensadas, se han usado en aeropuertos y caminos experimentales en Europa. Mediante el preesforzado, se pone bajo compresión a toda la sección del pavimento. Así que secciones preesforzadas delgadas se comportan igual que las considerablemente más gruesas de concreto simple o armado.

### 2.3. PARAMETROS REPRESENTATIVOS DEL SUELO

Existen diversos parámetros y constantes que intervienen en el diseño de un pavimento de concreto hidráulico. La guía de diseño AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials), en base a estudios y pruebas experimentales, presenta diversos valores adecuados para cada uno de estos parámetros.

En el programa "PAS" (Pavement Analysis Software) se utilizan estos valores y es uno de los propósitos de esta investigación determinar si son los adecuados para nuestras condiciones y de no ser así, obtenerlos.

Para una mejor apreciación del trabajo se presenta a continuación la descripción de cada uno de los parámetros a evaluar.

### 2.3.1. Conceptos Fundamentales.

*Utilidad:* La utilidad de un pavimento es la capacidad de servir al tipo de tráfico que lo va a transitar.

*Tráfico:* El tráfico se refiere a la estimación de ejes, pesos y configuraciones de vehículos que se toma en cuenta para el diseño.

*Resistencia a la Flexión:* Resistencia a la flexión del concreto a los 28 días usando la viga simple con el tercio cargado (o resistencia a la compresión de cilindros de concreto).

*Módulo de Elasticidad del Concreto (E):* Indicador de cuánto se comprimirá el concreto bajo carga.

*Módulo de Ruptura (M.R.):* Es la resistencia a la tensión que se ocasiona por la flexión del concreto.

*Coefficiente de Transferencia de Carga:* Se refiere al uso de pasajuntas de acero o refuerzos continuos en el pavimento, lo cual aumenta la transferencia de carga.

*Módulo de Reacción del Cimiento (k):* Resistencia del suelo (determinada generalmente por la prueba de la placa cargada), su determinación toma en cuenta cambio de temporada, resistencia de la sub-base, la proximidad del pavimento a una capa de roca dura y la pérdida de soporte resultante del bombeo de la sub-base (es importante considerar la pérdida de soporte).

Este coeficiente expresa la rigidez del cimiento y se establece en función de la carga en kilogramos por centímetro cuadrado y por centímetro de flexión. Se supone que la relación del cimiento en cualquier punto es proporcional a la flexión. La reacción del cimiento se supone que es constante bajo toda la losa de pavimento, aunque algunas investigaciones muestran que puede variar.

Los valores de  $k$  varían desde alrededor de  $1.385 \text{ kg/cm}^3$  para cimientos malos, tales como arcillas, hasta más o menos 8.3 para los materiales buenos. Pueden ser de 19.4 o mayores para los suelos extremadamente buenos.



Las variaciones razonables en los valores del coeficiente de reacción del cimiento no tienen efectos serios sobre los esfuerzos, Kelley<sup>(7)</sup> recomienda un valor de 2.77 kg/cm<sup>3</sup> para uso general.

*Módulo de Resiliencia:* Mide la deformación recuperable de un espécimen de prueba cargado dinámicamente en cualquier nivel de esfuerzo. Indica la rigidez de la capa inmediatamente abajo del pavimento.

*Coefficiente de Drenaje:* El agua es uno de los principales contribuyentes a poner en peligro un pavimento. Puede saturar y debilitar el suelo y la sub-base y conducir a un bombeo de finos erosionables a través de las uniones del pavimento. Esta degradación resulta en pérdida de soporte estructural, asentamientos del pavimento y/o falla. El coeficiente de drenaje representa la calidad de drenaje que tiene el pavimento.

*Confiabilidad:* Es la probabilidad estadística de que un pavimento llegue a su vida proyectada, sin haber rebasado un valor mínimo especificado de servicio. Esta se obtiene por medio de la desviación estándar total, que considera la cantidad de porciento de error estadístico que resulta de la variabilidad en materiales y construcción y la desviación estándar normal, para la distribución normal en un valor dado de confiabilidad. El resultado final es un factor de seguridad de carga meramente.

*Espesor:* Es el espesor del pavimento.

*Análisis de Sensibilidad:* En un diseño de pavimento cada uno de los parámetros antes mencionados influirán en el cálculo del espesor requerido o la carga admisible. Ya que la influencia en el resultado, de cada uno de éstos es diferente, es necesario realizar un análisis de sensibilidad que consiste en comparar los efectos e impactos de cada uno en el espesor requerido y la carga admisible.

Para evaluar la transferencia de carga, el módulo de elasticidad, el módulo de reacción y el módulo de resiliencia se empleará el método de *pruebas no destructivas (SASW)*.

### 2.3.2. Métodos de Análisis Destructivos.

Este tipo de pruebas, se llaman destructivas porque involucran el rompimiento del concreto en un sitio determinado. En general, se restringen a la evaluación de pavimentos que muestren evidencias de fallas.

Las técnicas usadas dependen del tipo de información deseada, pero generalmente se realiza un corte en cada capa del pavimento y se extrae una muestra para pruebas posteriores.

Existen muchos tipos de pruebas destructivas para medir las características de los materiales de un pavimento. Muchos procedimientos han sido estandarizados, se debe seguir siempre un orden para obtener resultados confiables.

Desde los años 50 se han desarrollado métodos de prueba fundamentales para caracterizar la respuesta de los materiales para carga y deformación. Un gran número de estas pruebas no han sido estandarizadas por lo que es común encontrar discrepancias en las condiciones de prueba para un procedimiento particular.

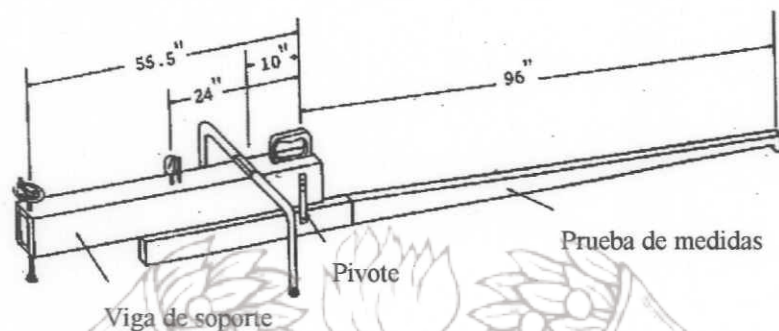
### 2.3.3. Métodos de Análisis No Destructivos.

Las medidas de deflexión son de gran utilidad para evaluar la capacidad estructural de los pavimentos en el lugar. Pueden ser usados para conocer el módulo de elasticidad de varios componentes del pavimento, para evaluar la eficiencia de transferencia de carga en las juntas y para determinar la posición y dimensión de los huecos bajo las losas de concreto.

Según el tipo de carga aplicada al pavimento, los métodos de pruebas de deflexión no destructiva se pueden dividir en tres categorías: cargas móviles lentas o estáticas, vibración constante estacionaria y cargas impulsivas.

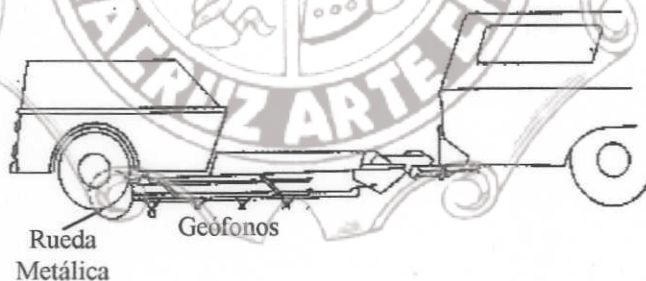
Dentro de la primer categoría los aparatos más conocidos son *La Viga Benkelman* (Figura 2.3), *El Deflectómetro de California* y *El Deflectómetro LaCroix*<sup>(11)</sup>. El mayor problema

con estos aparatos es la dificultad de obtener una referencia inmóvil para medir las deflexiones, esto hace cuestionable la validez de su uso en pavimentos rígidos.



**Figura 2.3. Viga Benkelman**

En la segunda categoría, están el *Dynalect* (Figura 2.4) y el *Road Rater*<sup>(11)</sup>. Una de las ventajas de estos aparatos es que no se requiere un punto de referencia y la desventaja es que las cargas aplicadas al pavimento no son en forma de vibración constante estacionaria y que el uso de cargas estáticas relativamente grandes puede tener algún efecto en el comportamiento del esfuerzo en los materiales.



**Figura 2.4. Dynalect**

Todos los aparatos que transmiten una carga impulsiva transitoria a la superficie del pavimento tales como los diferentes tipos de deflectómetros de peso momentáneo (FWD), forman parte de la tercer categoría. La mayor ventaja de estos aparatos es la capacidad de modelar exactamente la carga de la rueda en movimiento, en magnitud y duración y el uso

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

de una carga estática relativamente pequeña comparada con la carga impulsiva. Hay tres tipos de deflectómetros comercialmente disponibles: *Dynatest*, *KUAB* y *Phoenix*<sup>(11)</sup>.

Además está la *Prueba de Placa* (Figura 2.5), la cual consiste en someter al pavimento a una presión que aumenta por etapas midiéndose la deformación producida. Sirve para evaluar la capacidad de la subrasante, la base y en ocasiones los pavimentos completos, además, por medio de esta prueba es posible obtener parámetros como el módulo de elasticidad, módulo de reacción, entre otros.



**Figura 2.5. Prueba de Placa**

Otras pruebas no destructivas hacen uso de propagación de ondas, golpe de martillo, radar de penetración, etc.

En la presente investigación se empleó el método de análisis espectral de ondas de superficie (SASW), que es una técnica sísmica que hace uso del modo natural de la propagación de ondas en las capas medias para determinar sus propiedades. El método aplica una carga impulsiva a la superficie y los acelerómetros, localizados también en la superficie, registran la secuencia de las ondas, luego por un análisis espectral de las dos señales registradas se encuentra la variación de la velocidad de las ondas con frecuencia o longitud de onda.

Es una técnica sísmica no destructiva la cual toma ventaja de la dispersión natural de la propagación de ondas en un sistema de capas para la determinación del módulo del

sistema. Actualmente el método es usado para evaluar el módulo elástico de depósitos de suelo o sistemas de pavimento y su variación con la profundidad. Es una modificación de la técnica de ondas Rayleigh mejorado y simplificado debido al desarrollo de analizadores digitales.

En lugar de usar un vibrador estacionario en una frecuencia fija, una carga impulsiva es aplicada en la superficie del suelo o pavimento. Dos receptores verticales localizados en la superficie son usados para monitorear la secuencia de ondas generada por la propagación. Las señales eléctricas producidas por el receptor son digitalizadas y registradas por un analizador de señales dinámico. El tiempo de recorrido de las señales es transformado al dominio de frecuencia usando un algoritmo de transformada rápida de Fourier por el analizador de señal dinámica, el cual proporciona además automáticamente el espectro de carga y la función de coherencia de los dos registros.

El SASW tiene muchas aplicaciones en la caracterización de los materiales de sistemas de pavimentos. Con este método el módulo elástico y el espesor de la capa del pavimento pueden ser obtenidos. El método además podría ser utilizado como herramienta para control de calidad durante la construcción e inspección de mantenimiento.

### 2.4. PATRONES DE FALLA

En base al monitoreo de calles construidas a la fecha, se encontró que en su mayoría, los pavimentos de concreto presentan un mismo patrón de fallas con respecto a su antigüedad y a la región, es decir, en cada ciudad todos los construidos en un mismo año presentaban el mismo tipo de falla.

Las fallas que predominaron fueron: mapeo, grietas en esquina, grietas longitudinales y transversales, falta de sello en las juntas y desprendimiento en las juntas.

Las calles que se han construido de concreto hidráulico han sido en base a prueba y error, es decir, iniciaron con un método constructivo y lo fueron modificando conforme la experiencia les marcaba las fallas en dicho método.

Se aumentaron espesores, se mejoró la subestructura, se aumentó la resistencia del concreto, se cambió el método de juntas empleado, etc., de tal manera que se ha estado mejorando notablemente la técnica de pavimentación, aunque todavía no resulta ser la más adecuada.

Las primeras calles que se construyeron fueron sin material de base y con un espesor de 13cm, además se utilizó un módulo de ruptura de  $37 \text{ kg/cm}^2$ . Las juntas eran de lámina troquelada y el texturizado era casi nulo.

Posteriormente se construyeron calles de 15cm de espesor con módulos de ruptura de  $40 \text{ kg/cm}^2$ , y en casos especiales de  $50 \text{ kg/cm}^2$ . El texturizado mejoró notablemente, además se implementó la subestructura con sub-bases y bases y las juntas pasaron de lámina troquelada a zip strip y finalmente aserradas.

Aunque aún se presentan algunas fallas, el método constructivo ha mejorado considerablemente en los últimos 5 años.

A continuación se muestran fotografías de los tipos de falla más repetitivos que se encontraron en los pavimentos:



Foto 1. Grieta en Esquina



Foto 2. Grieta Longitudinal



Foto 3. Grieta Transversal



Foto 4. Desprendimiento en Junta



Foto 5. Falta de Sello en las Juntas



Foto 6. Mapeo



Foto 7. Mapeo



Foto 8. Estallamiento de Superficie



Foto 9. Estallamiento de Superficie



Foto 10. Diferencia en Elevación entre Losas a lo Largo de la Junta.



Foto 11. Agregado Expuesto.



Foto 12. Falla por Corte al Pavimento.



Foto 13. Falla por Corte al Pavimento.





Foto 14. Mala Colocación de Pasajunta. Foto 15. Mala Colocación de Pasajunta.



## 2.5. PRUEBAS DE LABORATORIO

Una vez realizado el monitoreo de calles, se seleccionaron las mas representativas del tipo de falla a las cuales se les realizarían pruebas destructivas y no destructivas para poder evaluar al pavimento y conocer sus propiedades.

**2.5.1. Pruebas Destructivas:** Se realizaron 160 pruebas destructivas en diversas calles del Estado que consistieron en la extracción de núcleos para pruebas a la compresión, así como pruebas en cada banco de materiales que se usó para la construcción de dichas calles, con el fin de obtener sus propiedades.

Todo esto con el fin de detectar la calidad del concreto empleado, de los materiales y si su resistencia era adecuada o no.

**2.5.2. Pruebas No Destructivas:** Las pruebas no destructivas se realizaron con el aparato "Dynamic Signal Analyzer (DSA)" usando el método SASW (Figura 2.6). La distancia entre la fuente (el golpe) y el primer acelerómetro debe ser igual a la distancia entre los acelerómetros. Se tomaron lecturas a distancias de 10, 12.5, 15 y 20cms.

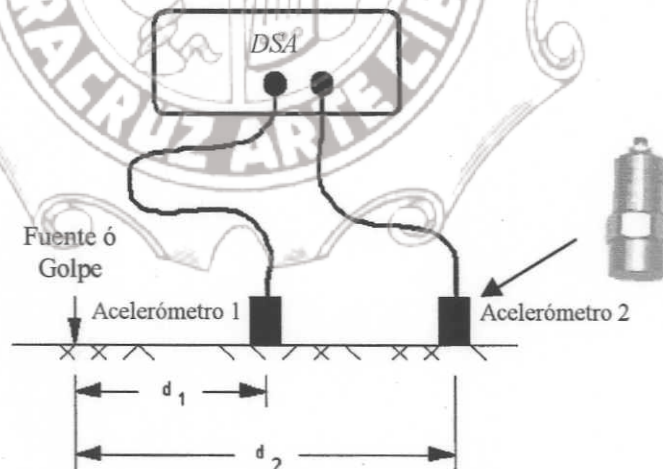


Figura 2.6. Prueba de *Spectral Analysis Surface Wave*

Después de grabar las señales de los acelerómetros, se usa el *DSA* para transformar el tiempo de la señal en el dominio de frecuencias usando el algoritmo de la *Transformada Rápida de Fourier*. Luego se calcula la diferencia de fase ( $\phi(f)$ ) entre las dos señales para cada frecuencia. La figura 2.7 muestra un registro típico de una lectura del *DSA* entre dos acelerómetros y su función de coherencia, que representa el promedio entre una señal y otra, es decir que se requiere de varios golpes que se van promediando hasta obtener el ideal, que sería con una coherencia de 1 para todas las frecuencias.

a). Registro de tiempo en el primer acelerómetro



b). Registro de tiempo en el segundo acelerómetro



c). Promedio de lecturas



d). Función de Coherencia



Figura 2.7. Registro Típico del SASW

Se calcula la diferencia de fase y el tiempo de recorrido ( $t(f)$ ) entre los acelerómetros usando la siguiente ecuación:

$$t(f) = \frac{\phi(f)}{2\pi f} \quad (2.1)$$

La diferencia de fase en la ecuación anterior ( $\phi(f)$ ) está en radianes y la frecuencia ( $f$ ) está en ciclos por segundo. La velocidad de onda se calcula:

$$V_R = \frac{d_2 - d_1}{t(f)} \quad (2.2)$$

donde  $d_2-d_1$  es la distancia entre acelerómetros. La longitud de onda que corresponde a esta velocidad se calcula por:

$$\lambda_R = \frac{V_R}{f} \quad (2.3)$$

Realizando estas ecuaciones para cada frecuencia, se puede obtener una curva experimental de dispersión que muestre la variación de la velocidad de onda contra la longitud de onda.

En este estudio se utilizó el programa "WINSASW (Windows-Spectral Analysis Surface Wave)" versión 1.23 (Joh, 1995) desarrollado por el Dr. José M. Roesset en la Universidad de Texas en Austin, que genera la curva de dispersión como se muestra en la figura 2.8.

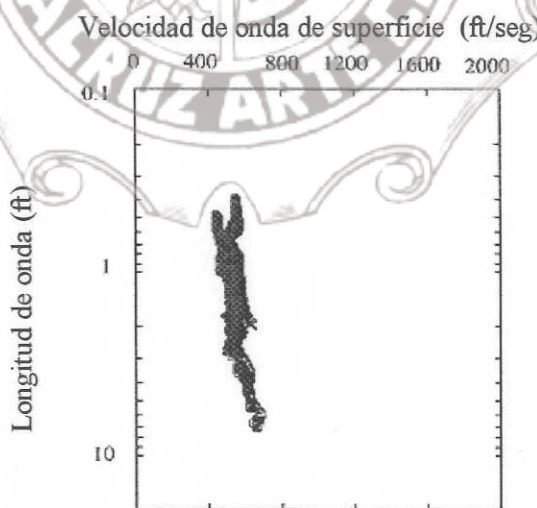


Figura 2.8. Curva de Dispersión Experimental

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Una vez que se genera esta curva de dispersión, se asume una velocidad de onda de superficie y se genera una curva de dispersión teórica. Si ésta curva teórica no es igual a la experimental, se asume un nuevo valor de velocidad de onda de cortante hasta obtener una curva teórica igual a la experimental como se ilustra en la figura 2.9.

Una vez que se obtiene esta curva, la velocidad de onda se registra como la rigidez de la capa para cada prueba. La figura 2.9 muestra un ejemplo de esto.



**Figura 2.9. Curvas de Dispersión Teórica y Experimental.**

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 2.6. ESFUERZOS Y DEFLEXIONES EN PAVIMENTOS RIGIDOS.

En el concreto, la mayor parte de las primeras contracciones se deben a los cambios de temperatura. Como es normal, después de que el calor de hidratación alcanza su valor máximo, tiende a reducirse por una menor actividad de hidratación, así como por las temperaturas más bajas en la primera noche de colocada la mezcla. Otro factor importante que se debe tomar en cuenta en las contracciones que experimenta la mezcla es la pérdida de volumen por la disminución del contenido de agua del concreto.

Al consolidarse y endurecerse la mezcla, se pierde agua debido al sangrado y a la posterior evaporación del volumen total de este líquido. Este fenómeno es más importante en los pavimentos, ya que en ocasiones se adiciona agua en exceso para lograr la trabajabilidad de la mezcla y facilitar las labores de acabado de la superficie.

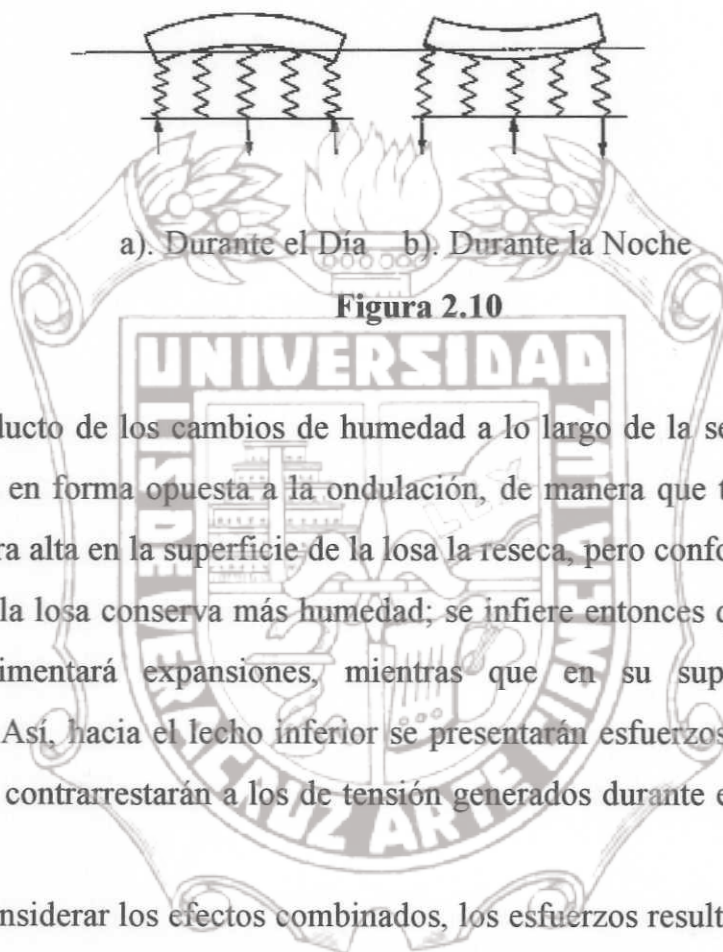
Cuando no se toman en cuenta los esfuerzos de tensión generados en la base de la losa se puede generar el agrietamiento de las losas como resultado de la resistencia por fricción que se genera en la interfase losa-capa de apoyo, pudiendo ser ésta una base o sub-base.

#### 2.6.1. Gradientes Térmicos.

Las superficies expuestas de las losas experimentan variaciones de temperatura importantes. Los cambios de temperatura y humedad son menores en las proximidades de la parte inferior de las losas y en el extremo mismo. Este fenómeno genera esfuerzos adicionales que se presentan después de que el concreto ha endurecido.

La ondulación se presenta por gradientes térmicos a lo largo de la sección transversal de las losas; la cantidad y configuración de estas ondulaciones se dan en función de las horas del día que se considere. Durante el día, la parte expuesta de la losa experimenta temperaturas mayores que los lechos inferiores de la sección, lo que produce expansiones mayores y en consecuencia se presenta la ondulación. Sin embargo, la losa tiende a “bajar” en su parte media arrastrada por su peso propio, acción que se opone a la ondulación hacia

arriba causada por la mencionada expansión, esto produce esfuerzos de tensión en el lecho inferior de la losa, mientras que en su parte superior se generan esfuerzos de compresión (Figura 2.10.a). Durante la noche el proceso se invierte (Figura 2.10.b), es decir que los esfuerzos de tensión se presentan en la parte superior o superficie expuesta de la losa.



El alabeo, producto de los cambios de humedad a lo largo de la sección transversal de la losa, se genera en forma opuesta a la ondulación, de manera que tiende a contrarrestarla. Una temperatura alta en la superficie de la losa la reseca, pero conforme se avanza hacia su lecho inferior, la losa conserva más humedad; se infiere entonces que en esta última parte la losa experimentará expansiones, mientras que en su superficie se presentarán contracciones. Así, hacia el lecho inferior se presentarán esfuerzos de compresión que de alguna manera contrarrestarán a los de tensión generados durante el día, conforme a lo ya descrito.

De hecho al considerar los efectos combinados, los esfuerzos resultantes son menores a los estimados por las fórmulas existentes, así como los medidos en pavimentos construidos.

En prácticamente ningún método se involucran los esfuerzos por temperatura y sólo se consideran inseguros los debidos a cargas. Ello se debe, entre otras cosas, a:

- El uso de juntas con o sin pasajuntas, así como acero de refuerzo, para absorber los esfuerzos por ondulación, producto de la temperatura. Si las grietas o fisuras son pequeñas, la transferencia de carga por el tránsito entre ellas será buena. Por otro lado, una vez presentadas las grietas, los esfuerzos por ondulación se ven aliviados.

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

- Cuando se diseña por fatiga, resulta impráctico combinar los efectos del tránsito y los de la temperatura. Ya que en la vida útil de un pavimento pasan millones de ejes, mientras que los movimientos en la losa por temperaturas son limitados.
- Tradicionalmente se ignoran los efectos de ondulación debido a que los esfuerzos producidos por la temperatura se pueden adicionar o sustraer a los del tránsito durante el día, pero se restan a los de tránsito los inducidos durante la noche.

### 2.6.2. Esfuerzos por Cargas de Tráfico.

Existen tres formas básicas para tomar en cuenta los esfuerzos por cargas de tráfico:

1. Fórmulas de soluciones cerradas (principalmente los trabajos de Westergaard): Se aplican sólo a una carga producida por una rueda, cuya área de contacto puede tener una configuración circular, semicircular, elíptica o semielíptica.
2. Cartas de influencia: son las desarrolladas por Pickett y Ray<sup>(13)</sup> y con ellas puede uno aplicar una configuración de varias llantas. Tanto en este caso como en el anterior, la superficie de apoyo se tipifica como una cimentación “líquida” o elástica, en una losa muy grande.
3. Método de elementos finitos: este enfoque es más razonable en los casos en que se analice una serie de capas apoyadas en una superficie líquida o de Winkler, con mecanismo de transferencias de carga entre las juntas (pasajuntas en las juntas o fricción entre las paredes de las grietas). El apoyo “líquido” de las losas se puede asemejar a una serie de resortes independientes entre sí. De esta manera, las deflexiones en un punto, debido a las cargas aplicadas en él, será sólo función directa a esta última e independiente a las fuerzas aplicadas en otros puntos.



### 2.6.3. Esfuerzos Debidos a Fricción.

Los esfuerzos de fricción en la interfase losa-capa de apoyo afecta al concreto, a las varillas de sujeción, e incluso al acero de refuerzo, cuando éste existe. Para pavimentos de concreto sin refuerzo, el espaciamiento de juntas deberá proponerse de manera que la fricción no provoque grietas.

La cuantía y distribución del acero entre juntas longitudinales (o las varillas de sujeción) también serán función de los esfuerzos esperados.

### 2.6.4. Cambios Volumétricos en el Concreto.

Los cambios de temperatura y de humedad hacen que las losas experimenten movimientos por cambios de volumen. De esta manera se presentan esfuerzos de compresión y de tensión en el fondo de la losa de manera alternada, dependiendo de la hora del día. Como resultado de todo ello y si no se toman las medidas preventivas, se presentan grietas incontroladas.

Otro efecto es la abertura en juntas, con la consiguiente reducción en la eficiencia de la transferencia de cargas entre las losas contiguas.

La losa tiende a moverse de las orillas hacia el centro por simetría; sin embargo, la capa de apoyo tenderá a restringir este movimiento, generándose así los esfuerzos de fricción.

Lógicamente, hacia el centro estos esfuerzos serían cero, ya que ahí no existe movimiento.

El máximo se presenta a cierta distancia del centro.

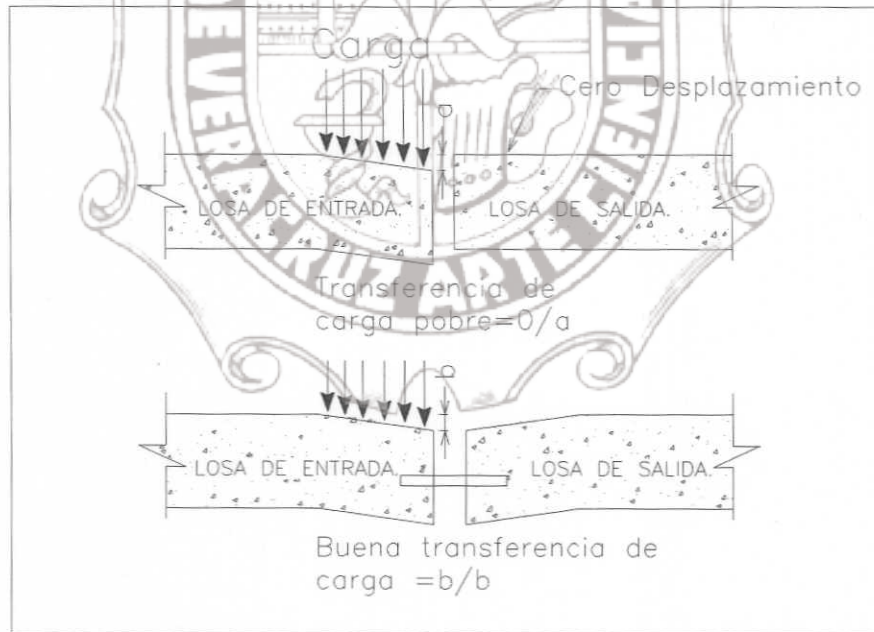
### 2.6.5. Transmisión de Cortante por Fricción entre Losas.

Este tipo de transmisión es la producida por el corte parcial del concreto para fabricar la grieta sin el empleo de pasajuntas. La acción de fricción en las caras de una grieta o junta provocada en una sección del concreto se origina por las caras expuestas del agregado

grueso del concreto. En el caso de juntas fabricadas con serrado, normalmente aparecerá una grieta por abajo del corte. Esta región trabajará a fricción, al ser solicitada por las cargas dinámicas de tránsito. Este mecanismo de transferencia de carga funciona mejor en caminos con una sub-base estabilizada, o con una que no sea muy susceptible a la erosión. Además, funciona bien en caminos con bajo porcentaje de tránsito pesado.

Las barras de sujeción o pasajuntas se utilizan en las juntas longitudinales para ligar dos losas contiguas, de modo que se garantice una buena transferencia de carga entre tales elementos.

La acción del pasajunta permite que la carga del vehículo, tanto cuando entra como cuando sale de ésta, se distribuya entre las dos losas. Es así que la **transferencia de carga** (ver figura 2.11) puede definirse como la *capacidad que tengan dos secciones de losa para transmitir parte de la carga aplicada de una sección a otra.*



**Figura 2.11. Concepto de Transferencia de Carga**

## CAPITULO III. IDEALIZACION DE LA ESTRUCTURA

## 3.1. FLEXION DE PLACAS

## 3.1.1. Ecuación Diferencial de la Flexión de Placas.

Comenzamos la teoría de la flexión de las placas por el problema sencillo de la flexión de una placa larga rectangular sometida a una carga transversal constante, a lo largo de la placa. La superficie flexada de una porción de una placa semejante, tomada a una gran distancia de los extremos puede suponerse cilíndrica, con su eje paralelo a la longitud de la placa. Podemos pues limitarnos al estudio de la flexión de una franja elemental, cortada en la placa según dos planos perpendiculares a la longitud de la placa y de ancho unidad. La flecha de esta franja está dada por una ecuación diferencial semejante a la de la flecha de una viga flexada.

Para obtener esta ecuación, se considera una placa de espesor uniforme  $t$  y se toma el plano  $xy$  como plano medio de la placa antes de la aplicación de la carga, es decir el plano equidistante de sus dos caras. Se hace coincidir el eje  $y$  con uno de los bordes longitudinales de la placa y se orienta el eje de las  $z$  hacia abajo como indica la figura 3.1.

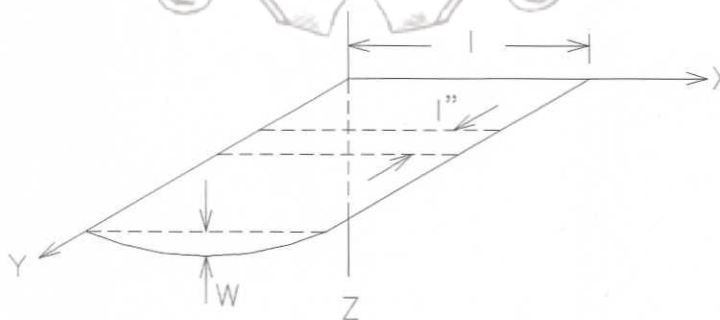


Figura 3.1.

Entonces si la anchura de la placa es  $l$ , la banda elemental puede considerarse como una barra rectangular de longitud  $l$  y de altura  $t$ . Calculando las tensiones de flexión en tal barra se supondrá como en la teoría ordinaria de vigas, que las secciones transversales de la barra permanecen planas durante la flexión, no sufriendo más que un giro con respecto a sus fibras neutras. Si sus extremos no soportan fuerzas normales, la superficie neutra de la barra coincide con la superficie media de la placa y el alargamiento unitario de una fibra paralela al eje  $x$  es proporcional a su distancia  $z$  a la superficie media. La curvatura de la deformada o línea elástica puede ser considerada igual a  $-d^2w/dx^2$  donde  $w$ , flecha de la barra en la dirección de las  $z$ , se supone pequeña en comparación de  $l$ . La deformación unitaria  $\epsilon_x$  de una fibra situada a una distancia  $z$  de la superficie media es  $-zd^2w/dx^2$ .



Figura 3.2.

Según la ley de Hooke, las deformaciones unitarias  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$  en función de las tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , que actúan sobre el elemento rayado de la figura 3.2 son:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad (3.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = 0$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. La deformación lateral en la dirección de las  $y$  debe ser nula a fin de mantener la continuidad en la placa durante la flexión, de donde se deduce, según la segunda de las ecuaciones

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

(3.1), que  $\sigma_y = \nu\sigma_x$ . Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones (3.1), se obtiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{(1-\nu^2)\sigma_x}{E} \\ \sigma_x &= \frac{E\varepsilon_x}{1-\nu^2} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dx^2}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Si la placa está sometida a la acción de fuerzas de tensión o de compresión actuando en la dirección  $x$  y distribuidas uniformemente a lo largo de los lados longitudinales, la tensión directa correspondiente se suma a la tensión (3.2).

Conociendo la expresión de la tensión de la flexión  $\sigma_x$ , se obtiene por integración el momento flector en la franja elemental:

$$M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz = -\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}\quad (3.3)$$

Con la notación

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\quad (3.4)$$

se representa la ecuación de la deformación de la banda elemental bajo la forma siguiente:

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M\quad (3.5)$$

donde la cantidad  $D$ , que toma el lugar de la cantidad  $EI$  en el caso de las vigas, se llama *rigidez a flexión* de la placa.

En la práctica el problema es más complicado, pues la placa está habitualmente fija en su contorno y sus bordes no están libres. Tal forma de apoyo provoca las reacciones de tensión a lo largo del contorno tan pronto como aparece la flecha. Estas reacciones dependen del valor de la flecha y modifican el valor del momento flector  $M$  de la ecuación (3.5). El problema se reduce al estudio de la flexión de una franja elemental sometida a la

acción de una carga transversal y también a una fuerza axial que depende de la flecha de la franja.

### 3.1.2. Flexión de una Placa sobre Cimentación Elástica

Una placa cargada transversalmente puede descansar sobre una cimentación elástica, como en el caso de una carretera de concreto o una pista de aterrizaje. Consideremos el problema de flexión de una placa larga rectangular uniformemente cargada, descansando toda la superficie sobre una cimentación elástica y rigidamente apoyada en los bordes (figura 3.3).

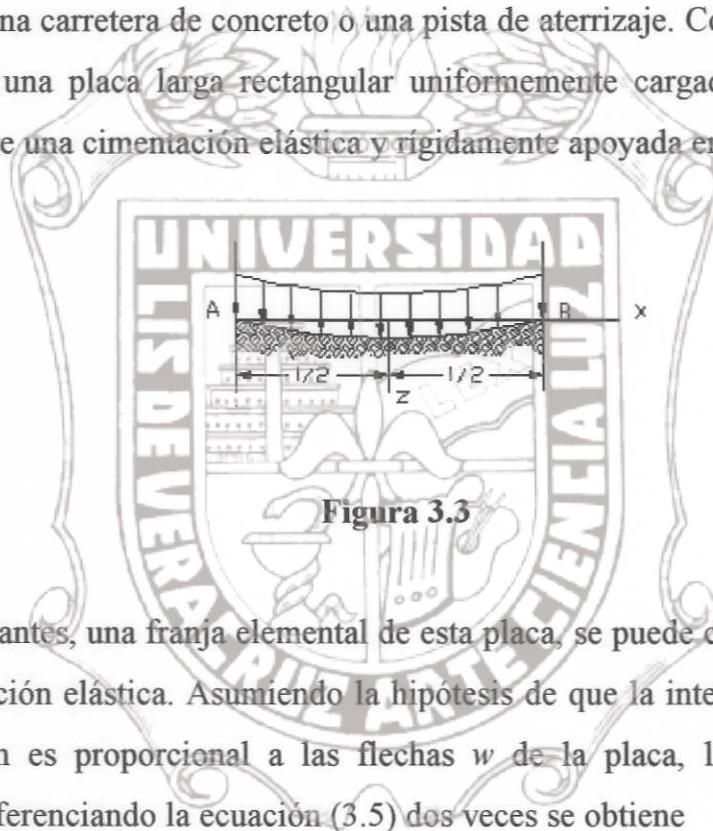


Figura 3.3

Usando como antes, una franja elemental de esta placa, se puede considerar como una viga sobre cimentación elástica. Asumiendo la hipótesis de que la intensidad de la reacción de la cimentación es proporcional a las flechas  $w$  de la placa, la expresión  $kw$  da esta intensidad. Diferenciando la ecuación (3.5) dos veces se obtiene

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw \quad (3.6)$$

donde  $q$  es la intensidad de la carga que actúa sobre la placa y  $k$  es el *módulo de reacción de la cimentación*. El valor numérico del módulo depende en gran parte de las propiedades del terreno de apoyo; en el caso de una losa de pavimento de gran extensión, este valor se puede estimar por medio del diagrama de la tabla 3.1<sup>(2)</sup>.

**Tabla 3.1**

Valores de Cimentación

Módulo $k$ en $\text{kg/cm}^3$									
3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
Características del suelo como cimiento, sub-base o base									
Cimiento muy malo	Cimiento malo	Cimiento de aceptable a bueno	Cimiento excelente	Buena sub-base	Buena base	Base óptima			
G=Grava		P=Mal graduado			GW				
S=Arena					GC				
L=Compresibilidad baja o media									
M=Arena muy fina, limo					GP				
H=Compresibilidad alta									
C=Arcilla					GF				
F=Finos, partículas inferiores a 0.1 mm					SW				
					SC				
O=Orgánico					SP				
W=Bien graduado					SF				
CH		ML							
OH	CL								
	OL								
MH									

### 3.2. ELEMENTO FINITO

Un elemento finito es una subregión de un medio continuo discretizado, es decir una de medida finita, y usualmente tiene una geometría simple. El método de elemento finito nos permite convertir un problema con un número infinito de grados de libertad a uno con un número finito con el fin de simplificar el proceso de solución. Aunque la aplicación original fue en el área de mecánica de sólidos, ha sido usado en muchos otros campos con bases matemáticas similares. En cualquier caso es un método orientado a la simplificación del problema que puede ser implementado en programas de computadora.

Para analizar cualquier sólido se requiere encontrar una función de esfuerzo o desplazamiento que satisfaga la ecuación diferencial de equilibrio, las ecuaciones esfuerzo-deformación y las condiciones de compatibilidad en cualquier punto del continuo, incluyendo las condiciones de contorno.

La discretización de ecuaciones diferenciales por el método de diferencias finitas tiene la desventaja de que las condiciones de contorno son difíciles de satisfacer. Y además la exactitud de los resultados es generalmente no muy buena.

En cambio el método de Elemento Finito hace una aproximación basada en un campo de desplazamientos, un campo de esfuerzos, o una mezcla de ambos para cada elemento.

#### 3.2.1. Formulación de Placas en Elemento Finito

Siguiendo el procedimiento de la teoría de vigas es natural considerar la teoría de placas, que no es una teoría que desarrolla todo el campo de ecuaciones. Esto significa que es una aproximación que reduce el problema tridimensional a un problema bidimensional. Sin embargo, para muchas aplicaciones proporciona soluciones realistas, especialmente si la placa es delgada.

Generalmente hablando, una placa es una estructura con espesor  $t$  que es pequeño comparado con cualquier otra dimensión de la placa (ver figura 3.4). Por otra parte, una



placa es cargada por fuerzas normales al plano de la placa. Para ser mas específicos, introduciremos un sistema de coordenadas y asumiremos que la configuración de la placa es simétrica con respecto al plano  $xy$ , como se muestra en la figura 3.4. Esto significa que el plano  $xy$  esta localizado en el plano medio de la placa, e incluso aunque el espesor de la placa  $t$  en la dirección  $z$  puede variar, lo hace simétricamente con respecto al plano  $xy$ . La placa es cargada por una carga transversal  $q$  medida como positiva en la dirección  $z$ . Esta carga  $q$  tiene unidades de fuerza/área. La deflexión  $w$  de la placa es medida como positiva en la dirección  $z$ .



Figura 3.4.

### 3.2.2. Condiciones de Equilibrio

Para secciones normales a los ejes  $x$  e  $y$ , las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  existen. Esas componentes de esfuerzo dan lugar a las siguientes ecuaciones de fuerzas y momentos:

$$V_{xz} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xz} dz$$

$$V_{yz} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yz} dz \quad (3.7)$$

y

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_{xx} dz$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_{yy} dz \quad (3.8)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_{xy} dz$$

Para ilustrar las cantidades definidas por (3.7) y (3.8), considere primero un plano de corte en la placa normal al eje  $x$ ; como muestra la figura 3.5. Las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{xz}$  que actúan en este plano proporcionan las cantidades  $M_{xx}$ ,  $M_{xy}$  y  $V_{xz}$  definidas por (3.7) y (3.8) como se muestra en la figura 3.5. Esto significa que  $M_{xx}$  es el *momento flexionante* por unidad de longitud,  $M_{xy}$  es el *momento torcionante* por unidad de longitud y  $V_{xz}$  es la *fuerza cortante vertical* por unidad de longitud. Las direcciones positivas de  $M_{xx}$ ,  $M_{xy}$  y  $V_{xz}$  son también las mostradas en la figura 3.5, y para ilustrar los momentos de una manera conveniente, ha sido adoptada la convención estándar de doble flecha.

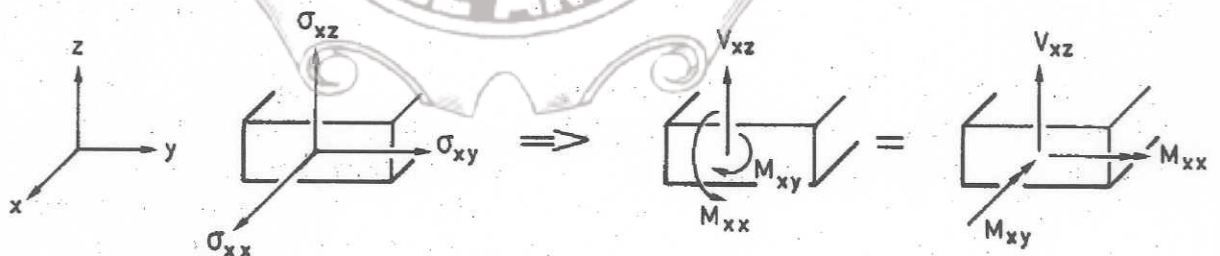


Figura 3.5.

Considerando enseguida un plano de corte en la placa y normal al eje  $y$ , las componentes de esfuerzo  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{yz}$  actuando en este plano nos dan el momento torcionante  $M_{yx}$  por unidad de longitud, el momento flexionante  $M_{yy}$  por unidad de longitud y la fuerza

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

cortante vertical  $V_{yz}$  por unidad de longitud. Las direcciones positivas de estas cantidades se muestran en la figura 3.6.

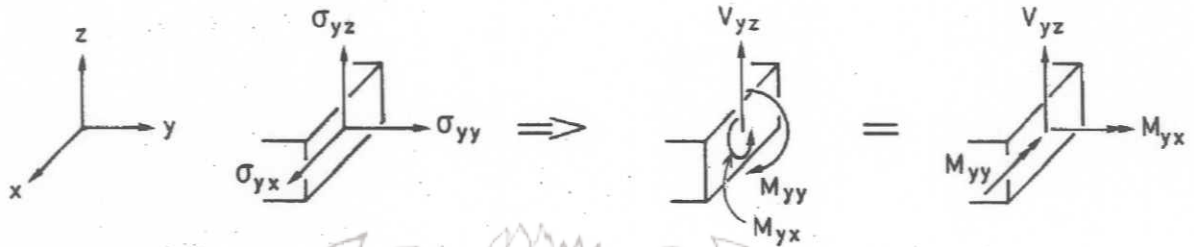


Figura 3.6.

En suma para esos momentos y fuerzas cortantes, notamos que de las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$  también resultan las siguientes *fuerzas horizontales*:

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \\
 N_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz \\
 N_{xy} &= N_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Las fuerzas actúan en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 3.7,  $N_{xx}$  es la *fuerza normal* por unidad de longitud en la dirección  $x$ ,  $N_{yy}$  es la *fuerza normal* por unidad de longitud en la dirección  $y$  y  $N_{xy}$  es la *fuerza cortante horizontal* por unidad de longitud.

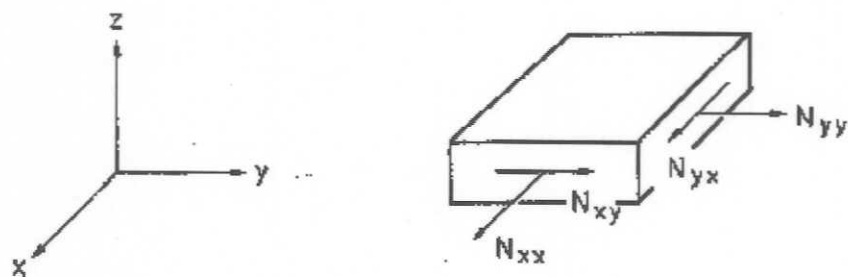


Figura 3.7.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Ahora vamos a establecer las condiciones de equilibrio para la placa. Se asume que esta cargada sólo por cargas transversales. Por lo tanto, como no resultan fuerzas actuando en el plano  $xy$ , por equilibrio horizontal se requiere que:

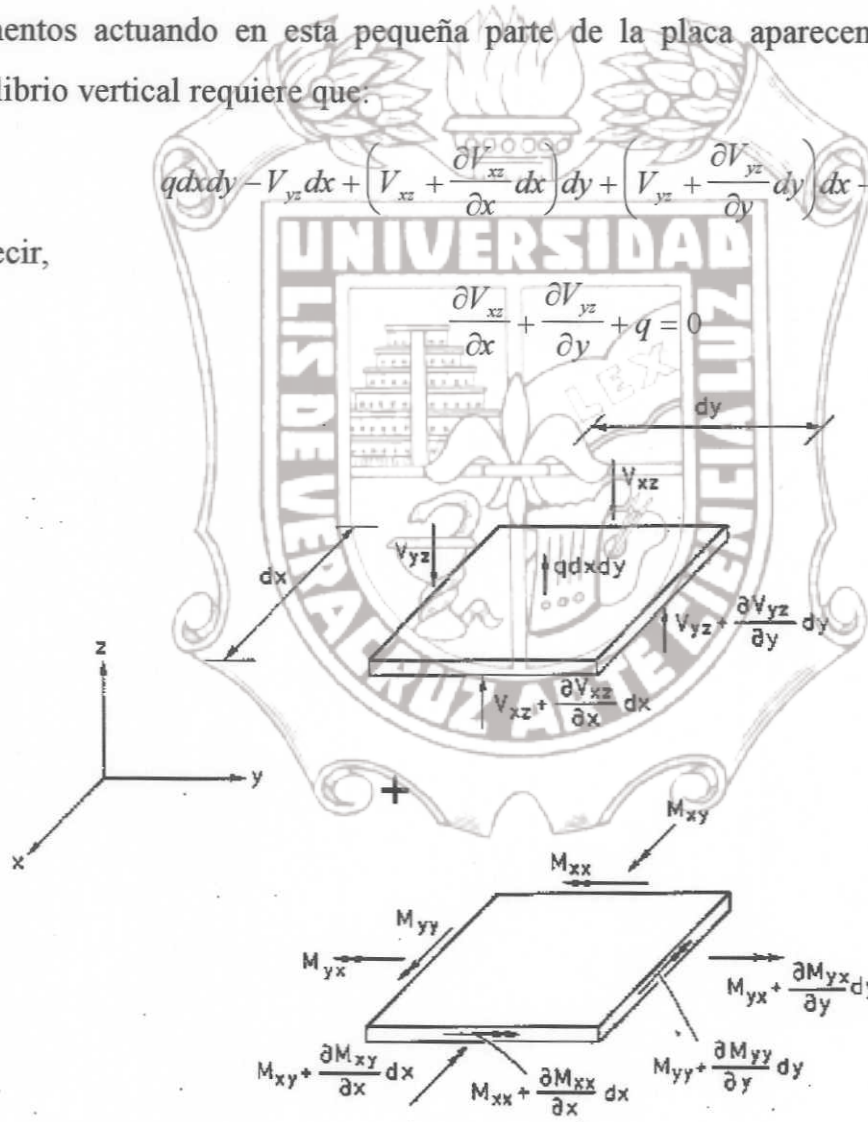
$$N_{xx} = N_{yy} = N_{xy} = 0 \quad (3.10)$$

Consideremos ahora una infinitesimalmente pequeña parte de la placa como se muestra en la figura 3.8. Como no resultan fuerzas actuando en el plano  $xy$ , todas las fuerzas y los momentos actuando en esta pequeña parte de la placa aparecen en la figura 3.8. El equilibrio vertical requiere que:

$$q dx dy - V_{yz} dx + \left( V_{xz} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} dx \right) dy + \left( V_{yz} + \frac{\partial V_{yz}}{\partial y} dy \right) dx - V_{xz} dy = 0 \quad (3.11)$$

es decir,

$$\frac{\partial V_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}}{\partial y} + q = 0 \quad (3.12)$$



**Figura 3.8.**

Consideremos ahora el equilibrio de momentos acerca del lado derecho de la pequeña parte de la placa, que es paralela al eje  $x$  y obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -q dx dy \frac{1}{2} dy + V_{yz} dx dy - \left( V_{xz} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} dx \right) dy \frac{1}{2} dy + V_{xz} dy \frac{1}{2} dy \\
 & + M_{yy} dx - \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left( M_{yy} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy \right) dx + M_{xy} dy = 0
 \end{aligned}$$

es decir,

$$-q \frac{1}{2} dy + V_{yz} - \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} \frac{1}{2} dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = 0$$

Como  $dy$  es una cantidad infinitamente pequeña tenemos que

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = V_{yz} \tag{3.13}$$

Considerando el equilibrio de momentos acerca de uno de los lados paralelos al eje  $y$ , derivamos en una manera similar de la figura 3.8 que:

$$\frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = V_{xz} \tag{3.14}$$

### 3.2.3. Relaciones de Cinemática

Se asume que la placa se deforma de acuerdo a la teoría de Bernoulli para el comportamiento de vigas, es decir que las secciones planas normales al plano medio permanecen planas durante la deformación. De la figura 3.9 obtenemos los siguientes desplazamientos en las direcciones  $x, y$  y  $z$ :

$$\begin{aligned}
 u_x &= u^o - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 u_y &= v^o - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 u_z &= w
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

donde  $u^o$  y  $v^o$  son los desplazamientos del plano medio en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Tenemos que:

$$u^o = u^o(x,y); \quad v^o = v^o(x,y) \quad y \quad w = w(x,y) \quad (3.16)$$

donde suponemos que la deflexión  $w$  es independiente de  $z$ , es decir  $w=w(x,y)$ . De las ecuaciones (3.15) y (3.16), las deformaciones resultan

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u^o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v^o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$(3.18)$$

**Figura 3.9.**

### 3.2.4. Relaciones Constitutivas.

Se asume que la ley de Hooke es aplicable. Así como en el comportamiento de viga, no es posible obtener una correspondencia entre los esfuerzos cortantes  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  diferentes de cero necesario para mantener equilibrio y las deformaciones cortantes  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  iguales a cero. Sin embargo, asumimos que la placa es delgada, es decir los esfuerzos mayores serán  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$  que se ilustran en la figura 3.10.

Esta observación sugiere que la suposición de esfuerzos planos es más aplicable, es decir:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (3.19)$$

donde:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Por elasticidad isotrópica, la matriz  $\mathbf{D}$  de esfuerzos planos es dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

En adelante, sin embargo, la matriz  $\mathbf{D}$  puede tomar cualquier forma. Además observamos que es posible considerar deformaciones iniciales,  $\varepsilon_0$ , por ejemplo, en términos de las deformaciones térmicas. En este caso la ecuación (3.19) es reemplazada por:

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon - \mathbf{D}\varepsilon_0 \quad (3.22)$$

pero por simplicidad consideraremos la relación constitutiva en la forma dada por la ecuación (3.19).

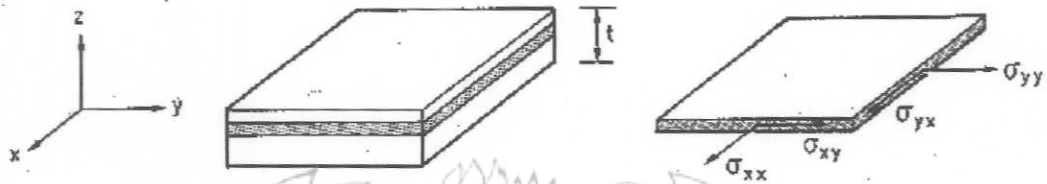


Figura 3.10.

La ecuación (3.17) de deformación puede ser escrita en la forma

$$\epsilon = \epsilon^o - zk \tag{3.23}$$

donde

$$\epsilon^o = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^o}{\partial x} \\ \frac{\partial v^o}{\partial y} \\ \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

y  $k$  denota la *matriz de la curvatura*. Enfatizamos que  $\epsilon^o$  expresa la deformación en el plano medio y podría confundirse con la deformación inicial dada por  $\epsilon_o$ . Usando las ecuaciones (3.19) y (3.23) obtenemos

$$\sigma = D\epsilon^o - zDk \tag{3.25}$$

Definimos la matriz  $M$  por



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Luego la expresión para los momentos dada por (3.8) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.27) y recordando que ni  $\epsilon^o$  ni  $k$  dependen de la coordenada  $z$  obtenemos

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \epsilon^o \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z dz - \mathbf{D} k \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \quad (3.28)$$

donde se asume que  $\mathbf{D}$  es independiente de  $z$ , es decir

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, y) \quad (3.29)$$

Tenemos

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z dz = 0; \quad \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz = \frac{t^3}{12} \quad (3.30)$$

Esto es, sin hacer caso del valor de  $\epsilon^o$ , la ecuación (3.28) se reduce a

$$\mathbf{M} = -\tilde{\mathbf{D}} k \quad \text{donde } \tilde{\mathbf{D}} = \frac{t^3}{12} \mathbf{D} \quad (3.31)$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

Con  $\sigma$  definida por la ecuación (3.20), las fuerzas horizontales dadas por (3.10) pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz \quad (3.32)$$

Usando la ecuación (3.25) obtenemos

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^o t \quad (3.33)$$

En el presente caso, no resultan fuerzas horizontales actuando en el plano medio y concluimos que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

De acuerdo con las expectativas, muestran que no hay deformaciones en el plano medio. Sin embargo, incluso en la posición donde las fuerzas horizontales son diferentes de cero, observamos de (3.31) y (3.33) que, mientras los momentos  $\mathbf{M}$  son controlados por la matriz de curvatura  $\mathbf{k}$ , las fuerzas horizontales son determinadas por el esfuerzo en el plano  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ . Esto implica que el fenómeno de flexión y deformación del plano medio son fenómenos *desacoplados*. Si el plano medio se deforma, es decir, si  $\boldsymbol{\varepsilon}^o \neq \mathbf{0}$ , tenemos lo que se llama *acción de la membrana*.<sup>(8)</sup>

Cuando no existen fuerzas horizontales actuando en el plano medio, las ecuaciones (3.23) y (3.25) se reducen a:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma} = -z\mathbf{D}\mathbf{k} \quad (3.35)$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

Las condiciones de equilibrio fueron dadas por (3.12) y (3.14). Como sólo los momentos pueden ser expresados en términos de cantidades cinemáticas, eliminamos las fuerzas cortantes  $V_{xz}$  y  $V_{yz}$  de (3.12) y (3.14). Por tanto, diferenciamos (3.13) con respecto a  $y$  y (3.14) con respecto a  $x$ ; sumamos los resultados y usamos (3.12) para obtener:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0 \quad (3.36)$$

Esta condición de equilibrio permanece sin tomar en cuenta la ley constitutiva. Vamos ahora a introducir la matriz operador diferencial  $\dot{\nabla}$  definido por:

$$\dot{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Esto significa que la condición de equilibrio (3.36) puede ser escrita como:

$$\dot{\nabla}^* \mathbf{M} + q = 0 \quad (3.38)$$

Por otra parte, podemos reescribir la ecuación (3.24) como

$$\mathbf{k} = \dot{\nabla} w \quad (3.39)$$

es decir, (3.31) toma la forma

$$\mathbf{M} = -\tilde{\mathbf{D}} \dot{\nabla} w \quad (3.40)$$

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana

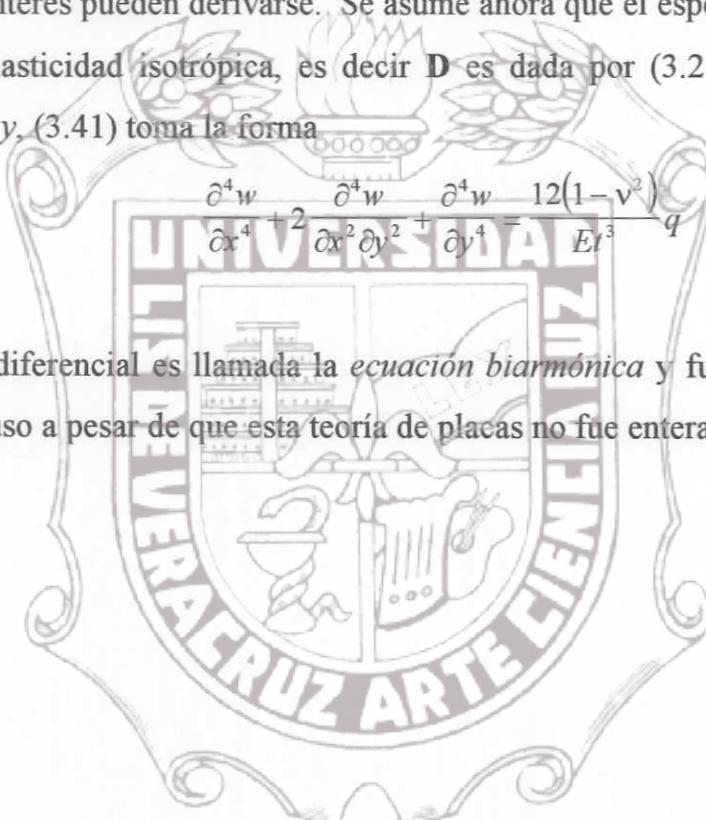
Introduciendo esta expresión en la ecuación (3.38) tenemos la siguiente ecuación diferencial para la teoría de placas:

$$\nabla^* \tilde{\mathbf{D}} \nabla^* w = q \tag{3.41}$$

Cuando la deflexión  $w$  ha sido determinada de esta ecuación diferencial, todas las cantidades de interés pueden derivarse. Se asume ahora que el espesor  $t$  es constante y que se considera elasticidad isotrópica, es decir  $\mathbf{D}$  es dada por (3.21). Si, en suma,  $\mathbf{D}$  no depende de  $x$  y  $y$ , (3.41) toma la forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} q \tag{3.42}$$

Esta ecuación diferencial es llamada la *ecuación biarmónica* y fue derivada en 1811 por Lagrange, incluso a pesar de que esta teoría de placas no fue enteramente satisfactoria.



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 3.2.5. Elemento Placa Rectangular

El elemento placa rectangular que se muestra en la figura 3.11 es llamado *MZC*, ya que fue desarrollado por Melosh, Zienkiewicz y Cheung<sup>(9)</sup>. Este considera tres grados de libertad:  $w$  que es el desplazamiento vertical,  $\partial w/\partial x$  que es el giro en el eje  $x$  y  $\partial w/\partial y$  que es el giro en el eje  $y$ .

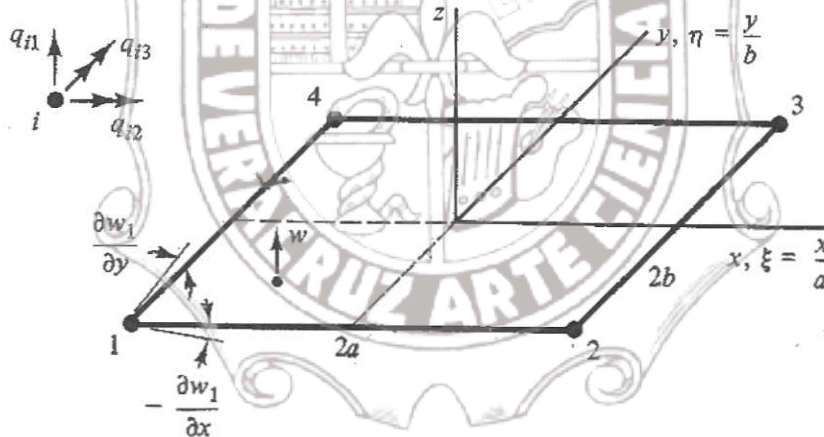
Escrito matricialmente:

$$q_i = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}\} = \left\{ w_i, \frac{\partial w_i}{\partial y}, -\frac{\partial w_i}{\partial x} \right\} \quad (i=1,2,3,4) \quad (3.43)$$

Las fuerzas nodales correspondientes a los desplazamientos son:

$$p_i = \{p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}\} = \{p_{zi}, M_{xi}, M_{yi}\} \quad (i=1,2,3,4) \quad (3.44)$$

El símbolo  $p_{zi}$  denota una fuerza en dirección  $z$ ,  $M_{xi}$  y  $M_{yi}$  son momentos en el eje  $x$  y en el  $y$ .



**Figura 3.11. Elemento Rectangular MZC**

La función de desplazamiento para este elemento es:

$$w = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^3 + c_8\xi^2\eta + c_9\xi\eta^2 + c_{10}\eta^3 + c_{11}\xi^3\eta + c_{12}\eta^3 \quad (3.45)$$

Con esto es posible derivar las funciones de forma como:

$$F_i = [f_{i1} \ f_{i2} \ f_{i3}] \quad (3.46)$$

donde:

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\begin{aligned}
 f_{i1} &= \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(2 + \xi_0 + \eta_0 + \xi^2 - \eta^2) \\
 f_{i2} &= -\frac{1}{8}b\eta_i(1 + \xi_0)(1 - \eta_0)(1 + \eta_0)^2 \\
 f_{i3} &= \frac{1}{8}a\xi_i(1 - \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \xi_0)^2
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

y,

$$\xi_0 = \xi_i \xi \quad \eta_0 = \eta_i \eta \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.48}$$

Para valores de  $\xi_i$  y  $\eta_i$  pertenecientes a las esquinas de un rectángulo o un cuadrilátero, se presenta la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2**

i	1	2	3	4
$\xi_i$	-1	1	1	-1
$\eta_i$	-1	-1	1	1

Escribiendo el operador diferencial lineal generalizado  $\bar{d}$  como:

$$\bar{d} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & \frac{2\partial^2}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} \tag{3.49}$$

La matriz de esfuerzos-desplazamientos generalizada  $\bar{B}$  puede escribirse como:

$$\bar{B}_i = \bar{d}f_i = \begin{bmatrix} f_{i1,xx} & f_{i2,xx} & f_{i3,xx} \\ f_{i1,yy} & f_{i2,yy} & f_{i3,yy} \\ 2f_{i1,xy} & 2f_{i2,xy} & 2f_{i3,xy} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.50}$$

Y para un material isotrópico, la matriz de esfuerzo-deformación para este caso es:

$$E = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

donde:

$$\lambda = \frac{1 - \nu}{2} \tag{3.52}$$

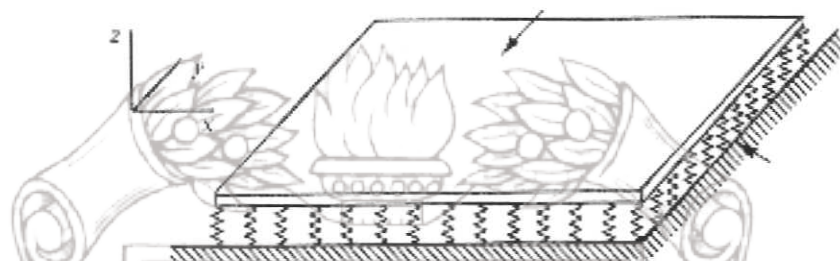
La matriz de rigidez para el elemento se puede entonces calcular de:

$$K = \int_A \bar{B}^T \bar{E} \bar{B} dA = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{B}^T \bar{E} \bar{B} d\xi d\eta \quad (3.53)$$

Y la matriz de rigidez para el elemento sobre cimentación elástica, como el que se muestra en la figura 3.12, será:

$$K_r = k_z \int_A f^T f dA \quad (3.54)$$

donde  $k_z$  es el módulo de cimentación.



**Figura 3.12. Placa sobre Cimentación Elástica**

Para calcular los giros y desplazamientos de una placa sobre cimentación elástica usando el elemento discutido, se elaboró un programa de computación en lenguaje FORTRAN, el cual se encuentra listado en el Apéndice B y la explicación de su funcionamiento se detalla en el Capítulo IV.

## 3.3. FLEXION DE VIGAS

### 3.3.1. Ecuación Diferencial de la Flexión de Vigas.

Consideremos el elemento de la figura 3.13. Tomando los ejes como muestra la figura y llamando  $U_1, U_2, U_3, U_4$  a los desplazamientos como se indica.



Figura 3.13.

### 3.3.2. Cinemática.



Figura 3.14.

Para pequeñas deformaciones:  $\theta \approx \tan \theta = \frac{\partial v}{\partial x}$

La ecuación de la deformación a una distancia "x" resulta:

$$u_{(x)} = u_0 - Y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.55)$$

Derivando cada miembro con respecto a "x":



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - Y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.56)$$

o lo que es igual:

$$\varepsilon_{xx} = -Y\Psi \quad (3.57)$$

despejando obtenemos:

$$\Psi = -\frac{\varepsilon_{xx}}{Y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.58)$$

### 3.3.3. Ley Constitutiva.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\tau_{xx} - \nu(\tau_{yy} + \tau_{zz})] \quad (3.59)$$

como  $\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$  para nuestro caso, tenemos que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E} \quad (3.60)$$

### 3.3.4. Equilibrio.

$$\tau_{xx} = \frac{N_{xx}}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (3.61)$$

no consideramos fuerza axial ni tenemos momentos con respecto al eje "y" por lo que:

$$\tau_{xx} = -\frac{M_z}{I_z} y \quad (3.62)$$

sustituyendo (3.62) en (3.60) y a su vez en (3.58) resulta:

$$\Psi = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

Consideremos ahora la figura 3.15, haciendo suma de fuerzas en "y" con la dirección positiva hacia arriba, obtenemos:

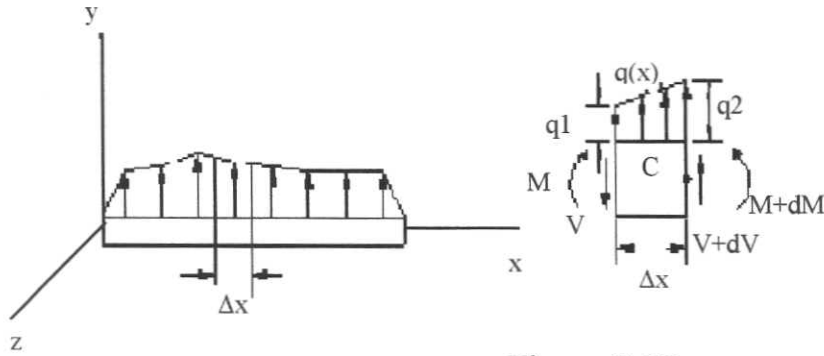


Figura 3.15.

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$kv\Delta x - V + V + \Delta V + [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha]\Delta x = 0$$

$$kv\Delta x + \Delta V + [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha]\Delta x = 0$$

$$kv + \frac{\Delta V}{\Delta x} + [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha] = 0$$

Tomando límites cuando  $\Delta x$  tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} kv + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha] = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q(x) - kv(x) \tag{3.64}$$

haciendo suma de momentos en el punto "c" de la figura 3.15 con la dirección positiva en sentido contrario a las manecillas del reloj, obtenemos:

$$\sum M_c = 0$$

$$-(kv\Delta x)(\beta\Delta x) + V\Delta x - M + M + \Delta M - [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha]\Delta x(\beta\Delta x) = 0$$

$$-kv\beta\Delta x^2 + V\Delta x + \Delta M - [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha]\beta\Delta x^2 = 0$$

$$-kv\beta\Delta x + V + \frac{\Delta M}{\Delta x} - [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha]\beta\Delta x = 0$$

Tomando límites cuando  $\Delta x$  tiende a cero:

$$-\lim_{\Delta x \rightarrow 0} kv\beta\Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} V + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [q_1 + (q_2 - q_1)\alpha]\beta\Delta x = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = -V \tag{3.65}$$

Derivamos con respecto a "x" y sustituimos la ecuación (3.64)

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dV}{dx} = q_{(x)} + kv_{(x)} \tag{3.66}$$

Recordando la ecuación (3.63) tenemos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M_z}{EI_z}; \quad EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M_z \tag{3.63'}$$

Derivando con respecto a "x" tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} = q_{(x)} + kv_{(x)} \tag{3.67}$$

Considerando  $EI_z$  constante tenemos:

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = q_{(x)} + kv_{(x)} \tag{3.68}$$

La ecuación anterior es la ecuación diferencial de la viga para deformaciones producidas por flexión.

Consideraremos el siguiente polinomio para la solución de ésta ecuación:

$$v_{(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \tag{3.69}$$

Condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} v_{(0)} &= u_1 & v_{(L)} &= u_3 \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} &= u_2 & \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} &= u_4 \end{aligned}$$

Si calculamos la derivada de la ecuación (3.69) y hacemos las sustituciones correspondientes obtenemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_0 \\ u_2 &= C_1 \\ u_3 &= C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 \\ u_4 &= C_1 + 2C_2L + 3C_3L^2 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Escribiéndolo matricialmente tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \tag{3.70'}$$

De donde

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.69) resulta:

$$\begin{aligned} v_{(x)} = & \left[ \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) u_1 + \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) u_2 + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) u_3 \right. \\ & \left. + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) u_4 \right] \end{aligned} \tag{3.72}$$

Donde a los coeficientes de los desplazamientos  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , se les llama *Polinomios de Interpolación de Hermite*, representados por  $N_1, N_2, N_3$  y  $N_4$  en función de  $x$ :

$$\begin{aligned} N_{1(x)} &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_{2(x)} &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_{3(x)} &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_{4(x)} &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \tag{3.73}$$

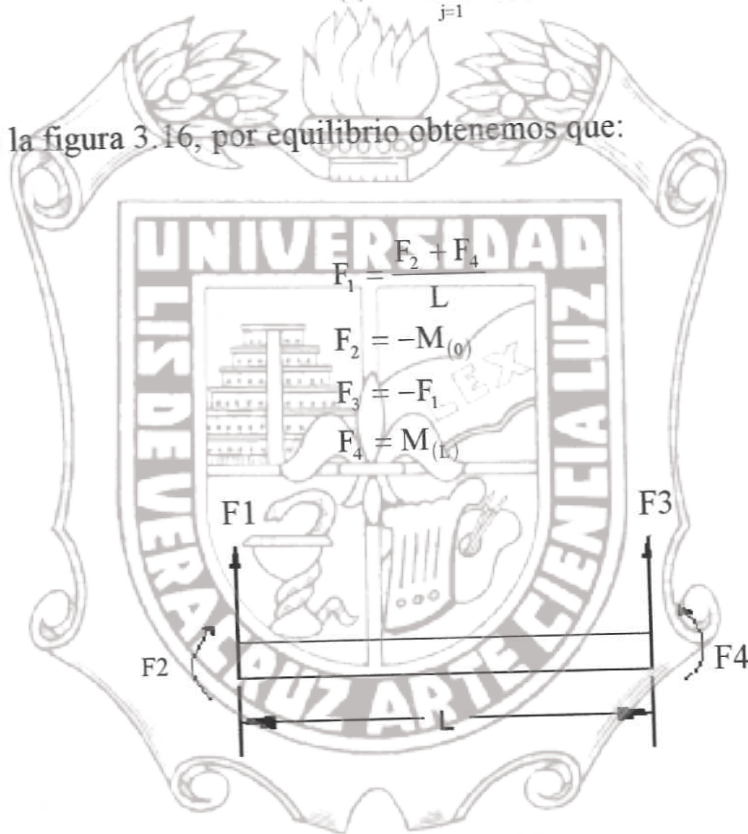
Y la ecuación (3.72) también puede escribirse como sigue:

$$v_{(x)} = \sum_{j=1}^4 N_{j(x)} u_j \quad (3.72')$$

Y la (3.63') quedaría:

$$M_{(x)} = EI \sum_{j=1}^4 N_{j(x)}'' u_j \quad (3.63'')$$

Considerando la figura 3.16, por equilibrio obtenemos que:



$$(3.74)$$

Figura 3.16.

Escrito matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.74')$$

o bien:

$$\{F\} = [K]\{u\} \quad (3.74'')$$

donde  $[K]$  es la matriz de rigidez por flexión de la viga.

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

### 3.3.5. Flexión de una Viga sobre Cimentación Elástica

La matriz de rigidez de una viga sobre cimentación elástica, usando los polinomios de interpolación, resulta:

$$K_r = k \int_A N_{j(x)}^T N_{j(x)} dA \quad (3.75)$$

donde  $k$  es el módulo de la cimentación elástica. Haciendo las operaciones correspondientes obtenemos:

$$K_r = \frac{kL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.75')$$

Para calcular los desplazamientos de una viga sobre cimentación elástica se elaboró un programa de computación en lenguaje FORTRAN, el cual se encuentra listado en el Apéndice A y la explicación de su funcionamiento se detalla en el Capítulo IV.

## CAPITULO IV. DESARROLLO DEL PROGRAMA DE COMPUTACION POR EL METODO DE ELEMENTO FINITO

### 4.1. INTRODUCCION.

El estudio teórico más extenso acerca de esfuerzos y deflexiones en pavimentos de concreto fue realizado por Westergaard<sup>(11)</sup>, quien desarrolló ecuaciones considerando tres tipos de carga: carga aplicada cerca de la esquina de una losa grande (Figura 4.1a), carga aplicada cerca de la orilla de la losa pero a una distancia considerable de cualquier esquina (Figura 4.1b) y carga aplicada en el interior de la losa a una distancia considerable de cualquier orilla (Figura 4.1c).

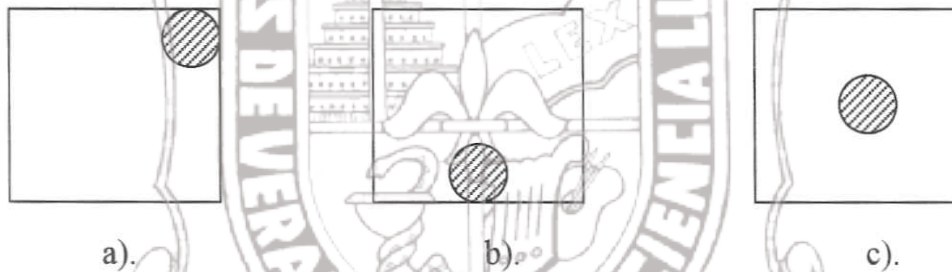


Figura 4.1.

Picket encontró que la fórmula desarrollada por Westergaard, la cual se basa en la suposición de que la losa y la sub-base están en completo contacto, producen esfuerzos pequeños y desarrolló una fórmula semi-empírica que tuvo un buen acuerdo con resultados experimentales y fue usada por la PCA (Portland Cement Association) en 1951 hasta 1966 cuando se desarrolló un nuevo método basado en los esfuerzos que se producen en la junta transversal. La PCA asume que no hay transferencia de carga en la junta, por lo que el esfuerzo así calculado es similar al caso de la carga en la orilla de la losa con una orientación diferente. El método de la PCA fue revisado nuevamente en 1984, adoptando un criterio de erosión en la deflexión de la esquina y un criterio de fatiga en el esfuerzo de la orilla de la losa.

Todas las soluciones analíticas están basadas en la suposición de que la losa y la sub-base están en completo contacto, pero es bien sabido que usualmente no ocurre así. Existen métodos numéricos en los que se considera la posibilidad de un contacto parcial entre la losa y la sub-base (como se discutirá a detalle mas adelante). Hudson y Matlock (1996) aplicaron el método de discretización asumiendo la sub-base como un líquido denso, y después Saxena (1973) la analizó como una cimentación en un sólido elástico.

Cheung y Zienkiewicz (1965) desarrollaron métodos de Elemento Finito para analizar cimentaciones elásticas de ambos tipos: líquida y sólida. Los métodos fueron aplicados en losas por Huang y Wang (1973, 1974).

En la actualidad los dos métodos para pavimentos rígidos más conocidos y aplicados en diferentes países son el de la Portland Cement Association (PCA) y el de la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), los cuales se presentan a continuación.

### 4.2. METODO AASHTO PARA PAVIMENTOS RIGIDOS

El método AASHTO se basa en los resultados experimentales obtenidos por medio de tramos de prueba. El objetivo principal de estos tramos es el de obtener relaciones y correlaciones confiables entre el comportamiento de pavimentos diseñados con los mismos criterios, apoyados en suelos similares y en condiciones de tránsito exactamente iguales. Se construyeron seis circuitos de prueba cerrados en sus extremos; cuatro de ellos alcanzaron una longitud de cinco kilómetros, mientras que los dos restantes fueron más cortos. De estos últimos, uno se planeó para estar sin tránsito y poder estudiar el impacto de las condiciones ambientales en las diferentes secciones de pavimento de prueba.

En todos los circuitos se establecieron pasadas de camiones con características y geometría conocidas.

Estos materiales se dispusieron sobre bases y sub-bases de materiales bien controlados y espesores preestablecidos. Se colocaron losas directamente en el terreno natural y en



espesores variables de la capa sub-base granular. El control del tránsito sobre los pavimentos ya terminados se registró durante 2 años.

De los resultados obtenidos se encontró que sólo fallaron las secciones de 20 cm independientemente del espesor de la sub-base de apoyo.

El comportamiento de todos los tramos prueba, se relacionó con las condiciones de servicio en las diferentes etapas del proyecto, tanto desde las condiciones iniciales como en las etapas intermedias de los tramos sujetos a las cargas repetidas producidas por el tránsito.

Al menos dos conclusiones se pueden enumerar de estos tramos de prueba:

- En todos los niveles de carga por tránsito, un mayor número de secciones de pavimento rígido se comportaron con buenos índices de servicio.
- El número de repeticiones de carga de diferente nivel aceptado por las secciones de pavimento rígido con un comportamiento adecuado es independiente de los espesores de la capa sub-base. Lo mismo puede decirse cuando el pavimento de concreto cuenta con refuerzo o sin refuerzo. Según se observó en las pruebas, el refuerzo de secciones de concreto no tuvo mayor influencia en cuanto al número de repeticiones aceptadas por dichas secciones, para buenos índices de servicio.

Con base a estos tramos de prueba, se propuso la ecuación de diseño para pavimento rígido, la cual ha sido modificada desde el inicio de los años sesenta de acuerdo con las observaciones experimentales que han permitido eliminar algunos parámetros de diseño e introducir otros, a fin de tomar en cuenta las propiedades del concreto, las condiciones de apoyo y las ambientales. La ecuación mencionada es la siguiente:

$$\text{Log}_{10}(W_{18}) = Z_R * S_o + 7.35 * \text{Log}_{10}(D + 1) - 0.06 + \frac{\text{Log}_{10} \left[ \frac{\Delta \text{PSI}}{4.5 - 1.5} \right]}{1 + \frac{1.624 * 10^7}{(D + 1)^{8.46}}} + (4.22 - 0.32 * \text{Pt}) * \text{Log}_{10} \left[ \frac{S'_c * \text{Cd} * (D^{0.75} - 1.132)}{215.63 * J \left[ D^{0.75} - \frac{18.42}{(E_c/k)^{0.25}} \right]} \right]$$

Donde:

$W_{18}$  = Número equivalente de ejes sencillos aplicados

$Z_R$  = Desviación estándar normal

$S_o$  = Desviación estándar total

$D$  = Espesor del pavimento

$\Delta PSI$  = Pérdida de utilidad del pavimento

$P_t$  = Utilidad final

$S'_c$  = Módulo de ruptura del concreto

$C_d$  = Coeficiente de drenaje

$J$  = Coeficiente de transferencia de carga

$E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto

$k$  = Módulo de reacción del suelo

Esta ecuación se resuelve a través de un nomograma. Las consideraciones de diseño de este método son las siguientes:

Comportamiento del pavimento:

- Funcional
- Estructural

El primero de ellos se refiere a la seguridad y comodidad con que el pavimento sirve al usuario, es decir la comodidad con que el usuario circula y la seguridad que le ofrece la superficie de rodamiento. El segundo se refiere a sus características físicas que muestra como respuesta a las sollicitaciones, tales como agrietamientos, alisamientos, esfuerzos, etc.

Es importante destacar que los valores de los parámetros con que se diseñan los pavimentos con este método, deberán ser ajustados para cada región en particular, pues todos los valores asignados a cada uno de ellos fueron relacionados con el comportamiento de los pavimentos ante condiciones de ambiente y de intemperismo muy particulares.

**4.2.1. Descripción del Programa “PAS”:** El “PAS” (Pavement Analysis Software) es un programa de computación desarrollado por la American Concrete Pavement Association para diseñar y analizar sistemas de pavimento usando la Guía AASHTO 1993 para diseño de estructuras de pavimento.

El método del “PAS” considera como posición crítica de la carga la orilla de la losa y se realiza el cálculo para dos condiciones de trabajo de la base de apoyo (sub-base y terracerías) de las losas: una, que se comporta como líquido denso y la otra, que reacciona como un sólido elástico. Los esfuerzos máximos se comparan con la resistencia a la tensión del concreto, para estimar el número de repeticiones que podrá resistir el pavimento y en función del resultado aceptar el espesor propuesto.

Adicionalmente se hace un estudio de sensibilidad al cambio de cualquiera de las variables, así como la revisión de los factores de seguridad ponderados.

### 4.3. METODO PCA PARA PAVIMENTOS RIGIDOS

El criterio original de diseño consideraba el concepto de “resistencia utilizada” del pavimento por las diferentes solicitaciones, a saber, por carga y factores ambientales. En el método se calculan los esfuerzos inducidos por cada rango de cargas (por ejes) y se comparan entonces con las resistencias de diseño. A dicha relación se le conoce como relación de esfuerzos. Conociendo esta relación, se calcula el número de repeticiones permitidas para un rango de cargas (por tránsito) dado, valor que se compara con el número de repeticiones esperadas en un período de diseño. La relación de estos números (en porcentaje que representa la resistencia consumida o utilizada por el tránsito), no debe nunca exceder 100%.

Los conceptos considerados en la última versión de este criterio de diseño son:

- Criterio por Fatiga: se utiliza para mantener los esfuerzos inducidos a la losa de concreto dentro de los límites aceptables.

- Criterio de Erosión: para limitar los efectos de la deflexión del pavimento en las zonas críticas, orillas y esquinas, inducida por erosionabilidad de la capa de apoyo en esquinas y orillas. Este enfoque también se introduce para limitar problemas de fracturamiento en zona de juntas, especialmente en pavimentos sin pasajuntas.

El método de análisis se basa en análisis de esfuerzos-deflexiones críticos, empleando el método de elementos finitos. En esta metodología se consideran losas finitas, en donde actúan cargas en posiciones diferentes y se modelan las transferencias de carga losa-loa entre juntas, losa-acotamientos y entre grietas. En el caso de pavimentos sin pasajuntas, la transmisión de cargas entre grietas, en juntas machihembradas o en grietas del tipo continuamente reforzado, se modela mediante la introducción de resortes con rigideces conocidas, basándose en las características carga-deflexión en tales juntas observadas tanto en campo como en laboratorio en zona de juntas.

Los factores de diseño empleados en este método son:

- Tránsito.
- Resistencia de diseño del concreto.
- Módulo de reacción de la subrasante.
- Tipo de acotamientos y juntas transversales.
- Período de diseño.
- Criterio de fatiga.
- Criterio por erosión.

Una vez que se definen los valores de esfuerzos equivalentes, la proporción o razón de esfuerzos se determina dividiendo estos esfuerzos entre la resistencia a la flexión para luego, con la ayuda de un nomograma, obtener las repeticiones admisibles. El valor del módulo de ruptura que se considera es a los 28 días. El nomograma de solución cubre los dos casos: pavimentos con y sin pasajuntas. En caso de que el número de repeticiones admisibles se localice fuera de los límites contemplados en la gráfica, entonces se asume que tal número es ilimitado.

Las correlaciones entre el comportamiento de los pavimentos de los tramos de prueba de la AASHTO con los cálculos de deflexiones mediante el método de elementos finitos no resultaron prometedoras; sin embargo, tales resultados se correlacionan mejor con lo observado en los tramos de prueba si las deflexiones calculadas,  $w$ , se multiplican por la presión calculada en la interfase losa-capa de apoyo. Para el criterio de erosión se utiliza el parámetro de velocidad de trabajo inducido por las cargas, o como lo denomina la PCA, la potencia. Esta se define como la velocidad de trabajo con que una carga por eje deforma una losa dada.

El concepto de este enfoque es que al tener configuraciones deformadas más pequeñas, una losa más delgada es más susceptible de ser fracturada debido a su baja rigidez.

**4.3.1. Descripción del Programa "KENSLABS":** El programa "KENSLABS" (Huang, 1985) está basado en el método de elemento finito, en el cual la losa se divide en elementos finitos rectangulares y se aplican las cargas de las ruedas y la reacción del suelo como fuerzas concentradas en los nodos. Se pueden asumir tres tipos de cimentación: líquida, sólida y en capas. La teoría de Westergaard y la mayoría de los programas están basados en la cimentación líquida porque requieren menos tiempo de computación.

a). Cimentación Líquida: También es llamada cimentación de Winkler, la relación fuerza-deflexión está caracterizada por resortes. El término "líquida" no significa que la cimentación sea un líquido sin esfuerzos cortantes, sino simplemente que la deformación de la cimentación bajo una losa es similar a la del agua bajo un bote. De acuerdo con el principio de Arquímedes, el peso del bote es igual al peso del agua desplazada. Esto es similar al caso en que una losa es puesta en un número infinito de resortes y el volumen total de desplazamiento es proporcional a la carga total aplicada. La rigidez de una cimentación líquida es definida por:

$$k = \frac{P}{w} \quad (4.1)$$

donde  $k$  es el módulo de reacción del suelo,  $p$  es la presión unitaria o fuerza por unidad de área, y  $w$  es la deflexión vertical. La figura 4.2 muestra la idealización de un elemento placa rectangular, con una longitud de  $2a$  y un ancho de  $2b$ , con 4 resortes iguales en los nodos. La fuerza en cada resorte es:

$$F_{wi} = kabw_i \quad (4.2)$$

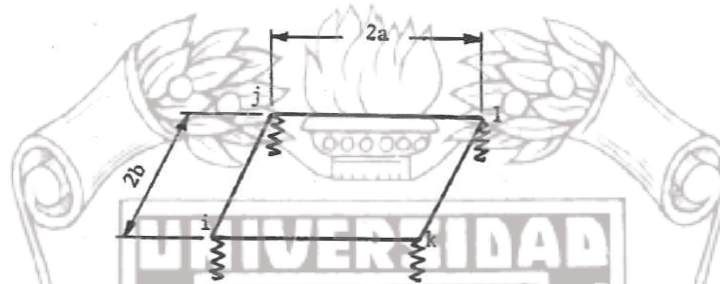
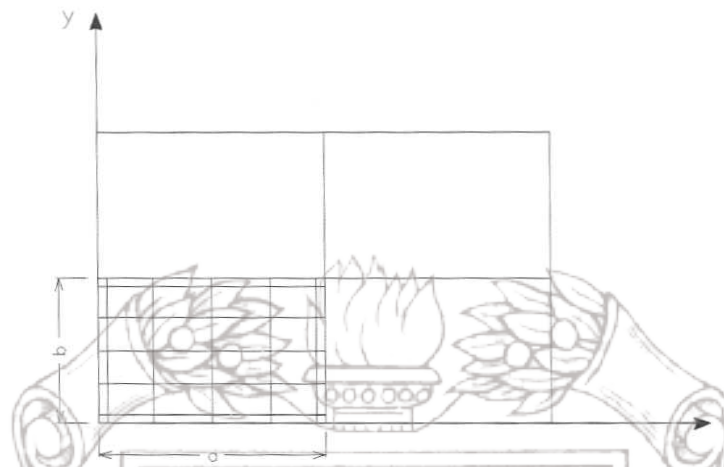


Figura 4.2. Cimentación Líquida Bajo un Elemento Placa.

b). Cimentación Sólida: Es más realista que la líquida porque la deflexión en cualquier nodo depende no sólo de la fuerza en el nodo sino de las fuerzas en los demás nodos. Este tipo de cimentación es también llamada cimentación de Boussinesq por la ecuación de Boussinesq para deflexión en superficies, como se indica en la ecuación (4.3), usada para determinar la matriz de rigideces:

$$w_{i,j} = \frac{P_j (1 - \nu_f^2)}{\pi E_f d_{i,j}} \quad (4.3)$$

donde  $w_{i,j}$  es la deflexión en el nodo  $i$  debido a la fuerza en el nodo  $j$ ,  $P_j$  es la fuerza en el nodo  $j$ ,  $\nu_f$  es el módulo de Poisson de la cimentación,  $E_f$  es el módulo de elasticidad de la cimentación y  $d_{i,j}$  es la distancia entre los nodos  $i$  y  $j$ . En el programa *KENSLANBS* se utilizó la fórmula de la cuadratura de Gauss de 5 puntos en dirección  $x$  y  $y$  con las respuestas calculadas en los 25 puntos, como se muestra en la figura 4.3.



**Figura 4.3. Cuadratura de Gauss con 5 Puntos de Integración.**

c). Cimentación en capas. También llamada cimentación de Burmister, ya que se usa la teoría de capas de Burmister para obtener la matriz de flexibilidad. En esta teoría, la carga se distribuye sobre un área circular que puede fácilmente convertirse a una carga concentrada dejando el radio de contacto aproximado a cero. El procedimiento para la cimentación en capas es similar al que se usa para la cimentación sólida excepto que las ecuaciones de fuerza-deflexión de la cimentación en capas se calculan diferente.

**Procedimiento General:**

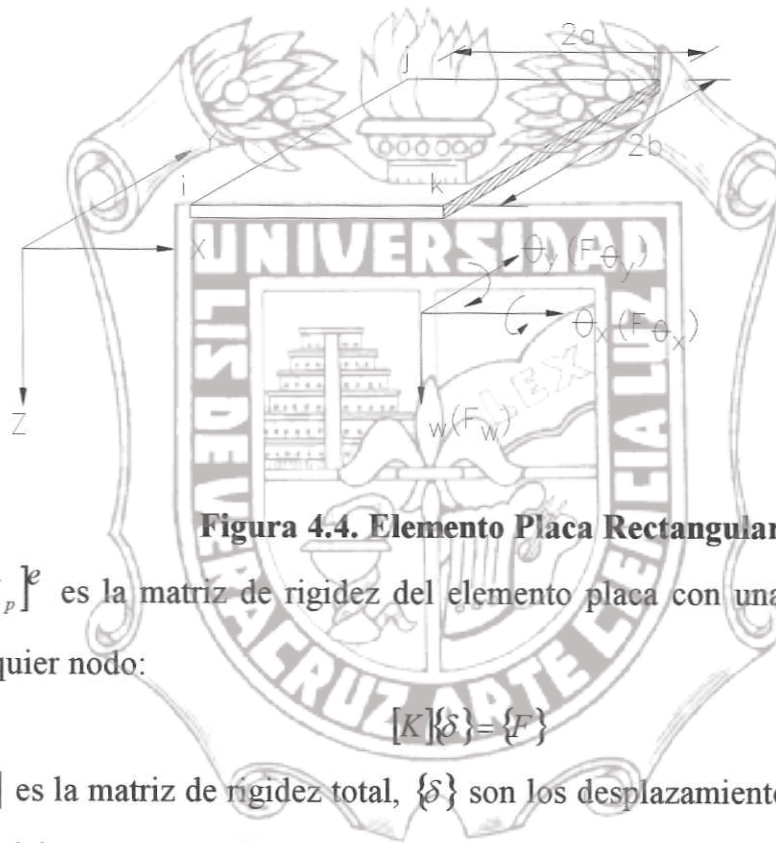
La matriz de rigidez de la losa se combina con la matriz de rigidez de la cimentación y juntas forman la matriz de rigidez total.

**Matriz de Rigidez de la Losa:**

La figura 4.4 muestra un elemento finito rectangular con nodos  $i, j, k, y l$ . En cada nodo hay tres fuerzas ficticias con sus tres correspondientes desplazamientos. Las fuerzas son una fuerza vertical  $F_w$ , un momento en el eje  $x$   $F_{\theta_x}$ , y un momento en el eje  $y$   $F_{\theta_y}$ . Los desplazamientos son la deflexión vertical en dirección  $z$ ,  $w$ , una rotación en el eje  $x$ ,  $\theta_x$ , y una rotación en el eje  $y$ ,  $\theta_y$ . La dirección positiva de los ejes coordenados se muestra en la

figura 4.4 y la dirección positiva de momentos y rotaciones se determina por la regla de la mano derecha. Para cada elemento, las fuerzas y los desplazamientos se relacionan por:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_l \end{Bmatrix} = [K_p]^e \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$



**Figura 4.4. Elemento Placa Rectangular**

Donde  $[K_p]^e$  es la matriz de rigidez del elemento placa con una dimensión de 12 x 12.

Para cualquier nodo:

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (4.5)$$

donde  $[K]$  es la matriz de rigidez total,  $\{\delta\}$  son los desplazamientos nodales, y  $\{F\}$  son las fuerzas nodales externas aplicadas.

**Rigidez en la Junta:** Se representa por una constante de corte del resorte  $C_w$  y una constante de momento del resorte  $C_\theta$  definidas por:

$$C_w = \frac{\text{Fuerza cor tan te por unidad de longitud de la junta}}{\text{Diferencia en deflexiones entre dos losas}} \quad (4.6)$$

$$C_\theta = \frac{\text{Momento por unidad de longitud de la junta}}{\text{Diferencia en rotaciones entre dos losas}} \quad (4.7)$$

Generalmente la carga se transfiere a través de la junta principalmente por cortante con  $C_\theta=0$ . La figura 4.5 muestra el cortante transmitido a través de la junta, como se indica por



un resorte con la constante del resorte  $C_w$ . Después de que la carga se aplica, la losa de la izquierda se deflecta una cantidad  $w_i$ , y el resorte empuja la losa del lado derecho hacia abajo una distancia  $w_r$ . La diferencia en la deflexión  $w_d$  es igual a  $w_i - w_r$ .

En el método de elemento finito, las fuerzas cortantes están concentradas en los nodos a lo largo de la junta. De la ecuación (4.6),

$$F_w = LC_w w_d \quad (4.8)$$

Donde  $F_w$  es la fuerza nodal aplicada en ambas losas a través del resorte y  $L$  es el promedio de espaciamiento entre nodos en la junta. Las fuerzas  $F_w$  pueden entonces ser sustituidas en la ecuación (4.5) para resolver los desplazamientos nodales.



**Figura 4.5. Transferencia de Cortante a Través de la Junta**

Cuando se usan pasajuntas para transmitir cortante, se asume que éste está concentrado en los nodos. Si el espaciamiento entre pasajuntas es  $s_b$ , el número de pasajuntas en cada nodo es  $L/s_b$ . La fuerza  $F_w$  se divide por el número de pasajuntas necesario para obtener la fuerza  $P_t$  en cada pasajunta:

$$P_t = \frac{S_b F_w}{L} \quad (4.9)$$

El efecto de las pasajuntas en el análisis del elemento finito fue presentado por Huang y Chou (1978). La figura 4.6 muestra la transferencia de cortante a través de la junta por una pasajunta. La diferencia en deflexión  $w_d$  es causada por la deformación cortante de la pasajunta  $\Delta S$  y la deformación del concreto bajo la junta  $y_o$ :

$$w_d = \Delta S + 2y_o \quad (4.10)$$

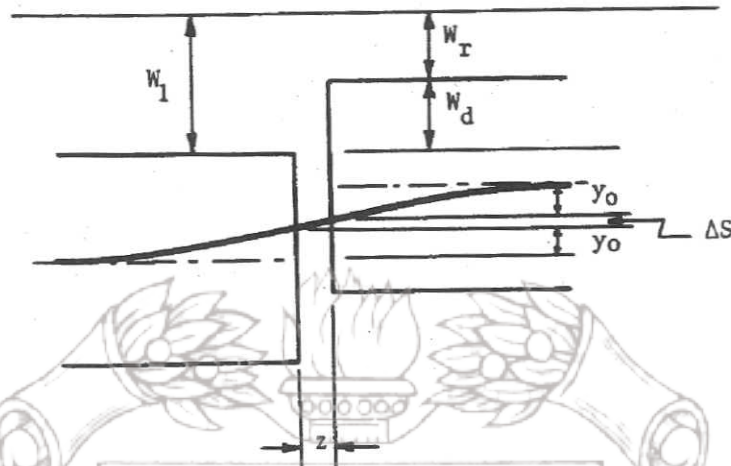


Figura 4.6. Transferencia de Cortante a Través de la Junta con una Pasajunta

La deformación de cortante de la pasajunta puede determinarse aproximadamente por

$$\Delta S = \frac{P_t z}{GA} \quad (4.11)$$

donde \$P\_t\$ es la fuerza cortante en una pasajunta, \$z\$ es el ancho de junta, \$A\$ es el área de la pasajunta y \$G\$ es el módulo de cortante de la pasajunta.

La deformación del concreto bajo la pasajunta puede determinarse por:

$$y_o = \frac{P_t (2 + \beta z)}{4\beta^3 E_d I_d} \quad (4.12)$$

Sustituyendo la ecuación (4.11) y la (4.12) en la (4.10) resulta:

$$w_d = \left( \frac{z}{GA} + \frac{2 + \beta z}{2\beta^3 E_d I_d} \right) P_t \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecuación (4.9) en la (4.13) y comparándola con la (4.8) nos da:

$$C_w = \frac{1}{S_b \left( \frac{z}{GA} + \frac{2 + \beta z}{2\beta^3 E_d I_d} \right)} \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) indica que, dado el espaciamiento, el diámetro de las pasajuntas y el ancho de la junta, la constante del resorte de cortante se puede determinar. El análisis

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

anterior está basado en la suposición de que no hay separación entre el resorte (o la pasajunta) y el concreto.

### Ondulación por Temperatura:

La ondulación es similar a la de la carga. La matriz de rigidez se superpone sobre todos los elementos y las fuerzas nodales son reemplazadas con el equivalente estático de las cargas externas aplicadas, las siguientes ecuaciones simultáneas se pueden obtener resolviendo los desplazamientos nodales:

$$[K_p]\{\delta\} = \{F\} + [K_f]\{\delta'\} \quad (4.15a)$$

donde  $[K_p]$  es la matriz de rigidez de la losa incluyendo la junta, si hay,  $\{\delta\}$  son los desplazamientos nodales de la losa,  $\{F\}$  son las fuerzas nodales debido a las cargas aplicadas,  $[K_f]$  es la matriz de rigidez de la cimentación y  $\{\delta'\}$  son los desplazamientos de la cimentación. Note que el segundo término en el lado derecho de la ecuación (4.15a) representa las fuerzas nodales debidas a la reacción de la cimentación. Si la losa tiene un total de  $n$  nodos, entonces:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \{\delta'\} = \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \vdots \\ \delta'_i \\ \vdots \\ \delta'_n \end{Bmatrix} \quad (4.15b)$$

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad F_i = \begin{Bmatrix} F_{wi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \delta'_i = \begin{Bmatrix} c_i - w_i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.15c)$$

donde el subíndice  $i$  indica el  $i$ -ésimo nodo;  $w$  es la deflexión vertical, hacia abajo positiva;  $\theta_x$  es la rotación en el eje  $x$ ;  $\theta_y$  es la rotación en el eje  $y$ ;  $F_w$  es la fuerza vertical debido a la carga externa aplicada, positiva hacia abajo; y  $c$  es la ondulación inicial de una losa liviana y sin restricciones debido a la diferencia de temperatura entre la parte superior y la parte inferior, positiva hacia arriba. El desplazamiento del suelo indicado por la ecuación (4.15c) se basa en la suposición de Westergaard de contacto total. Si la losa se ondula hacia arriba

una cantidad  $c_i$ , el suelo se mueve hacia abajo una cantidad  $w_i$ , entonces la deflexión vertical del suelo es  $c_i - w_i$ . La razón de que  $F_i$  y  $\delta'_i$  contengan sólo un elemento diferente de cero es que las fuerzas nodales se determinan por estática y sólo se involucran las cargas verticales y las reacciones. Si no hay ondulación, entonces  $c_i=0$ , y  $w_i$  se puede mover al lado izquierdo de la ecuación (4.15a) y se puede obtener la ecuación (4.5).

#### **Contacto Entre el Suelo y la Losa:**

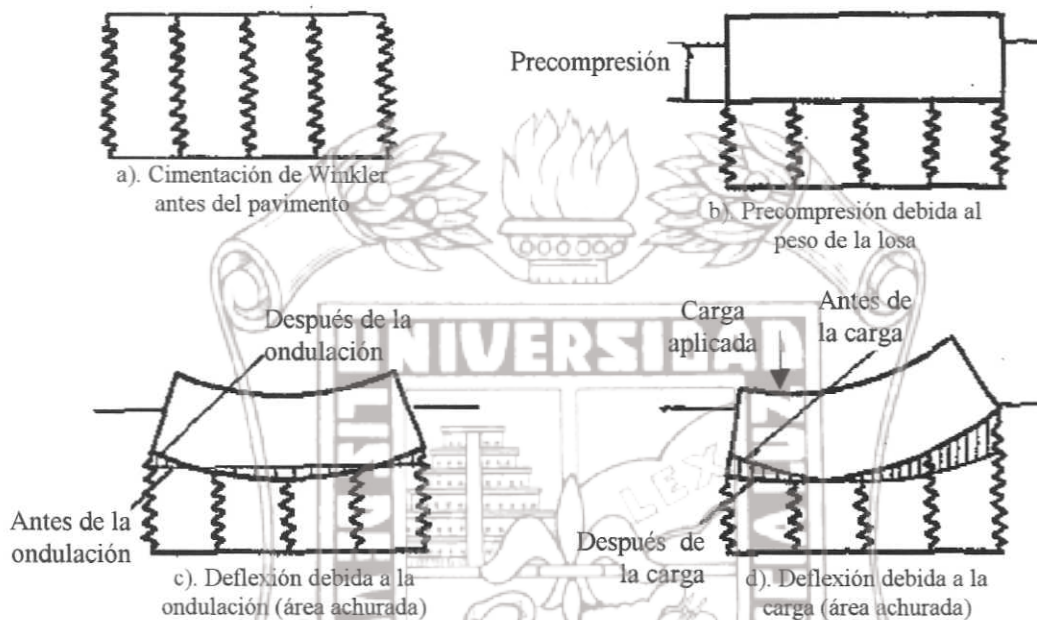
Un factor importante que afecta el diseño de los pavimentos de concreto es la condición de contacto entre la losa y la cimentación. El análisis de Westergaard para cimentación líquida y el de Pickett para cimentación sólida, se basan en la suposición de que la losa y la cimentación están en contacto total. Esto es válido si no hay separación entre ambos ya que el peso de la losa naturalmente genera una precompresión en la cimentación, que los mantendrá en contacto total. Sin embargo, esto no es válido cuando la losa está sujeta a una ondulación o levantamiento, lo que provoca una separación entre ambos. El análisis de contacto parcial para cimentaciones líquidas fue presentado por Huang y Wang (1974) y se describe a continuación. Se discuten tres casos de contacto: contacto total, contacto parcial sin separación inicial y contacto parcial con una separación inicial.

#### **Contacto Total:**

La figura 4.7 muestra una cimentación líquida o de Winkler que consiste en una serie de resortes, cada uno representa un punto nodal en el análisis de elemento finito. Cuando la losa se coloca en la cimentación, el peso de ésta causará una precompresión en los resortes, como se ve en la figura 4.7b. Ya que la losa tiene un espesor uniforme, cada resorte se deformará la misma cantidad y no se inducirán esfuerzos en la losa. La cantidad de precompresión se puede determinar dividiendo el peso de la losa por unidad de área entre el módulo de reacción del suelo.

Cuando la temperatura en la parte superior de la losa es mas fría que la de la parte inferior, como es usualmente el caso de la noche, parte de la losa se deflectará hacia arriba como lo indica la figura 4.7c. Sin embargo, la losa y los resortes permanecen en contacto porque las deflexiones hacia arriba son más pequeñas que la precompresión. La deflexión de la losa

debido a la ondulación se puede determinar como la deflexión debida al peso y la ondulación combinadas menos la precompresión debida al peso de la losa, como indica el área achurada de la figura 4.7c. Lo mismo sucede cuando se aplica una carga a la losa ondulada, como se ve en la figura 4.7d.



**Figura 4.7. Analogía del Resorte para Contacto Total**

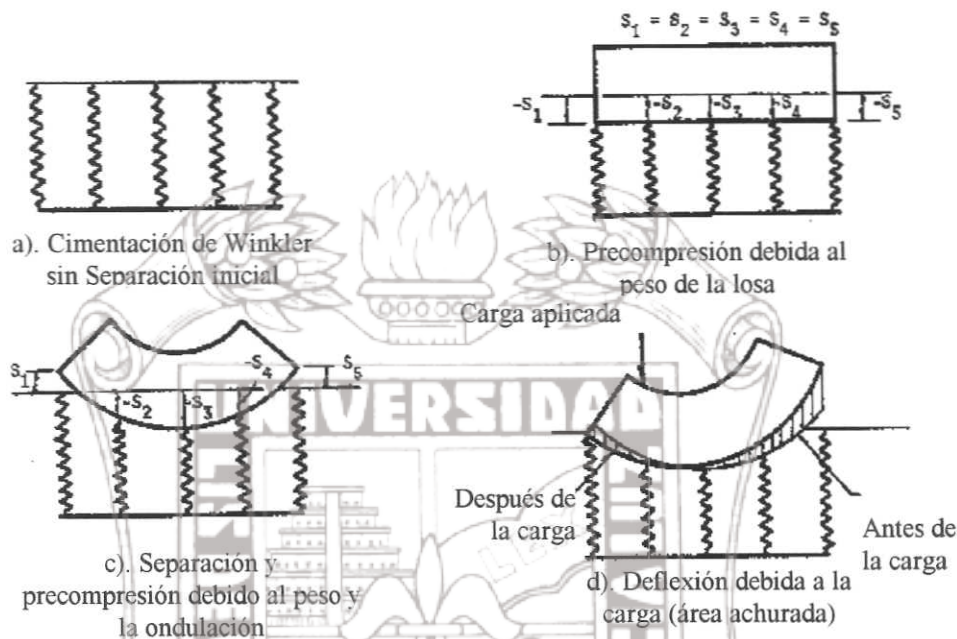
### Contacto Parcial sin Separación Inicial:

Este caso se aplica a pavimentos nuevos que no están sujetos a cantidades significativas de tráfico y donde no hay abombamiento o deformación plástica del suelo. Cada resorte en la cimentación de Winkler se mueve la misma cantidad, como se indica en la figura 4.8a. Bajo el peso de la losa, cada resorte está sujeto a una precompresión, como se muestra en la figura 4.8b. Si la losa está ondulada hacia arriba, la separación se formará en los resortes de la parte exterior, figura 4.8c, y la precompresión se formará en los resortes del interior, indicado por  $s$  negativa. Si la losa se ondula hacia abajo, todos los resortes se precomprimirán similarmente a la figura 4.8b. pero la precompresión no será igual. Los desplazamientos debidos al peso de la losa y ondulación combinados se pueden determinar de las ecuaciones (4.15), pero los desplazamientos del suelo se expresan como:

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\delta'_i = \begin{cases} c_i - w_i \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ cuando } w_i > c_i \quad (4.16a)$$

$$\delta'_i = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ cuando } w_i < c_i \quad (4.16b)$$



**Figura 4.8. Contacto Parcial sin Separación Inicial.**

El proceso se repite hasta que se obtienen las mismas ecuaciones. En la mayoría de los casos, se logra con 5 ó 6 iteraciones. Después de determinar las deflexiones debidas al peso y la ondulación, la separación y precompresión se pueden calcular y usarlas después para calcular los esfuerzos y deflexiones debidos a la carga sola.

Para determinar los esfuerzos y las deflexiones debidos a la carga únicamente, primero se debe determinar la separación y precompresión que se muestran en la figura 4.8b ó 4.8c, dependiendo de si existe ondulación o no. Tomando la separación y precompresión como  $s$ , las deflexiones debidas a la carga sola, como indica la figura 4.8d, se pueden determinar de la ecuación (4.15), y los desplazamientos del suelo se expresan:

$$\delta'_i = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ cuando } w_i < s_i \quad (4.17a)$$

$$\delta'_i = \begin{cases} s_i - w_i \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ cuando } w_i > s_i \text{ y } s_i > 0 \quad (4.17b)$$

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

$$\delta'_i = \begin{cases} -w_i \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{cuando } w_i > s_i \text{ y } s_i < 0 \quad (4.17c)$$

Checando  $w$  con  $s$ , la deflexión hacia abajo se considera positiva y hacia arriba negativa, mientras que la separación es positiva y la precompresión negativa. Primero, se asume que la losa y el suelo están en contacto total, y se determinan las deflexiones de la losa debido a la carga aplicada. Después se checan las deflexiones con  $s$ , y se forma un nuevo sistema de ecuaciones con base en las ecuaciones (4.17). Se repite el proceso hasta que se obtienen las mismas ecuaciones.

Cuando la losa y el suelo están en contacto parcial, se aplica el principio de superposición. Para determinar los esfuerzos y deflexiones debidos a una carga aplicada, se debe calcular primero la deformada de la losa inmediatamente antes de aplicar la carga. Ya que la deformada depende fuertemente de las condiciones de ondulación, los esfuerzos y deflexiones debidos a la carga se afectan apreciablemente por la ondulación. Esto fue descubierto en las pruebas de Maryland (HRB, 1952) y en la de AASHO (HRB, 1962).

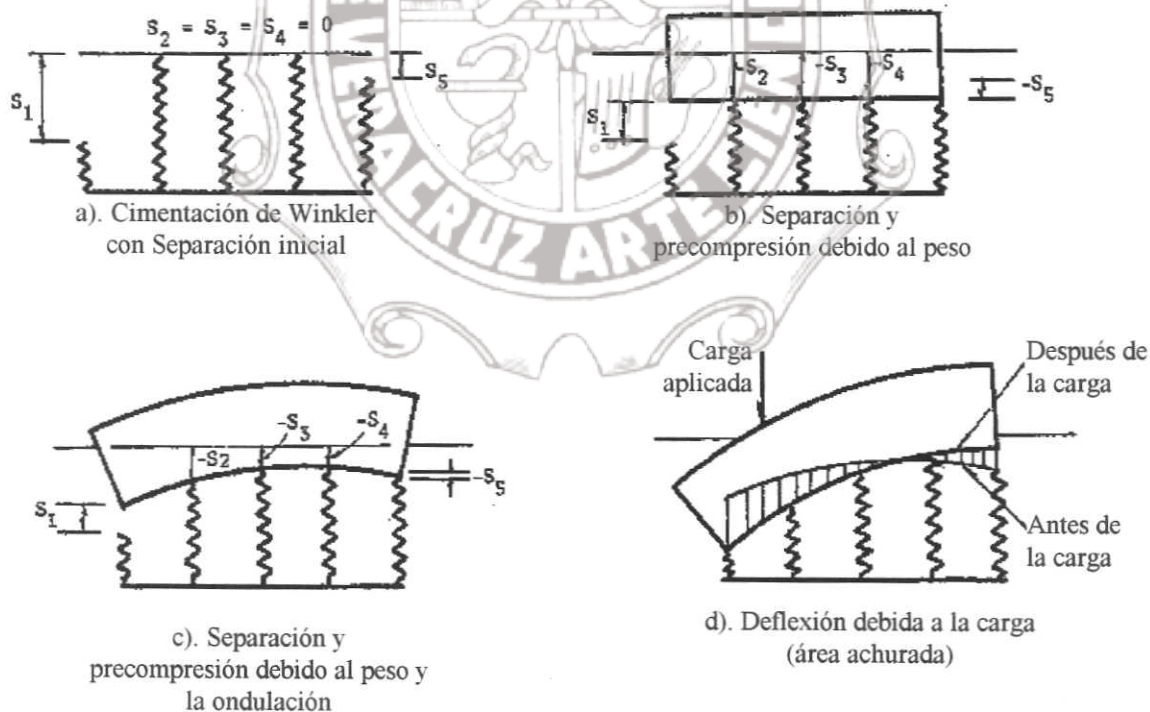
### Contacto Parcial con Separación Inicial:

Este caso se aplica a pavimentos que han estado sujetos a una gran intensidad de tráfico. Debido al abombamiento o la deformación plástica del suelo, algunos resortes en la cimentación de Winkler resultan deficientes y, si la losa es removida, no regresará a la elevación original. De este modo, se forma la separación inicial, como se indica por los dos resortes exteriores en la figura 4.9a. Esa separación  $s$  debe asumirse antes de que pueda hacerse un análisis. Los desplazamientos debidos al peso de la losa, como se indican en la figura 4.9b, pueden determinarse de la ecuación (4.15), y los desplazamientos del suelo se expresan como:

$$\delta'_i = \begin{cases} s_i - w_i \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{cuando } w_i > s_i \quad (4.18a) \quad \delta'_i = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{cuando } w_i < s_i \quad (4.18b)$$

Primero, se asume que la losa y el suelo están en contacto total y se determina la deflexión vertical de la losa de la ecuación (4.15). Después se checa la deflexión en cada nodo contra la separación  $s$ . Si la deflexión es más pequeña que la separación, como se muestra por el resorte de la izquierda en la figura 4.9b, entonces se usa la ecuación (4.18b); si la deflexión es mayor que la separación, como se muestra por los otros resortes en la figura 4.9b, entonces se usa la ecuación (4.18a). Se repite el proceso hasta que se obtienen las mismas ecuaciones. Después de que se obtienen las deflexiones, la separación y precompresión se pueden calcular y usarse después para calcular los esfuerzos y las deflexiones debidos a la carga, si no existe ondulación.

Se puede ver que si los resortes son de la misma longitud, como se muestra en la figura 4.8, el peso de la losa provocará una precompresión uniforme y no se establecerán esfuerzos en la losa. Sin embargo, si los resortes no son de igual longitud, las deflexiones no serán uniformes y ocurrirá un esfuerzo en la losa.



**Figura 4.9. Contacto Parcial con Separación Inicial**



## 4.4. DESCRIPCION DEL PROGRAMA "VSCE"

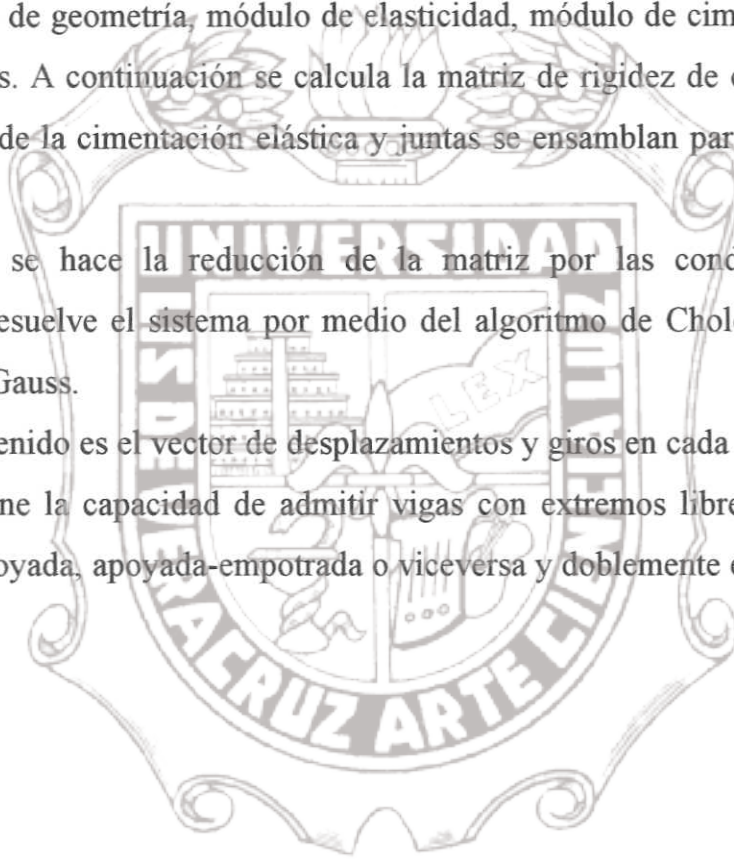
El programa "VSCE" está elaborado en lenguaje FORTRAN. Es un programa que calcula desplazamientos y giros en una viga sobre cimentación elástica sujeta a flexión por medio del método de Elemento Finito, con 2 grados de libertad por nodo y  $m$  número de elementos finitos.

Se dan los datos de geometría, módulo de elasticidad, módulo de cimentación elástica y el vector de fuerzas. A continuación se calcula la matriz de rigidez de cada elemento que se combina con la de la cimentación elástica y juntas se ensamblan para formar la matriz de Rigidez Total.

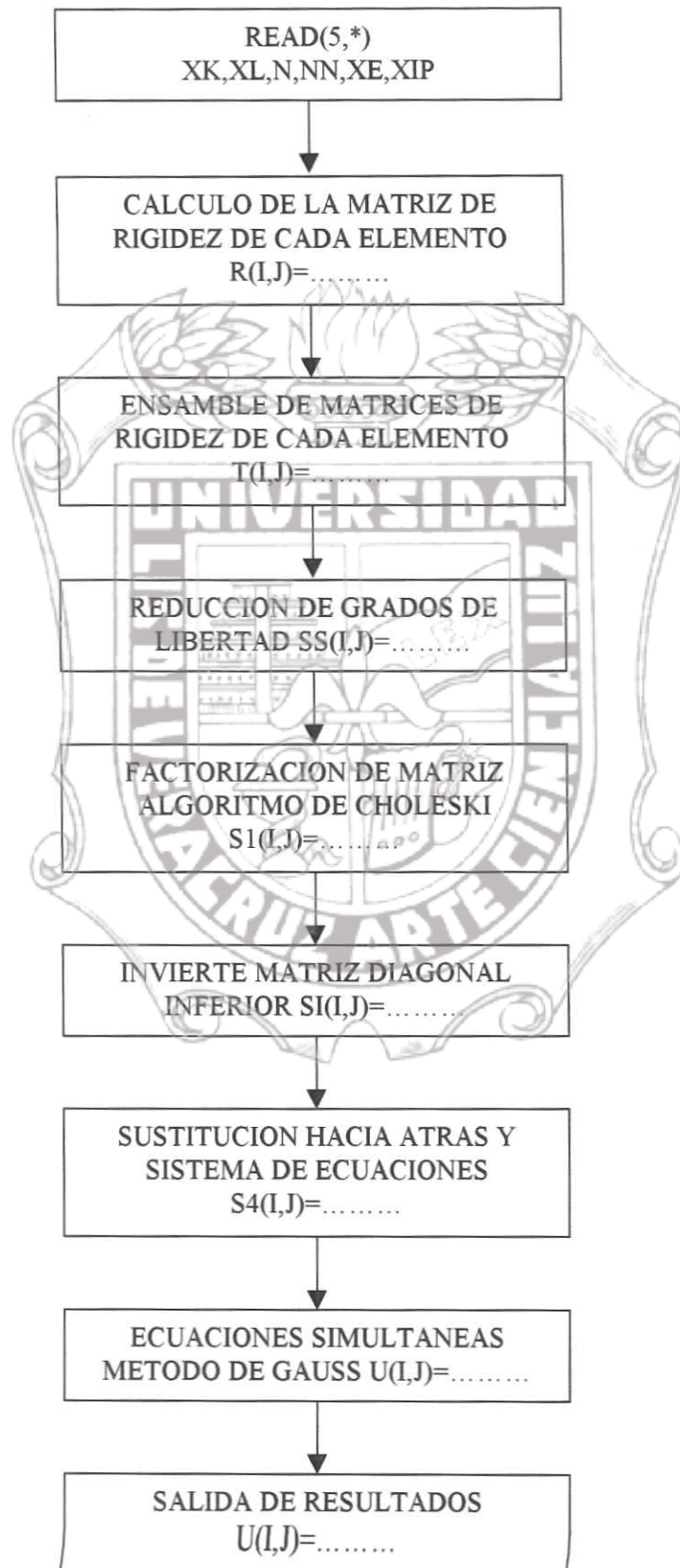
Posteriormente, se hace la reducción de la matriz por las condiciones de apoyo y finalmente, se resuelve el sistema por medio del algoritmo de Choleski y las ecuaciones simultáneas de Gauss.

El resultado obtenido es el vector de desplazamientos y giros en cada punto de la viga.

El programa tiene la capacidad de admitir vigas con extremos libres, viga en cantiliver, simplemente apoyada, apoyada-empotrada o viceversa y doblemente empotrada.



## 4.4.1. Diagrama de Flujo



## 4.4.2. Lista de Símbolos

XK = Módulo de cimentación

XL = Longitud de cada elemento

N = Número total de grados de libertad

NN = Condiciones de apoyo de la viga

XE = Módulo de Elasticidad

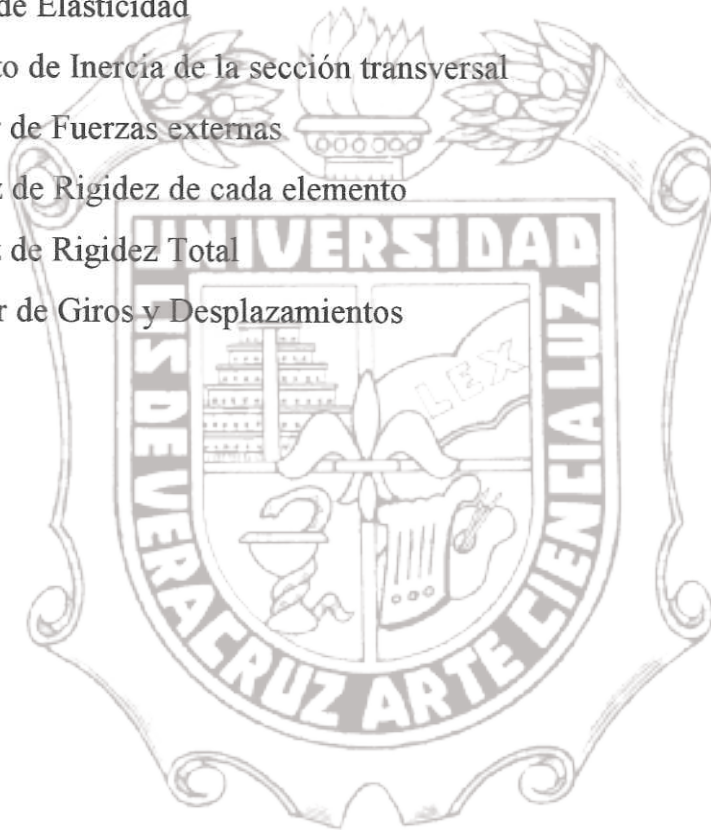
XIP = Momento de Inercia de la sección transversal

F(I,J) = Vector de Fuerzas externas

R(I,J) = Matriz de Rigidez de cada elemento

T(I,J) = Matriz de Rigidez Total

U(I,J) = Vector de Giros y Desplazamientos



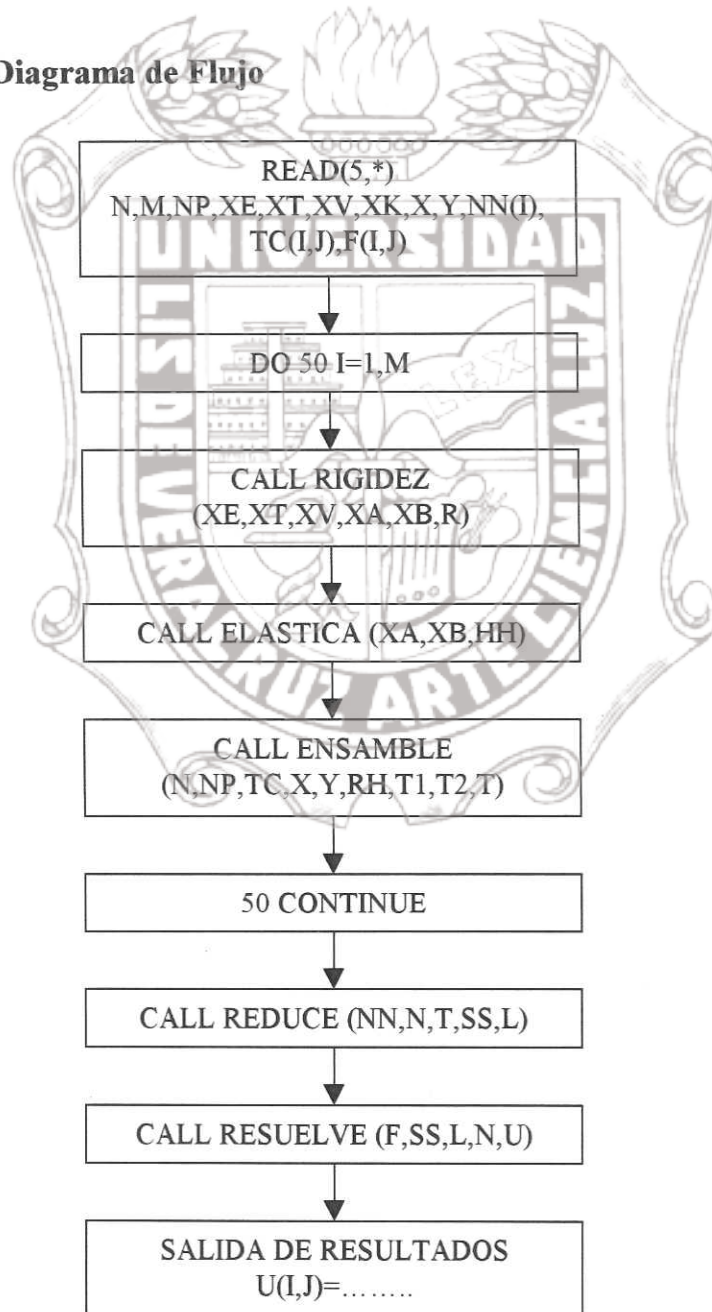
Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

## 4.5. DESCRIPCION DEL PROGRAMA "PSCE"

El Programa "PSCE" está elaborado en lenguaje FORTRAN y calcula los giros y desplazamientos en cada punto por el método de Elemento Finito usando el elemento placa rectangular de 4 nodos y 3 grados de libertad por nodo.

El procedimiento es similar al empleado en el Programa "VSCE".

### 4.5.2. Diagrama de Flujo



SUBROUTINE RIGIDEZ  
(XE,XT,XV,XA,XB,R)

CALCULA LA MATRIZ DE  
RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO  
 $R(I,J)=\dots\dots\dots$

RETURN

SUBROUTINE ELASTICA  
(XA,XB,HH)

CALL CI4F (S(I1),S(I2),XA,XB,F)

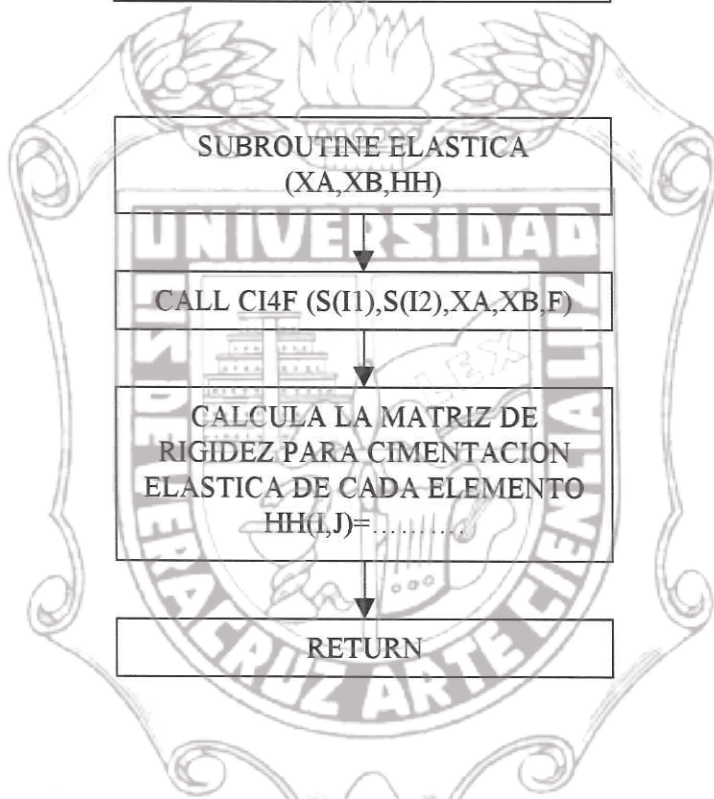
CALCULA LA MATRIZ DE  
RIGIDEZ PARA CIMENTACION  
ELASTICA DE CADA ELEMENTO  
 $HH(I,J)=\dots\dots\dots$

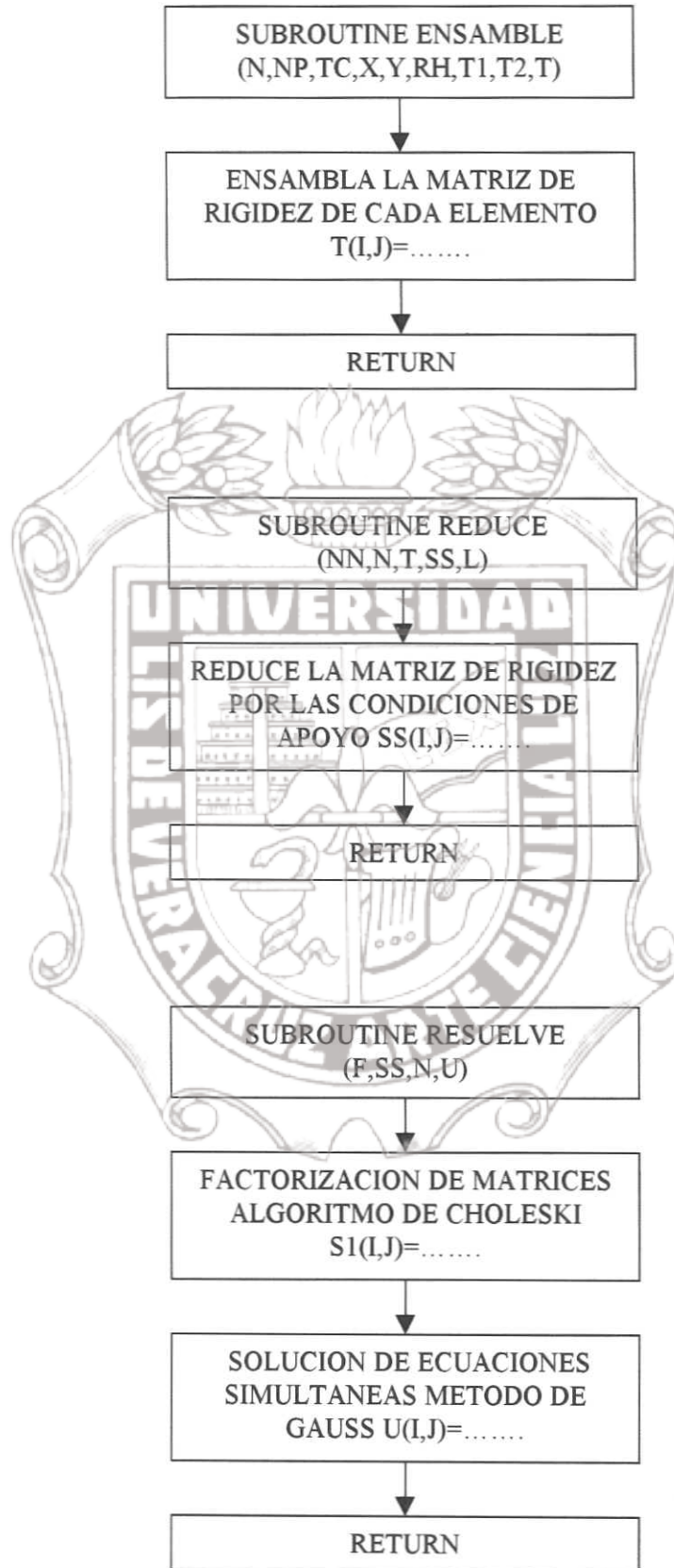
RETURN

SUBROUTINE CI4F (S,T,AH,BV,F)

CALCULA LAS FUNCIONES DE  
FORMA PARA CADA NODO  
 $F(I,J)=\dots\dots\dots$

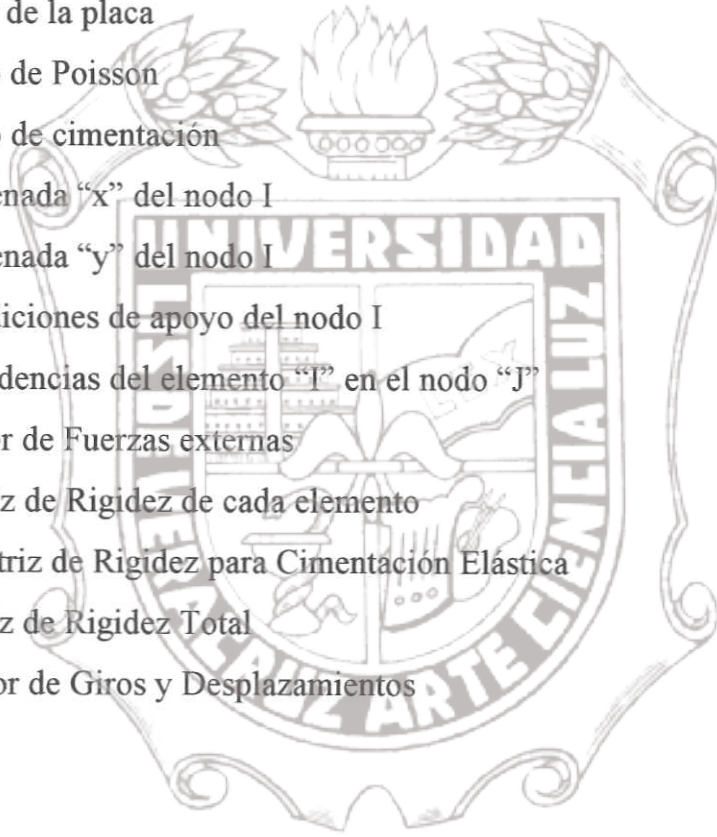
RETURN





## 4.5.2. Lista de Símbolos

- N = Número total de grados de libertad  
M = Número de elementos finitos  
NP = Número de nodos  
XE = Módulo de Elasticidad  
XT = Espesor de la placa  
XV = Módulo de Poisson  
XK = Módulo de cimentación  
X(I) = Coordenada "x" del nodo I  
Y(I) = Coordenada "y" del nodo I  
NN(I) = Condiciones de apoyo del nodo I  
TC(I,J) = Incidencias del elemento "I" en el nodo "J"  
F(I,J) = Vector de Fuerzas externas  
R(I,J) = Matriz de Rigidez de cada elemento  
HH(I,J) = Matriz de Rigidez para Cimentación Elástica  
T(I,J) = Matriz de Rigidez Total  
U(I,J) = Vector de Giros y Desplazamientos

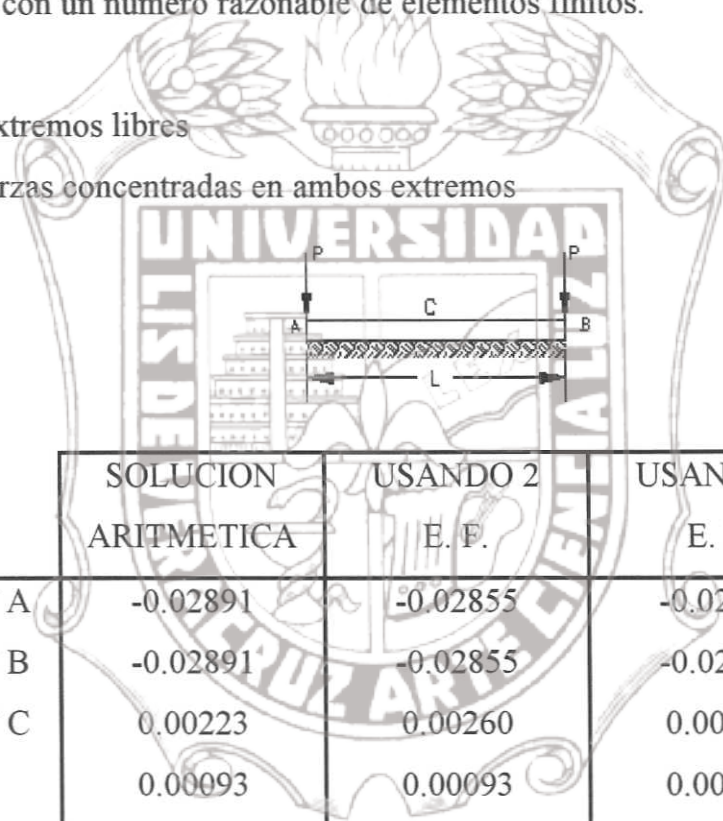


## 4.6. COMPARACION DE RESULTADOS

Con el propósito de comprobar la eficiencia del programa "VSCE" se muestran a continuación varios ejemplos de vigas sobre cimentación elástica resueltos por medio de éste y a su vez por medio de una solución aritmética particular para cada caso (tomados de la referencia 3); y se comparan los resultados notándose claramente una muy buena aproximación con un número razonable de elementos finitos.

### 1. Viga con extremos libres

#### a). Fuerzas concentradas en ambos extremos

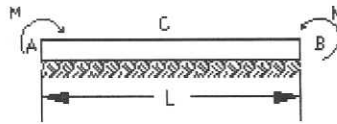


	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN A	-0.02891	-0.02855	-0.02887	-0.02891
FLECHA EN B	-0.02891	-0.02855	-0.02887	-0.02891
FLECHA EN C	0.00223	0.00260	0.00224	0.00223
GIRO EN A	0.00093	0.00093	0.00093	0.00093
GIRO EN B	-0.00093	-0.00093	-0.00093	-0.00093

Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

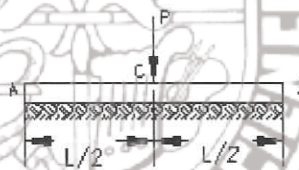


b). Momentos concentrados en ambos extremos



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN A	0.00463	0.00464	0.00463	0.00463
FLECHA EN B	0.00463	0.00464	0.00463	0.00463
GIRO EN A	-0.00028	-0.00028	-0.00028	-0.00028
GIRO EN B	0.00028	0.00028	0.00028	0.00028

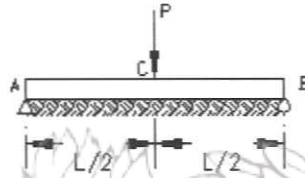
c). Fuerza concentrada en el centro



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN A	0.00111	0.00130	0.00112	0.00111
FLECHA EN B	0.00111	0.00130	0.00112	0.00111
FLECHA EN C	-0.00809	-0.00782	-0.00807	-0.00809
GIRO EN A	-0.00018	-0.00018	-0.00018	-0.00018
GIRO EN B	0.00018	0.00018	0.00018	0.00018

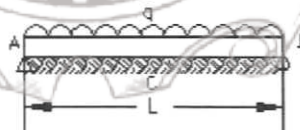
## 2. Viga con extremos articulados

a). Fuerza concentrada en el centro.



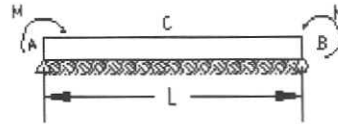
	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN C	-0.00800	-0.00770	-0.00798	-0.00800
GIRO EN A	-0.00015	-0.00014	-0.00015	-0.00015
GIRO EN B	0.00015	0.00014	0.00015	0.00015

b). Carga uniformemente distribuida.



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN C	-0.53850	-0.54557	-0.53872	-0.53850
GIRO EN A	-0.01601	-0.01625	-0.01602	-0.01601
GIRO EN B	0.01601	0.01625	0.01602	0.01601

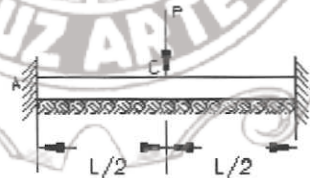
c). Momentos concentrados en los extremos.



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN C	-0.00148	-0.00139	-0.00148	-0.00148
GIRO EN A	-0.00014	-0.00013	-0.00013	-0.00014
GIRO EN B	0.00014	0.00013	0.00013	0.00014

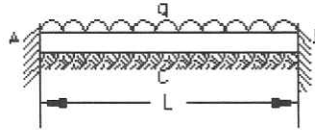
3. Viga con extremos empotrados

a). Fuerza concentrada en el centro.



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN C	-0.00637	-0.00624	-0.00636	-0.00637

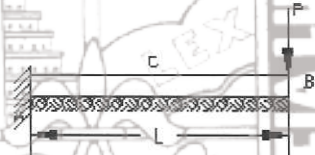
b). Carga uniformemente distribuida.



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN C	-0.36245	-0.37439	-0.36290	-0.36245

4. Viga en cantiliver

a). Fuerza concentrada en el extremo libre.



	SOLUCION ARITMETICA	USANDO 2 E. F.	USANDO 4 E. F.	USANDO 6 E. F.
FLECHA EN B	-0.02957	-0.02899	-0.02950	0.02955
GIRO EN B	-0.00088	-0.00088	-0.00088	-0.00088

El Programa "PSCE" se comparó con otro programa para comprobar su efectividad. Este fue el "KENSLABS", que es un paquete comercial de análisis y diseño de pavimentos (como ya se comentó anteriormente) que también está basado en el método de Elemento Finito.

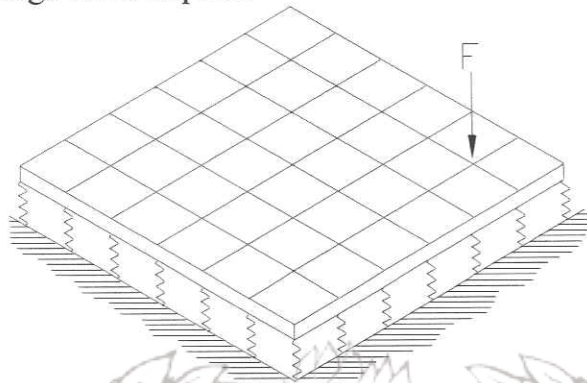
1. Placa sobre cimentación elástica y empotrada en sus extremos
  - a). Con carga en el centro



El diagrama muestra una placa rectangular sobre una cimentación elástica, representada por una red de muelles. Una carga vertical  $F$  se aplica en el centro de la placa. El sistema está empotrado en sus extremos. El diagrama está superpuesto sobre el escudo de la Universidad Veracruzana.

	SOLUCION KENSLABS	SOLUCION PSCE
DESPLAZAMIENTO MAXIMO	-0.08512 cm	-0.080505 cm
GIRO EN EL EJE X	0.00002	0.000000
GIRO EN EL EJE Z	-0.00002	0.000000

b). Con carga en la esquina



	SOLUCION KENSLABS	SOLUCION PSCE
DESPLAZAMIENTO MAXIMO	-0.06122 cm	-0.066820 cm
GIRO EN EL EJE X	0.0001822	0.000149
GIRO EN EL EJE Z	-0.0001822	-0.000149

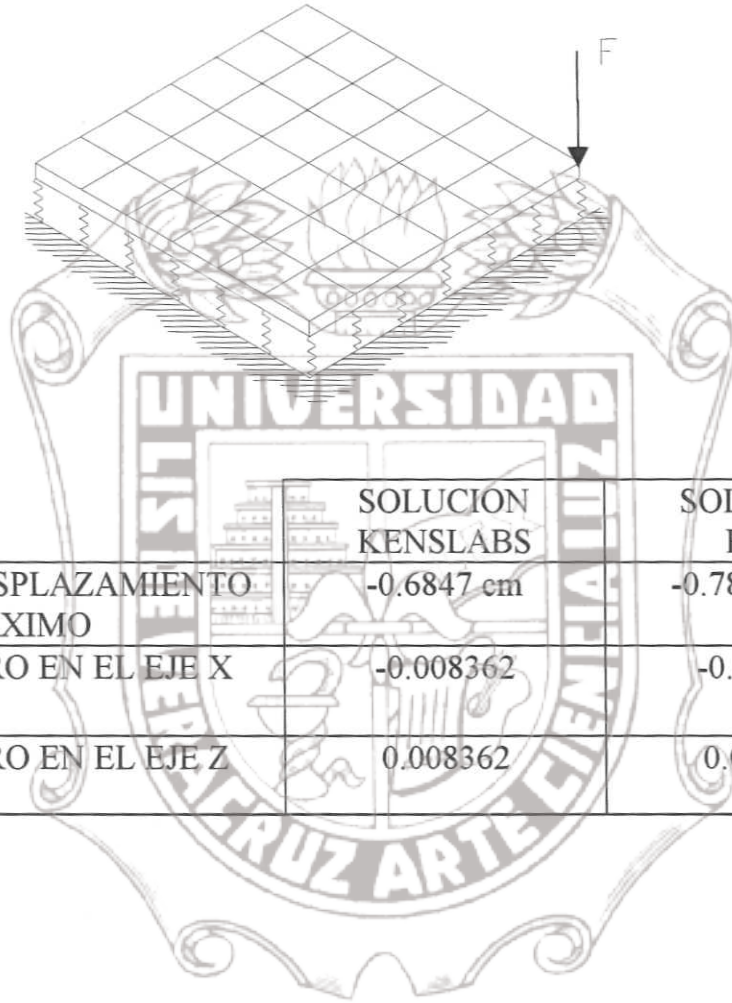
c). Con carga en la orilla



	SOLUCION KENSLABS	SOLUCION PSCE
DESPLAZAMIENTO MAXIMO	-0.1018 cm	-0.072608 cm
GIRO EN EL EJE X	-0.0004501	-0.000178
GIRO EN EL EJE Z	-0.00003468	0.000000

## 2. Placa sobre cimentación elástica y libre en sus extremos

### a). Con carga en la esquina



	SOLUCION KENSLABS	SOLUCION PSCE
DESPLAZAMIENTO MAXIMO	-0.6847 cm	-0.786514 cm
GIRO EN EL EJE X	-0.008362	-0.009624
GIRO EN EL EJE Z	0.008362	0.009624

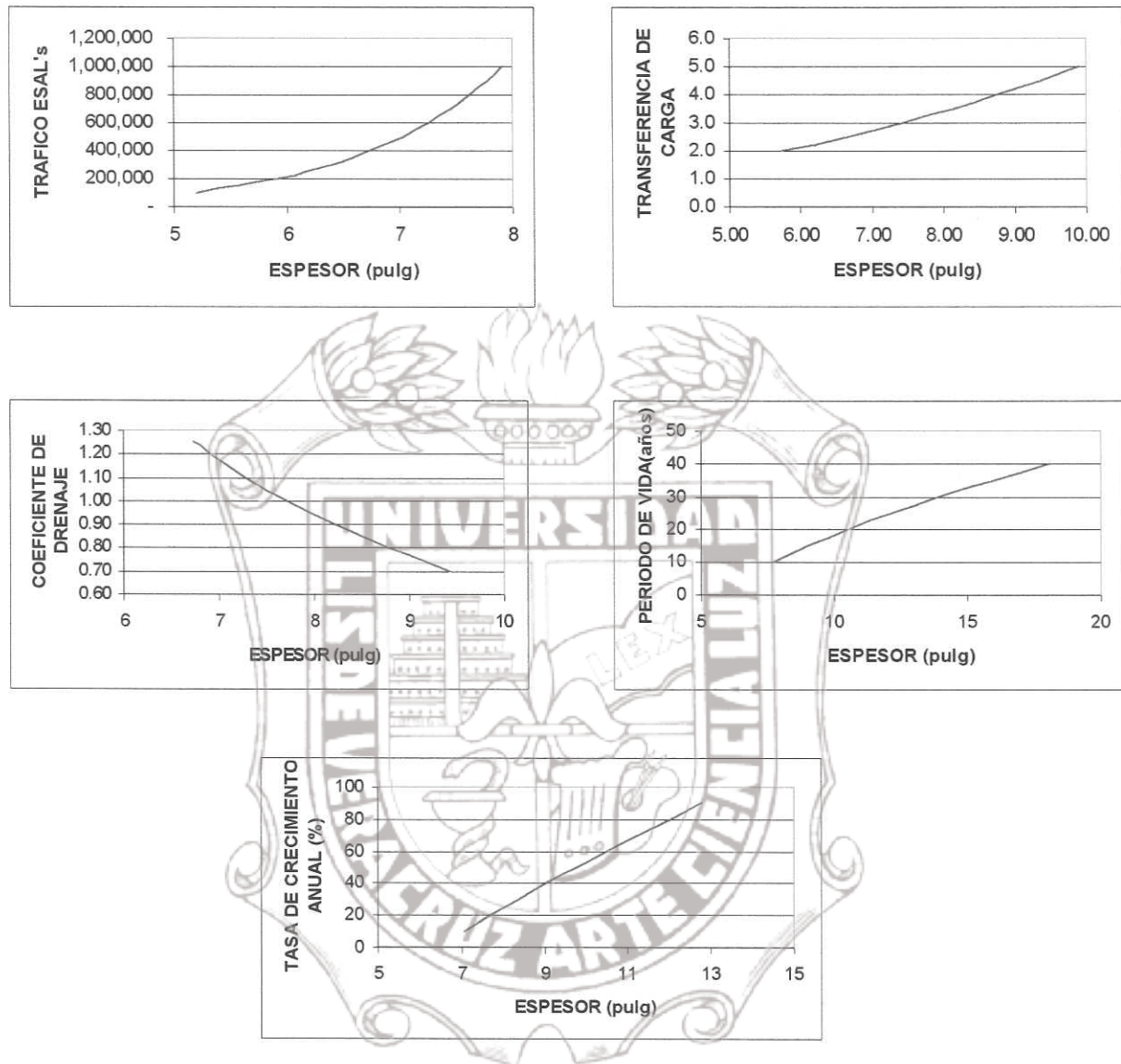
Como ya se dijo, los métodos más utilizados hoy en día para el diseño de pavimentos de concreto son el de la AASHTO y el de la PCA, sin embargo, el método a emplear depende de cada problema en particular, algunas veces será más adecuado utilizar el procedimiento de la AASHTO y otras el de la PCA. En cualquier caso deberá tenerse en cuenta que cada parámetro se debe tomar de acuerdo al lugar en que se vaya a construir el pavimento.

En el caso del método AASHTO, se estudió a detalle el programa "PAS" (descrito en el capítulo 4) y se hizo un estudio de sensibilidad de cada una de las variables que intervienen en este software, que son las siguientes:

- Espesor del pavimento
- Utilidad final
- Periodo de vida
- Tasa de crecimiento anual
- Tráfico (ejes equivalentes)
- Confiabilidad
- Módulo de ruptura
- Módulo de elasticidad
- Transferencia de carga
- Módulo de reacción del suelo
- Módulo de resiliencia de la sub-base
- Módulo de resiliencia de la base
- Espesor de la base
- Profundidad a la que se encuentra cimiento rígido
- Pérdida de soporte
- CBR (California Bearing Ratio)
- Coeficiente de drenaje
- Serviciabilidad inicial
- Serviciabilidad final

Las variables que mas afectan el diseño del espesor del pavimento son el tráfico, la transferencia de carga, el coeficiente de drenaje, el periodo de vida y la tasa de crecimiento anual, las cuales se ilustran en las siguientes gráficas:





Se puede concluir que este programa es muy útil en el diseño de pavimentos, siempre y cuando se tenga especial cuidado en la selección de cada una de las variables de diseño, incluyendo las cargas vehiculares, ya que el programa proporciona pesos máximos para cada tipo de vehículo, sin embargo difieren con respecto a las permitidas en México; y se recomienda hacer un análisis de sensibilidad para cada diseño.

En cuanto al método de la PCA, se estudió el programa "KENSLABS", que sirvió para comparar los resultados con el programa desarrollado en el presente trabajo. Este software,

tiene la posibilidad de incluir más parámetros en el diseño, las variables que pueden alimentarse al programa son las siguientes:

- Tipo de cimentación
- Análisis de daño
- Número de periodos por año
- Grupos de carga
- Número de losas
- Número de nodos
- Número de capas
- Número de nodos en contacto
- Peso propio de la losa
- Diferencia de temperatura entre la parte superior y la inferior de la losa
- Módulo de ruptura
- Coeficiente de expansión térmica
- Coeficiente de poisson
- Módulo de elasticidad
- Espesor del pavimento
- Módulo de cimentación

Las limitaciones del programa son las siguientes:

1. Se aplica a un máximo de 9 losas, 12 juntas y 420 nodos. Cada losa puede tener un máximo de 15 nodos en cada dirección.
2. Considera que cada losa se ondula por temperatura independientemente de las demás, cosa que no sucede en las juntas longitudinales, aunque el área más crítica no es en la vecindad de las juntas longitudinales por lo que esta limitación tendría muy poco efecto en el diseño. El análisis por temperatura considera una capa de losas y de espesor uniforme, cuando no es así se debe asumir un espesor promedio.
3. Cuando las losas están compuestas de 2 capas, las juntas en las 2 capas están localizadas donde mismo. Si la parte de abajo de la capa no tiene juntas y es más débil que la parte de arriba de la capa, esta consideración podría tener un pequeño efecto en los esfuerzos en la parte superior de la capa.
4. El programa no permite el uso de juntas infinitamente rígidas, las deflexiones o rotaciones en los dos lados de la junta son iguales.

5. El uso de elementos rectangulares limita severamente el tamaño de los mismos. Si se usan elementos pequeños en la losa principal, los elementos en las losas contiguas deberán ser del mismo ancho. La relación longitud/ancho para cualquier elemento no debe exceder de 4 ó 5, lo que provoca que se necesite una mayor cantidad de elementos.
6. En la losa se pueden determinar esfuerzos y deflexiones, pero en la cimentación sólo se pueden determinar deflexiones.

Las utilidades del programa son las siguientes:

1. Calcula cortante y momento transferidos en las juntas, las pasajuntas pueden no estar espaciadas uniformemente.
2. Cada losa puede tener diferentes espesores y medidas. En una misma losa el espesor puede variar entre nodo y nodo, pero dos losas contiguas deben tener el mismo ancho y todas las juntas deben ser continuas a través de las losas.
3. Las losas pueden tener 2 capas rígidas, pegadas o sin pegar. Cada capa puede tener diferente módulo de elasticidad y módulo de poisson.
4. La carga puede ser uniformemente distribuida en áreas rectangulares o concentrada en un número dado de nodos. Cada área cargada puede tener intensidad y presión diferentes.
5. Si hay simetría con respecto a uno o dos ejes, sólo se necesita considerar la mitad o la cuarta parte de la losa.
6. Analiza el efecto de ondulación por temperatura y los huecos entre la losa y la cimentación.
7. Considera la posibilidad de contacto total o parcial entre la losa y la cimentación.
8. Tiene la opción de cimentación sólida, líquida o en capas.

De cualquier forma debe tenerse en cuenta que no sólo un buen diseño debe llevarse a cabo para que un pavimento llegue a su vida útil proyectada, es necesario una buena supervisión y un control de calidad excelente en mano de obra, elaboración, colocación y en todas las etapas del proceso constructivo.

# Tesis de Maestría

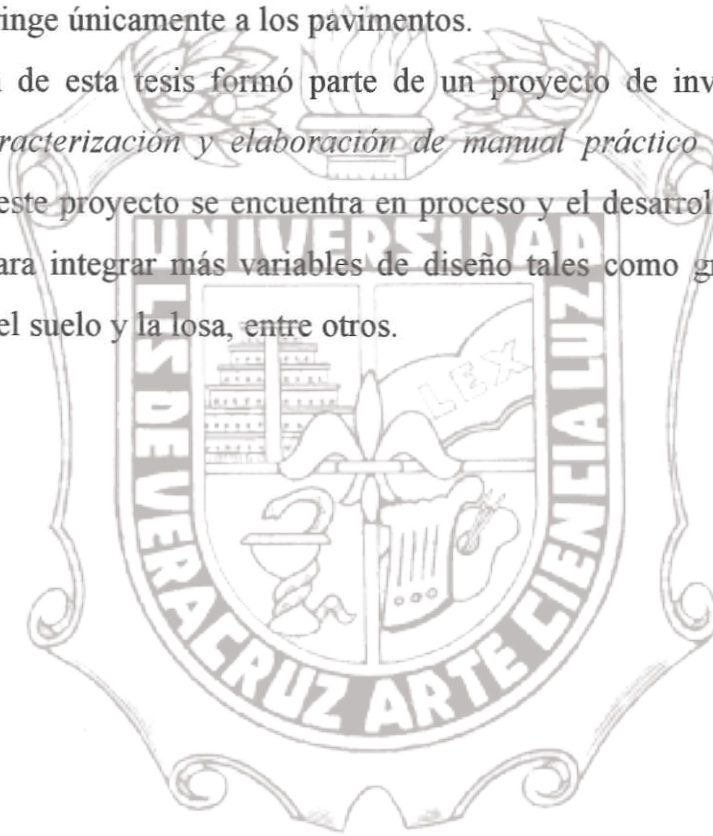
## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

Es por ello que se debe tener especial cuidado en cada una de estas etapas ya que por muy exactos que sean los resultados obtenidos de cualquier programa empleado, de nada servirán si no se tiene un buen control de calidad o una buena supervisión o construcción.

Los programas desarrollados en esta tesis, "PSCE" y "VSCE", podrán servir como base para un diseño de pavimento rígido además de otras utilidades, ya que son aplicables a un gran número de problemas puesto que son modelos matemáticos basados en elemento finito que no se restringe únicamente a los pavimentos.

La realización de esta tesis formó parte de un proyecto de investigación de la UACH, llamado: "*Caracterización y elaboración de manual práctico de pavimentos rígidos*". Actualmente, este proyecto se encuentra en proceso y el desarrollo del programa "PSCE" se continúa para integrar más variables de diseño tales como gradientes de temperatura, fricción entre el suelo y la losa, entre otros.



## APENDICE A. PROGRAMA "VSCE"

- C PROGRAMA QUE CALCULA DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN UNA
- C VIGA SOBRE CIMENTACION ELASTICA SUJETA A FLEXION POR
- C MEDIO DE ELEMENTO FINITO.
- C N=NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD
- C M=NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS
- C NN=0 CUANDO LA VIGA TIENE EXTREMOS LIBRES
- C NN=1 CUANDO LA VIGA ESTA EN CANTILIVER
- C NN=2 CUANDO LA VIGA ESTA SIMPLEMENTE APOYADA
- C NN=3 CUANDO LA VIGA ESTA APOYADA-EMPOTRADA O VICEVERSA
- C NN=4 CUANDO LA VIGA ESTA DOBLEMENTE EMPOTRADA

```
DIMENSION R(20,20),T(20,20),S(20,20),R1(20,20),F(20,1),SI(20,20)
DIMENSION SIF(20,1),U(20,1),SS(20,20),H(20,20),S1(20,20),S2(20,20)
DIMENSION S3(20,20),S4(20,20),RR(20,20),ST(20,20)
OPEN(5,FILE='VSCE.DAT')
OPEN(6,FILE='VSCE.IN')
OPEN(7,FILE='VSCE.ENT')
OPEN(8,FILE='VSCE.OUT')
READ(5,*)XK,XL,N,NN,XE,XIP
```

- C A CONTINUACION SE CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDECES "R"

```
C=(XK*XL)/420.
C1=XE*XIP/XL**3
M=(N-2)/2
DO 20 I=1,N-1
DO 20 J=1,N
R(I,J)=0.0
R1(I,J)=0.0
T(I,J)=0.0
RR(I,J)=0.0
20 CONTINUE
R(1,1)=156.
RR(1,1)=12.
R(1,2)=22.*XL
RR(1,2)=6.*XL
R(1,3)=54.
RR(1,3)=-12.
R(1,4)=-13.*XL
RR(1,4)=6.*XL
R(2,2)=4.*XL**2
RR(2,2)=4.*XL**2
R(2,3)=13.*XL
```

```
RR(2,3)=-6.*XL
R(2,4)=-3.*XL**2
RR(2,4)=2.*XL**2
R(3,3)=156.
RR(3,3)=12.
R(3,4)=-22.*XL
RR(3,4)=-6.*XL
R(4,4)=4.*XL**2
RR(4,4)=4.*XL**2
DO 30 I=1,N-1
DO 30 J=1,N
R(J,I)=R(I,J)
RR(J,I)=RR(I,J)
30 CONTINUE
DO 31 I=1,N
DO 31 J=1,N
R(I,J)=R(I,J)*C
RR(I,J)=RR(I,J)*C1
31 CONTINUE
DO 32 I=1,N
DO 32 J=1,N
R(I,J)=R(I,J)+RR(I,J)
32 CONTINUE

C ENSAMBLE DE MATRICES DE CADA ELEMENTO

DO 70 K=0,M-1
DO 40 I=1,N-2*K
DO 40 J=1,N-2*K
R1(I+2*K,J+2*K)=R(I,J)
40 CONTINUE
DO 50 I=1,N
DO 50 J=1,N
T(I,J)=T(I,J)+R1(I,J)
50 CONTINUE
DO 60 I=1,N
DO 60 J=1,N
R1(I,J)=0.0
60 CONTINUE
70 CONTINUE
```

C REDUCCION DE GRADOS DE LIBERTAD

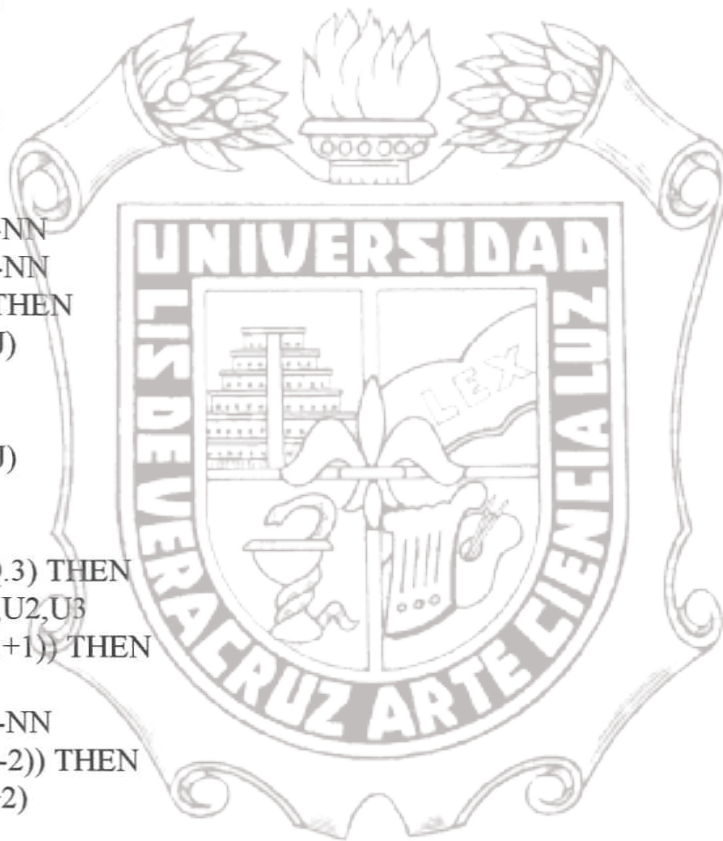
```
IF (NN.EQ.0) THEN
DO 1 I=1,N
```



```

DO 1 J=1,N
SS(I,J)=T(I,J)
1  CONTINUE
GOTO 2
ENDIF
IF (NN.EQ.2) THEN
DO 90 I=1,N
DO 90 J=1,N-NN
IF (J.LT.N-2) THEN
S(I,J)=T(I,J+1)
GOTO 80
ELSE
S(I,J)=T(I,J+2)
80  ENDIF
90  CONTINUE
DO 110 I=1,N-NN
DO 110 J=1,N-NN
IF (I.LT.N-2) THEN
SS(I,J)=S(I+1,J)
GOTO 100
ELSE
SS(I,J)=S(I+2,J)
100  ENDIF
110  CONTINUE
ELSEIF (NN.EQ.3) THEN
READ(7,*)U1,U2,U3
IF (U2.EQ.(U1+1)) THEN
DO 120 I=1,N
DO 120 J=1,N-NN
IF (J.LT.(U3-2)) THEN
S(I,J)=T(I,J+2)
ELSE
S(I,J)=T(I,J+3)
ENDIF
120  CONTINUE
ELSE
DO 130 I=1,N
DO 130 J=1,N-NN
IF (J.LT.U1) THEN
S(I,J)=T(I,J)
ELSE
S(I,J)=T(I,J+1)
ENDIF
130  CONTINUE
ENDIF

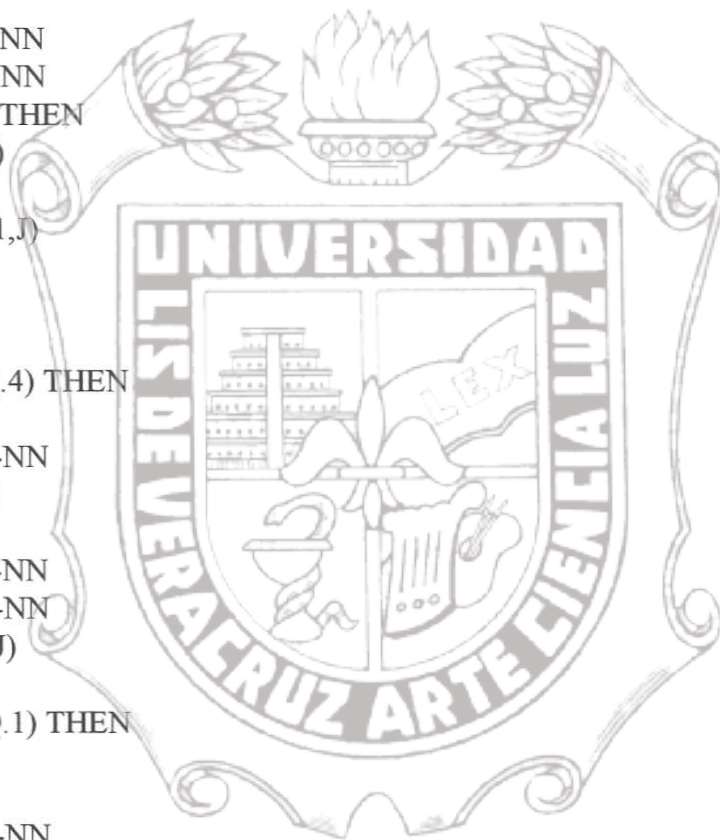
```



```
IF (U2.EQ.(U1+1)) THEN
DO 140 I=1,N-NN
DO 140 J=1,N-NN
  IF (I.LT.(U3-2)) THEN
    SS(I,J)=S(I+2,J)
  ELSE
    SS(I,J)=S(I+3,J)
  ENDIF
140 CONTINUE
ELSE
DO 150 I=1,N-NN
DO 150 J=1,N-NN
  IF (I.LT.U1) THEN
    SS(I,J)=S(I,J)
  ELSE
    SS(I,J)=S(I+1,J)
  ENDIF
150 CONTINUE
ENDIF
ELSEIF (NN.EQ.4) THEN
DO 160 I=1,N
DO 160 J=1,N-NN
S(I,J)=T(I,J+2)
160 CONTINUE
DO 170 I=1,N-NN
DO 170 J=1,N-NN
SS(I,J)=S(I+2,J)
170 CONTINUE
ELSEIF (NN.EQ.1) THEN
NN=NN+1
DO 171 I=1,N
DO 171 J=1,N-NN
S(I,J)=T(I,J+2)
171 CONTINUE
DO 172 I=1,N-NN
DO 172 J=1,N-NN
SS(I,J)=S(I+2,J)
172 CONTINUE
ENDIF

2 DO 10 I=1,N-NN
READ(6,*)F(I,1)
10 CONTINUE
```

C FACTORIZACION DE MATRICES





## C ALGORITMO DE CHOLESKI

```
S1(1,1)=SS(1,1)**.5
DO 180 J=2,N-NN
  S1(J,1)=SS(J,1)/S1(1,1)
180 CONTINUE
  SU=0.0
  DO 220 I=2,N-(NN+1)
    DO 190 K=1,I-1
      SU=SU+S1(I,K)**2
190 CONTINUE
    S1(I,I)=(SS(I,I)-SU)**.5
    SO=0.0
    DO 210 J=I+1,N-NN
      DO 200 K=1,I-1
        SO=SO+(S1(J,K)*S1(I,K))
200 CONTINUE
    S1(J,I)=(SS(J,I)-SO)/S1(I,I)
    SO=0.0
210 CONTINUE
    SU=0.0
220 CONTINUE
    SA=0.0
    DO 230 K=1,N-(NN+1)
      SA=SA+S1(N-NN,K)**2
230 CONTINUE
    S1(N-NN,N-NN)=(SS(N-NN,N-NN)-SA)**.5
    DO 240 I=1,N-NN
      DO 240 J=1,I
        S2(J,I)=S1(I,J)
240 CONTINUE
    DO 241 I=1,N
      DO 241 J=1,N
        ST(I,J)=S2(I,J)
241 CONTINUE
```

## C INVIERTE MATRIZ DIAGONAL INFERIOR

```
NF=2*(N-NN)
DO 251 I=1,N
  DO 251 J=N-NN+1,NF
    S1(I,J)=0.0
251 CONTINUE
  DO 260 J=1,N-NN
    DO 250 K=1,N-NN
```



```
H(J,K)=S1(J,K)
250 CONTINUE
S1(J,N-NN+J)=1
260 CONTINUE
DO 300 K=1,N-NN
XB=S1(K,K)
DO 290 J=1,N-NN
IF (J.EQ.K) THEN
GOTO 280
ELSE
XS=S1(J,K)
ENDIF
DO 270 I=K,NF
S1(J,I)=S1(J,I)-S1(K,I)*XS/XB
270 CONTINUE
280 A=0.0
290 CONTINUE
300 CONTINUE
DO 310 I=N-NN+1,NF
DO 310 J=1,N-NN
SI(J,I-N+NN)=S1(J,I)/S1(J,J)
310 CONTINUE

C SUSTITUCION HACIA ATRAS

DO 330 I=1,N-NN
TEMP=0.0
DO 320 K=1,N-NN
TEMP=TEMP+SI(I,K)*F(K,1)
320 CONTINUE
SIF(I,1)=TEMP
330 CONTINUE
DO 340 I=1,N-NN
S3(I,1)=SIF(I,1)
340 CONTINUE

C SISTEMA DE ECUACIONES

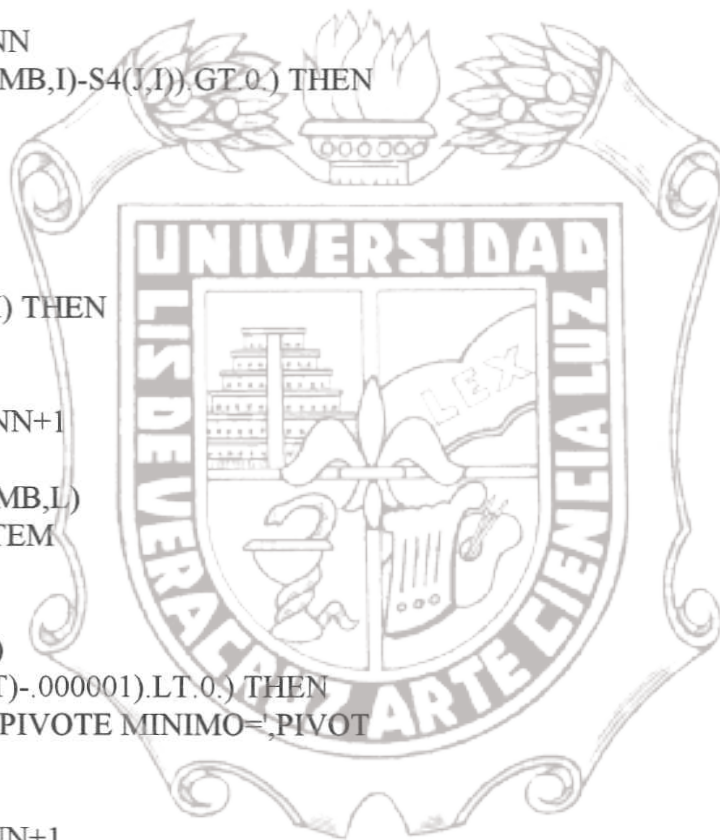
DO 360 I=1,N-NN
DO 360 J=1,N-NN+1
IF (J.EQ.(N-NN+1)) THEN
S4(I,J)=S3(I,1)
GOTO 350
ELSE
S4(I,J)=ST(I,J)
```



```
350 ENDIF
360 CONTINUE

C SOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS
C METODO DE GAUSS
```

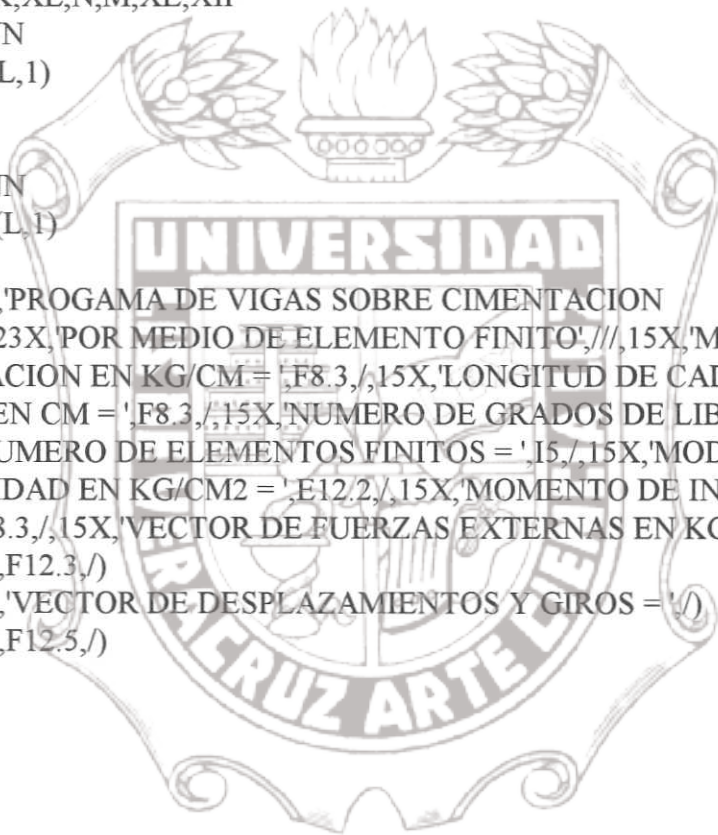
```
      K=1
      DO 450 I=1,N-NN
      K=K+1
      ICAMB=I
      DO 380 J=K,N-NN
      IF (ABS(S4(ICAMB,I)-S4(J,I)).GT.0.) THEN
      GOTO 370
      ELSE
      ICAMB=I
370 ENDIF
380 CONTINUE
      IF (ICAMB.EQ.I) THEN
      GOTO 400
      ELSE
      DO 390 L=1,N-NN+1
      TEM=S4(I,L)
      S4(I,L)=S4(ICAMB,L)
      S4(ICAMB,L)=TEM
390 CONTINUE
      ENDIF
400 PIVOT=S4(I,I)
      IF ((ABS(PIVOT)-.000001).LT.0.) THEN
      WRITE(*,*)'EL PIVOTE MINIMO=',PIVOT
      GOTO 470
      ELSE
      DO 410 J=1,N-NN+1
      S4(I,J)=S4(I,J)/PIVOT
410 CONTINUE
      ENDIF
      DO 440 J=1,N-NN
      IF (J.EQ.I) THEN
      GOTO 430
      ELSE
      RATIO=S4(J,I)
      ENDIF
      DO 420 L=1,N-NN+1
      S4(J,L)=S4(J,L)-(S4(I,L)*RATIO)
420 CONTINUE
430 A=0.
```



```
440 CONTINUE
450 CONTINUE
    DO 460 L=1,N-NN
        U(L,1)=S4(L,N-NN+1)
460 CONTINUE
470 A=0.0
```

## C SALIDA DE RESULTADOS

```
WRITE(8,500)XK,XL,N,M,XE,XIP
DO 480 L=1,N-NN
WRITE(8,510)F(L,1)
480 CONTINUE
WRITE(8,520)
DO 490 L=1,N-NN
WRITE(8,530)U(L,1)
490 CONTINUE
500 FORMAT(15X,'PROGRAMA DE VIGAS SOBRE CIMENTACION
*ELASTICA',/,23X,'POR MEDIO DE ELEMENTO FINITO',///,15X,'MODULO
*DE CIMENTACION EN KG/CM = ',F8.3,/,15X,'LONGITUD DE CADA
*ELEMENTO EN CM = ',F8.3,/,15X,'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD
* = ',I5,/,15X,'NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS = ',I5,/,15X,'MODULO
*DE ELASTICIDAD EN KG/CM2 = ',E12.2,/,15X,'MOMENTO DE INERCIA
*EN CM4 = ',F8.3,/,15X,'VECTOR DE FUERZAS EXTERNAS EN KG = ',/)
510 FORMAT(15X,F12.3,/)
520 FORMAT(15X,'VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS Y GIROS = ',/)
530 FORMAT(15X,F12.5,/)
STOP
END
```



## APENDICE B. PROGRAMA "PSCE"

C PROGRAMA QUE CALCULA DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN UNA  
 C PLACA SOBRE CIMENTACION ELASTICA SUJETA A FLEXION POR  
 C MEDIO DE ELEMENTO FINITO.  
 C N=NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD  
 C M=NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS  
 C XK=MODULO DE CIMENTACION  
 C XA=LONGITUD HORIZONTAL DE CADA ELEMENTO  
 C XB=LONGITUD VERTICAL DE CADA ELEMENTO  
 C XE=MODULO DE ELASTICIDAD  
 C XT=ESPEJOR DE LA PLACA  
 C XV=MODULO DE POISSON  
 C R=MATRIZ DE RIGIDEZ  
 C NN=0 CUANDO LA PLACA NO TIENE RESTRICCION EN EL EXTREMO  
 C NN=1 CUANDO LA PLACA TIENE RESTRICCION EN EL EXTREMO

REAL\*8 XA,XB,HH  
 CHARACTER\*80 TITULO  
 DIMENSION X(150,150),Y(150,150),NN(150),TC(150,150)  
 DIMENSION R(150,150)  
 DIMENSION RH(150,150),SS(150,150),T(150,150),HH(150,150)  
 DIMENSION T1(150,150),F(150,150),U(150,150)  
 COMMON I

OPEN(5,FILE='PSCE.DAT')  
 OPEN(6,FILE='PSCE.OUT')

2 READ(5,2)TITULO  
 FORMAT (A)  
 READ(5,\*)N,M,NP,XE,XT,XV,XK

C COORDENADAS  
 DO 10 II=1,M  
 DO 10 J=1,4  
 READ(5,\*)X(II,J),Y(II,J)  
 10 CONTINUE

C RESTRICCIONES  
 DO 20 II=1,N  
 READ(5,\*)NN(II)  
 20 CONTINUE

C CONEXION  
 DO 30 II=1,M  
 DO 30 J=1,4

```
30 READ(5,*)TC(IL,J)
CONTINUE

DO 1 II=1,(NP*3)
DO 1 J=1,(NP*3)
T(IL,J)=0
T1(IL,J)=0
1 CONTINUE

C CALCULO DE DIMENSIONES
LL=0
DO 50 I=1,M
XA=ABS(X(I,2)-X(I,1))
XB=ABS(Y(I,4)-Y(I,1))

C CALCULA MATRIZ DE RIGIDEZ

CALL RIGIDEZ(XE,XT,XV,XA,XB,R)

CALL ELASTICA(XA,XB,HH)

DO 40 K=1,12
DO 40 J=1,12
RH(K,J)=R(K,J)+HH(K,J)*XK
40 CONTINUE

C ENSAMBLE DE MATRICES DE CADA ELEMENTO

CALL ENSAMBLE(NP,TC,RH,T1,T)

50 CONTINUE

C REDUCE LA MATRIZ POR LAS CONDICIONES DE APOYO

CALL REDUCE (NN,N,T,SS,L)

C RESUELVE EL SISTEMA POR EL ALGORITMO DE CHOLESKI

DO 11 II=1,L
READ(5,*)F(IL,1)
11 CONTINUE
```

CALL RESUELVE (F,SS,L,N,U)

C SALIDA DE RESULTADOS

```

WRITE(6,*)TITULO
WRITE(6,500)N,M,XE,XT,XV,XK
WRITE(6,550)
DO 480 ML=1,L
WRITE(6,560)F(ML,1)
480 CONTINUE
WRITE(6,570)
DO 490 ML=1,L
WRITE(6,580)U(ML,1)
490 CONTINUE
500 FORMAT(15X,'PROGRAMA DE PLACAS SOBRE CIMENTACION
*ELASTICA',/
*23X,'POR MEDIO DE ELEMENTO FINITO',///
*15X,'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD = ',
*I5,/,15X,'NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS = ',I5,/,15X,
*'MODULO DE ELASTICIDAD EN KG/CM2 = ',F12.2,/,15X,
*'ESPESOR DE LA PLACA = ',F8.3,/,15X,
*'MODULO DE POISSON = ',F8.3,/,15X,
*'MODULO DE CIMENTACION = ',F8.3,/)
550 FORMAT(15X,'VECTOR DE FUERZAS EXTERNAS EN KG = ',/)
560 FORMAT(15X,F12.3,/)
570 FORMAT(15X,'VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS Y GIROS = ',/)
580 FORMAT(15X,F12.6,/)
STOP
END
    
```

C \*\*\*\*\*

```

SUBROUTINE RIGIDEZ(XE,XT,XV,XA,XB,R)
REAL*8 XA,XB
DIMENSION R(150,150)
C=XE*XT**3/12./(1-XV**2)
CC=(1.-XV)/2
C1=XB/6./XA**3
C2=XA/6./XB**3
C3=XV/2./XA/XB
C4=CC/15./XA/XB
    
```

$$\begin{aligned}
 R(1,1) &= 6*(C1+C2)+C3+21*C4 \\
 R(2,1) &= 6*XB*C2+XB*C3+3*XB*C4 \\
 R(3,1) &= -6*XA*C1-XA*C3-3*XA*C4 \\
 R(4,1) &= -6*C1+3*C2-C3-21*C4 \\
 R(5,1) &= 3*XB*(C2-C4)-XB*C3 \\
 R(6,1) &= -6*XA*C1-3*XA*C4 \\
 R(7,1) &= -3*(C1+C2)+C3+21*C4 \\
 R(8,1) &= 3*XB*(C2-C4) \\
 R(9,1) &= -3*XA*(C1-C4) \\
 R(10,1) &= 3*C1-6*C2-C3-21*C4 \\
 R(11,1) &= 6*XB*C2+3*XB*C4 \\
 R(12,1) &= -3*XA*(C1-C4)+XA*C3 \\
 R(2,2) &= 8*XB**2*(C2+C4) \\
 R(3,2) &= -2*XA*XB*C3 \\
 R(4,2) &= 3*XB*(C2-C4)-XB*C3 \\
 R(5,2) &= 4*XB**2*C2-8*XB**2*C4 \\
 R(7,2) &= -3*XB*(C2-C4) \\
 R(8,2) &= 2*XB**2*(C2+C4) \\
 R(10,2) &= XB*(-6*C2-3*C4) \\
 R(11,2) &= XB**2*(4*C2-2*C4) \\
 R(3,3) &= 8*XA**2*(C1+C4) \\
 R(4,3) &= XA*(6*C1+3*C4) \\
 R(6,3) &= XA**2*(4*C1-2*C4) \\
 R(7,3) &= 3*XA*(C1-C4) \\
 R(9,3) &= 2*XA**2*(C1+C4) \\
 R(10,3) &= -3*XA*(C1-C4)+XA*C3 \\
 R(12,3) &= XA**2*(4*C1-8*C4) \\
 R(4,4) &= 6*(C1+C2)+C3+21*C4 \\
 R(5,4) &= XB*(6*C2+C3+3*C4) \\
 R(6,4) &= XA*(6*C1+C3+3*C4) \\
 R(7,4) &= 3*C1-6*C2-C3-21*C4 \\
 R(8,4) &= XB*(6*C2+3*C4) \\
 R(9,4) &= XA*(3*C1-C3-3*C4) \\
 R(10,4) &= -3*(C1+C2)+C3+21*C4 \\
 R(11,4) &= 3*XB*(C2-C4) \\
 R(12,4) &= 3*XA*(C1-C4) \\
 R(5,5) &= 8*XB**2*(C2+C4) \\
 R(6,5) &= 2*XA*XB*C3 \\
 R(7,5) &= -XB*(6*C2+3*C4) \\
 R(8,5) &= XB**2*(4*C2-2*C4) \\
 R(10,5) &= 3*XB*(-C2+C4) \\
 R(11,5) &= 2*XB**2*(C2+C4) \\
 R(6,6) &= 8*XA**2*(C1+C4) \\
 R(7,6) &= XA*(3*C1-C3-3*C4) \\
 R(9,6) &= XA**2*(4*C1-8*C4) \\
 R(10,6) &= 3*XA*(-C1+C4)
 \end{aligned}$$



Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana



```

R(12,6)=2*XA**2*(C1+C4)
R(7,7)=6*(C1+C2)+C3+21*C4
R(8,7)=XB*(-6*C2-C3-3*C4)
R(9,7)=XA*(6*C1+C3+3*C4)
R(10,7)=-6*C1+3*C2-C3-21*C4
R(11,7)=XB*(-3*C2+C3+3*C4)
R(12,7)=XA*(6*C1+3*C4)
R(8,8)=8*XB**2*(C2+C4)
R(9,8)=-2*XA*XB*C3
R(10,8)=XB*(-3*C2+C3+3*C4)
R(11,8)=XB**2*(4*C2-8*C4)
R(9,9)=8*XA**2*(C1+C4)
R(10,9)=XA*(-6*C1-3*C4)
R(12,9)=XA**2*(4*C1-2*C4)
R(10,10)=6*(C1+C2)+C3+21*C4
R(11,10)=-XB*(6*C2+C3+3*C4)
R(12,10)=-XA*(6*C1+C3+3*C4)
R(11,11)=8*XB**2*(C2+C4)
R(12,11)=2*XA*XB*C3
R(12,12)=8*XA**2*(C1+C4)
DO 31 II=1,12
DO 31 J=1,12
R(II,J)=R(II,J)*C
31 CONTINUE
DO 30 II=1,11
DO 30 J=1,12
R(II,J)=R(J,II)
30 CONTINUE
RETURN
END

```



C \*\*\*\*\*

C MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CIMENTACION ELASTICA  
C PLACA DE 4 NODOS

```

SUBROUTINE ELASTICA (XA,XB,HH)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION S(3),W(3),HH(150,150),DB(150,150),F(150,150),FT(150,150)

```

DATA S,W/-.7745967,.7745967,0.,2\*.5555556,.8888889/

C VALORES INICIALES  
DO 10 II=1,12  
DO 10 J=1,12  
HH(II,J)=0

10 CONTINUE  
C INTEGRACION NUMERICA

DO 20 I1=1,3  
DO 20 I2=1,3

C FUNCIONES DE INTERPOLACION

DO 21 II=1,12  
DO 21 J=1,12  
DB(II,J)=0

21 CONTINUE

DO 22 II=1,12  
F(1,II)=0  
FT(II,1)=0

22 CONTINUE

CALL CI4F (S(I1),S(I2),XA,XB,F)

W2=W(I1)\*W(I2)\*XA\*XB

C MATRIZ DE RIGIDECES

DO 30 II=1,12  
DO 30 J=1,1  
FT(II,J)=F(J,II)

30 CONTINUE

DO 40 II=1,12  
DO 40 J=1,12  
DB(II,J)=FT(II,1)\*F(1,J)

40 CONTINUE

DO 45 II=1,12  
DO 45 J=1,12  
HH(II,J)=HH(II,J)+W2\*DB(II,J)

45 CONTINUE

20 CONTINUE

RETURN  
END

C \*\*\*\*\*

```
SUBROUTINE CI4F (S,T,AH,BV,F)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION F(150,150)
```

C FUNCIONES DE INTERPOLACION PLACA DE 4 NODOS CON 3 GRADOS DE LIBERTAD C/U

```
L=0
DO 50 II=1,4
IF(II.EQ.1)EI=-1.
IF(II.EQ.1)ANI=-1.
IF(II.EQ.2)EI=1.
IF(II.EQ.2)ANI=-1.
IF(II.EQ.3)EI=1.
IF(II.EQ.3)ANI=1.
IF(II.EQ.4)EI=-1.
IF(II.EQ.4)ANI=1.
```

```
SO=EI*S
ANS=ANI*T
SS=S*S
TS=T*T
```

C FUNCIONES DE FORMA POR NODO

```
K=II+L
F(1,K)=0.125*(1.+SO)*(1.+ANS)*(2.+SO+ANS-SS-TS) ! DESPL W
F(1,K+1)=-0.125*BV*ANI*(1.+SO)*(1.-ANS)*(1.+ANS)*(1.+ANS) ! GIRO Y
F(1,K+2)=0.125*AH*EI*(1.-SO)*(1.+ANS)*(1.+SO)*(1.+SO) ! GIRO X
```

50 L=L+2

```
RETURN
END
```

C \*\*\*\*\*

C REDUCCION DE GRADOS DE LIBERTAD

```
SUBROUTINE REDUCE (NN,N,T,SS,L)
DIMENSION T(150,150),S(150),SS(150,150),NN(150)
```

```
C1=1000000.111111
MM=0.
DO 600 II=1,N
IF(NN(II).EQ.1) THEN
MM=MM+1
```

```

DO 610 J=1,N
T(II,J)=C1
T(J,II)=C1
610 CONTINUE
ELSE
ENDIF
600 CONTINUE
    
```

```

K=1
DO 620 II=1,N
DO 620 J=1,N
IF(T(II,J).NE.C1) THEN
S(K)=T(II,J)
K=K+1
ELSE
ENDIF
620 CONTINUE
    
```

```

L=N-MM
K=1
DO 630 II=1,L
DO 630 J=1,L
SS(II,J)=S(K)
K=K+1
630 CONTINUE
    
```

```

RETURN
END
    
```

C \*\*\*\*\*

C FACTORIZACION DE MATRICES  
C ALGORITMO DE CHOLESKI

```

SUBROUTINE RESUELVE(F,SS,L,N,U)
DIMENSION S1(150,150),S2(150,150),S3(150,150),S4(150,150)
DIMENSION ST(150,150),H(150,150),F(150,150),SIF(150,150)
DIMENSION SS(150,150),U(150,150),SI(150,150)
    
```

```

S1(1,1)=SS(1,1)**.5
DO 180 J=2,L
S1(J,1)=SS(J,1)/S1(1,1)
180 CONTINUE
SU=0.0
DO 220 II=2,L-1
DO 190 K=1,II-1
    
```



```

SU=SU+S1(II,K)**2
190 CONTINUE
S1(II,II)=(SS(II,II)-SU)**.5
SO=0.0
DO 210 J=II+1,L
DO 200 K=1,II-1
SO=SO+(S1(J,K)*S1(II,K))
200 CONTINUE
S1(J,II)=(SS(J,II)-SO)/S1(II,II)
SO=0.0
210 CONTINUE
SU=0.0
220 CONTINUE
SA=0.0
DO 230 K=1,L-1
SA=SA+S1(L,K)**2
230 CONTINUE
S1(L,L)=(SS(L,L)-SA)**.5
DO 240 II=1,L
DO 240 J=1,II
S2(J,II)=S1(II,J)
240 CONTINUE
DO 241 II=1,N
DO 241 J=1,N
ST(II,J)=S2(II,J)
241 CONTINUE
C INVIERTE MATRIZ DIAGONAL INFERIOR

NF=2*L
DO 251 II=1,N
DO 251 J=L+1,NF
S1(II,J)=0.0
251 CONTINUE
DO 260 J=1,L
DO 250 K=1,L
H(J,K)=S1(J,K)
250 CONTINUE
S1(J,L+J)=1
260 CONTINUE
DO 300 K=1,L
XBB=S1(K,K)
DO 290 J=1,L
IF (J.EQ.K) THEN
GOTO 280
ELSE

```



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

```

XS=S1(J,K)
ENDIF
DO 270 II=K,NF
S1(J,II)=S1(J,II)-S1(K,II)*XS/XBB
270 CONTINUE
280 A=0.0
290 CONTINUE
300 CONTINUE
DO 310 II=L+1,NF
DO 310 J=1,L
SI(J,II-L)=S1(J,II)/S1(J,J)
310 CONTINUE

C   SUSTITUCION HACIA ATRAS

DO 330 II=1,L
TEMP=0.0
DO 320 K=1,L
TEMP=TEMP+SI(II,K)*F(K,1)
320 CONTINUE
SIF(II,1)=TEMP
330 CONTINUE
DO 340 II=1,L
S3(II,1)=SIF(II,1)
340 CONTINUE

C   SISTEMA DE ECUACIONES

DO 360 II=1,L
DO 360 J=1,L+1
IF (J.EQ.(L+1)) THEN
S4(II,J)=S3(II,1)
GOTO 350
ELSE
S4(II,J)=ST(II,J)
350 ENDIF
360 CONTINUE

C   SOLUCION DE ECUACIONES SIMULTANEAS
C   METODO DE GAUSS

K=1
DO 450 II=1,L
K=K+1
ICAMB=II
DO 380 J=K,L

```



```

IF (ABS(S4(ICAMB,II)-S4(J,II)).GT.0.) THEN
GOTO 370
ELSE
ICAMB=II
370  ENDIF
380  CONTINUE
IF (ICAMB.EQ.II) THEN
GOTO 400
ELSE
DO 390 ML=1,L+1
TEM=S4(II,ML)
S4(II,ML)=S4(ICAMB,ML)
S4(ICAMB,ML)=TEM
390  CONTINUE
ENDIF
400  PIVOT=S4(II,II)
IF ((ABS(PIVOT)-.000001).LT.0.) THEN
WRITE(*,*)EL PIVOTE MINIMO=',PIVOT
GOTO 470
ELSE
DO 410 J=1,L+1
S4(II,J)=S4(II,J)/PIVOT
410  CONTINUE
ENDIF
DO 440 J=1,L
IF (J.EQ.II) THEN
GOTO 430
ELSE
RATIO=S4(J,II)
ENDIF
DO 420 ML=1,L+1
S4(J,ML)=S4(J,ML)-(S4(II,ML)*RATIO)
420  CONTINUE
430  A=0.
440  CONTINUE
450  CONTINUE
DO 460 ML=1,L
U(ML,1)=S4(ML,L+1)
460  CONTINUE
470  A=0.0

RETURN
END

```

C \*\*\*\*\*

Instituto de Ingeniería  
 Universidad Veracruzana



```

SUBROUTINE ENSAMBLE(NP,TC,RH,T1,T)
DIMENSION T(150,150),T1(150,150),RH(150,150),TC(150,150)
DIMENSION Z(150,150)
COMMON I

DO 20 J=1,4
Z(1,J)=(TC(I,J)-1)*3+1
Z(2,J)=(TC(I,J)-1)*3+2
Z(3,J)=(TC(I,J)-1)*3+3
20 CONTINUE

L=0
IL=1
DO 35 II=1,4
DO 35 K=1,3
DO 30 J=1,4
I1=Z(K,II)
I2=Z(1,J)
I3=Z(2,J)
I4=Z(3,J)
T1(I1,I2)=RH(IL,J+L)
T1(I1,I3)=RH(IL,(J+1+L))
T1(I1,I4)=RH(IL,(J+2+L))
L=L+2
30 CONTINUE
IL=IL+1
L=0
35 CONTINUE

DO 40 IN=1,(NP*3)
DO 40 J=1,(NP*3)
T(IN,J)=T(IN,J)+T1(IN,J)
40 CONTINUE

DO 50 IM=1,(NP*3)
DO 50 J=1,(NP*3)
T1(IM,J)=0
50 CONTINUE

RETURN
END
    
```





## APENDICE C. REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. Seminario de Pavimentos Rígidos

CEMEX

1997

2. Teoría de Placas y Láminas

S. Timoshenko

S. Woinowsky - Krieger

3. Beams on Elastic Foundation

M. Hetenyi

1983

4. Guide for the Design of Pavement Structures

AASHTO

1993

5. Simplified Guide for the Design of Concrete Pavements

American Concrete Pavement Association

6. Ingeniería de Carreteras

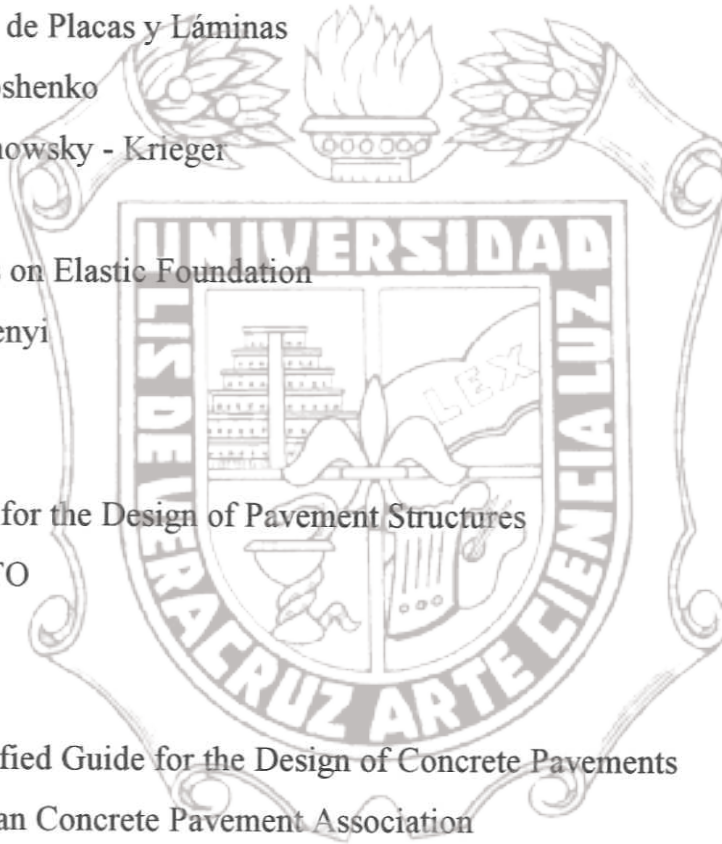
Wright

1993

7. Ingeniería de Carreteras

Hewes & Oglesby

1982



8. Introduction to the Finite Element Method

Niels Ottosen & Hans Petersson

1992

9. Finite Elements For Structural Analysis

William Weaver, Jr. & Paul R. Johnston

1984

10. Principles of Pavement Design

Yoder & Witczak

1975

11. Pavement Analysis and Design

Yang H. Huang

1993

12. Guía para el diseño y construcción de pavimentos rígidos

IMCYC

1998

13. Influence Charts For Concrete Pavement

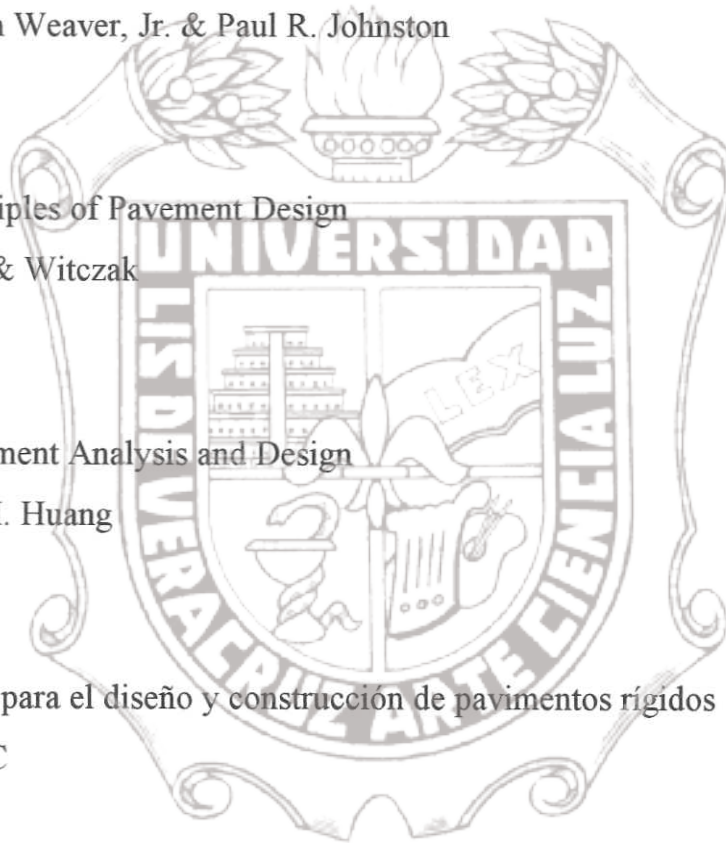
Picket, G., G. K. Ray

1951

14. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II

J. Isenberg, Chairman

1991



Instituto de Ingeniería  
Universidad Veracruzana

15. Distress Identificarion Manual for the Long-Term Pavement Performance Project  
Strategic Highway Program  
1993

